Mathematics. — *Bestimmung einer Körperbasis für die rationalen Invarianten einer allgemeinen n-ären Grösse* $c_{\alpha\beta}^{\cdot\cdot\gamma}$. Von D. VAN DANTZIG. (Communicated by Prof. R. WEITZENBÖCK).

(Communicated at the meeting of April 27, 1929).

1. Die allgemeine n-äre Grösse $c_{\alpha\beta}^{\cdot\cdot\gamma}$ mit *unbestimmten* Bestimmungszahlen legt die folgenden Grössen fest:
erstens den kovarianten Vektor

$$c_\alpha = c_{\alpha\lambda}^{\cdot\cdot\lambda}, \quad \quad (1)$$

zweitens die kovariante Grösse zweiten Grades vom Rang n

$$k_{\alpha\beta} = c_{\alpha\beta}^{\cdot\cdot\lambda} c_\lambda, \quad \quad (2)$$

und drittens den kovarianten Tensor zweiten Grades vom Rang n

$$h_{\alpha\beta} = h_{\beta\alpha} = c_{\alpha\lambda}^{\cdot\cdot\mu} c_{\beta\mu}^{\cdot\cdot\lambda} \quad \quad (3)$$

Es sei $\mathfrak{h}^{\alpha\beta}$ die kovariante Tensordichte vom Gewicht 2 und vom Grad $2n-2$ in den $c_{\alpha\beta}^{\cdot\cdot\gamma}$, deren Bestimmungszahlen die Unterdeterminanten $(n-1)$-ten Grades der Determinante $\mathfrak{h}$ der $h_{\alpha\beta}$ sind:

$$h_{\alpha\lambda}\, \mathfrak{h}^{\lambda\beta} = \mathfrak{h}\, A_\alpha^\beta = \begin{cases} \mathfrak{h}, & \alpha = \beta, \\ 0, & \alpha \neq \beta. \end{cases}$$

Es ergeben sich dann:
erstens die Affinordichte vom Gewicht 2 und vom Grad $2n$

$$\mathfrak{P}_\alpha^{\cdot\beta} = k_{\alpha\lambda}\, \mathfrak{h}^{\lambda\beta}, \quad \quad (4)$$

zweitens die kovarianten Vektordichten

$$\overset{r}{\mathfrak{v}}_\alpha = \begin{cases} c_\alpha, & r = 1, \\ \mathfrak{P}_\alpha^{\cdot\lambda} \overset{r-1}{\mathfrak{v}}_\lambda, & r = 2, 3, \ldots, n' \end{cases} \quad \quad (5)$$

wo $\overset{i}{\mathfrak{v}}_\alpha$ $(i, j, \ldots = 1, \ldots, n)$ das Gewicht $2\,i-2$ und den Grad $2n\,(i-1)+1$ hat, und drittens die Unterdeterminanten $(n-1)$-ten Grades $\underset{i}{\mathfrak{v}}^\alpha$ der Determinante $\mathfrak{V}$ der $\overset{i}{\mathfrak{v}}_\alpha$:

$$\sum_i \overset{i}{\mathfrak{v}}_\alpha \underset{i}{\mathfrak{v}}^\beta = \mathfrak{V}\, A_\alpha^\beta\,; \qquad \underset{i}{\mathfrak{v}}^\alpha\, \overset{j}{\mathfrak{v}}_\alpha = \mathfrak{V}\, \delta_i^j = \begin{cases} \mathfrak{V}, & i = j, \\ 0, & i \neq j. \end{cases} \quad \quad (6)$$

$\mathfrak{V}$ ist eine relative Invariante vom Rang n, Gewicht n^2-n+1 und Grad $n\,(n^2-n+1)$; $\underset{i}{\mathfrak{v}}^\alpha$ ist eine kontravariante Vektordichte vom Gewicht $n^2-n+3-2i$ und vom Grad $n\,(n^2-n+3-2i)-1$.

Setzt man jetzt

$$\overset{k}{\underset{ij}{\mathfrak{C}}} = c_{\alpha\beta}^{\cdot\cdot\gamma} \underset{i}{\mathfrak{v}}^{\alpha} \underset{j}{\mathfrak{v}}^{\beta} \overset{k}{\mathfrak{v}}_{\gamma}, \quad \ldots \ldots \ldots \quad (7)$$

so ist $\overset{k}{\underset{ij}{\mathfrak{C}}}$ eine relative Invariante vom Gewicht $2\{n^2-n+2)-(i+j-k)\}$ und vom Grad $2n\{(n^2-n+2)-(i+j-k)\}$.

Weil, wie wir sogleich beweisen werden, bei unbestimmten Bestimmungszahlen $\mathfrak{V} \neq 0$ ist, wird:

$$c_{\alpha\beta}^{\cdot\cdot\gamma} = \frac{\sum\limits_{ijk} \overset{k}{\underset{ij}{\mathfrak{C}}} \overset{i}{\mathfrak{v}}_{\alpha} \overset{j}{\mathfrak{v}}_{\beta} \underset{k}{\mathfrak{v}}^{\gamma}}{\mathfrak{V}^3} \quad \ldots \ldots \ldots \quad (8)$$

Hieraus ergibt sich sofort, dass die n^3+1 Invarianten $\overset{k}{\underset{ij}{\mathfrak{C}}}$ und $\mathfrak{V}$ die gesuchte Körperbasis bilden [1]). Denn eine beliebige rationale Invariante der $c_{\alpha\beta}^{\cdot\cdot\gamma}$ lässt sich, mit Koeffizienten, die von den $\overset{k}{\underset{ij}{\mathfrak{C}}}$ und $\mathfrak{V}$ abhängen, als eine rationale Invariante der $\overset{i}{\mathfrak{v}}_{\alpha}$ und $\underset{i}{\mathfrak{v}}^{\alpha}$ ausdrücken; eine solche gibt es aber nicht ausser $\mathfrak{V}$ [2]).

2. Um zu beweisen, dass für unbestimmte Bestimmungszahlen $\mathfrak{V} \neq 0$ ist, genügt es, eine spezielle Grösse anzugeben, für die $\mathfrak{V} \neq 0$ ist. Dazu betrachten wir eine n-äre Grösse $c_{\alpha\beta}^{\cdot\cdot\gamma}$, die sich additiv in zwei Grössen $c'^{\cdot\cdot\gamma}_{\alpha\beta}$ und $c''^{\cdot\cdot\gamma}_{\alpha\beta}$ zerlegen lässt, von denen die erste nur nach m unabhängigen Richtungen, und die zweite nur nach $n-m$ von diesen und von einander unabhängigen Richtungen nicht-verschwindende Komponenten hat, sodass jede Überschiebung von $c'^{\cdot\cdot\gamma}_{\alpha\beta}$ mit $c''^{\cdot\cdot\gamma}_{\alpha\beta}$ verschwindet. Eine jede der oben eingeführten Grössen wird dann in ebensolcher Weise additiv zerlegt; insbesondere wird

$$\mathfrak{P}_{\alpha}^{\cdot\beta} = \mathfrak{h}'' \, \mathfrak{P}'^{\cdot\beta}_{\alpha} + \mathfrak{h}' \, \mathfrak{P}''^{\cdot\beta}_{\alpha}$$

$$\overset{i}{\mathfrak{v}}_{\alpha} = (\mathfrak{h}'')^{i-1} \overset{i}{\mathfrak{v}}'_{\alpha} + (\mathfrak{h}')^{i-1} \overset{i}{\mathfrak{v}}''_{\alpha}$$

---

[1]) Praktisch leistet sie wenig, weil $\mathfrak{V}$ in den einfachsten Fällen verschwindet. Z.B. ist im gruppentheoretischen Fall, wo $c_{[\alpha\beta}^{\cdot\cdot\lambda} c_{\gamma]\lambda}^{\cdot\cdot\mu} = 0$ ist, $k_{\alpha\beta} = 0$, und im von R. Weitzenböck (Ueber einen gemischten Tensor A_{ik}^{λ}, Monatshefte für M. & Ph., **35** (1928) 1—8) erledigten Fall des kommutativen assoziativen Zahlensystems $h_{\alpha\beta} = k_{\alpha\beta}$, folglich $\overset{i}{\mathfrak{v}}_{\alpha} = \mathfrak{h}^{i-1} c_{\alpha}$; in den beiden Fällen ist also $\mathfrak{V} = 0$.

[2]) Die $\overset{k}{\underset{ij}{\mathfrak{C}}}$ sind bis auf geeignete Potenzen von $\mathfrak{V}$ die Bestimmungszahlen von $c_{\alpha\beta}^{\cdot\cdot\gamma}$ bzgl. eines invariant definierten Koordinatensystems, dessen Massvektoren bis auf geeignete Potenzen von $\mathfrak{V}$ die $\overset{i}{\mathfrak{v}}_{\alpha}$ und $\underset{i}{\mathfrak{v}}^{\alpha}$ sind. Vgl. auch G. F. C. Griss, Differentialinvarianten von Systemen von Vektoren, Diss. Amsterdam (1925), S. 32.

wo $\mathfrak{h}'$ bzw. $\mathfrak{h}''$ der Elementarteiler m-ten bzw. $(n-m)$-ten Grades der Matrix $h'_{\alpha\beta}$ bzw. $h''_{\alpha\beta}$ ist, und wo $\overset{i}{\mathfrak{v}}{}'_\alpha$ bzw. $\overset{i}{\mathfrak{v}}{}''_\alpha$ die $(i-1)$-te Transformierte mittels $\mathfrak{P}'^{\cdot\beta}_{\alpha}$ bzw. $\mathfrak{P}''^{\cdot\beta}_{\alpha}$ von c'_α bzw. c''_α ist. $\mathfrak{B}$ wird dann bis auf Potenzen von $\mathfrak{h}'$, $\mathfrak{h}''$, $\overset{m}{\mathfrak{B}}{}' = \overset{1}{\mathfrak{v}}{}'_{[1} \ldots . \overset{m}{\mathfrak{v}}{}'_{m]}$ und $\overset{n-m}{\mathfrak{B}}{}'' = \overset{1}{\mathfrak{v}}{}''_{[1} \ldots . \overset{n-m}{\mathfrak{v}}{}''_{n-m]}$ einer Simultaninvariante von $\mathfrak{P}'^{\cdot\beta}_{\alpha}$ und $\mathfrak{P}''^{\cdot\beta}_{\alpha}$ gleich, die nicht identisch verschwindet, wie sich zeigt, wenn man, weitergehend, $c'^{\cdot\cdot\gamma}_{\alpha\beta}$ und $c''^{\cdot\cdot\gamma}_{\alpha\beta}$ in solcher Weise spezialisiert, dass $\overset{m+1}{\mathfrak{v}}{}'_{\alpha} = \overset{1}{\mathfrak{v}}{}'_\alpha$ und $\overset{n-m+1}{\mathfrak{v}}{}''_\alpha = 0$ wird.

Für $n = 2$ und $n = 3$ lassen sich leicht Grössen mit nicht verschwindendem $\mathfrak{B}$ angeben (auch für $n = 1$, aber das genügt nicht, weil für $m = n - m = 1$ die Simultaninvariante von $\mathfrak{P}'^{\cdot\beta}_{\alpha}$ und $\mathfrak{P}''^{\cdot\beta}_{\alpha}$ identisch verschwindet); folglich gibt es solche Grössen für beliebiges n.

Weitergehend ergibt sich genau so, dass auch für die allgemeine n-äre *symmetrische* Grösse $c^{\cdot\cdot\gamma}_{\alpha\beta}$ $\mathfrak{B} \neq 0$ ist. Ist $c^{\cdot\cdot\gamma}_{\alpha\beta}$ *alternierend* in α und β, so verschwindet $\mathfrak{B}$ identisch für $n \leqq 4$. Für $n = 4$ führt die in der vorstehenden Note definierte Grösse mit den dortigen Bezeichnungen auf

$k_{\alpha\beta}$	$(\underline{3} - 2\,\underline{4})\,\underline{1} - \underline{4}\,\underline{2} - \underline{1}\,\underline{3} + (2\,\underline{1} + \underline{2})\,\underline{4}$
$\mathfrak{h}^{\alpha\beta}$	$\bar{1}\,(\bar{2} - \bar{3}) + \bar{2}\,(\bar{1} - \bar{4}) + \bar{3}\,(-\bar{1} + \bar{3} + \bar{4}) + \bar{4}\,(-\bar{2} + \bar{3} + \bar{4})$
$\mathfrak{P}^{\cdot\beta}_{\alpha}$	$(\underline{1} - \underline{4})\,\bar{1} - (2\,\underline{1} + \underline{2} - \underline{3} + 2\,\underline{4})\,\bar{2} + (\underline{1} + \underline{2} - \underline{3} + 2\,\underline{4})\,\bar{3} + (\underline{1} + \underline{2} + \underline{4})\,\bar{4}$
$\overset{1}{\mathfrak{v}}_\alpha = c_\alpha$	$-\underline{1} + \underline{2} - \underline{3} - \underline{4}$
$\overset{2}{\mathfrak{v}}_\alpha$	$-5\,\underline{1} - 3\,\underline{2} + 2\,\underline{3} - 4\,\underline{4}$
$\overset{3}{\mathfrak{v}}_\alpha$	$-\underline{1} + \underline{2} - 5\,\underline{3} + 11\,\underline{4}$
$\overset{4}{\mathfrak{v}}_\alpha$	$3\,\underline{1} + 5\,\underline{2} + 6\,\underline{3}$

und

$$\mathfrak{B} = -896 \neq 0.$$

Hiermit ist also eine zweite [1]) Körperbasis für die rationalen Invarianten der alternierenden quaternären Grösse $c^{\cdot\cdot\gamma}_{\alpha\beta}$ gefunden. Wenigstens für jedes durch 4 teilbare n ist also das Nichtverschwinden von $\mathfrak{B}$ bei der allgemeinen alternierenden Grösse gesichert. Für ungerades n dagegen verschwindet $\mathfrak{B}$ identisch, weil dann der Rang von $k_{\alpha\beta}$, folglich auch von $\mathfrak{P}^{\cdot\beta}_{\alpha}$ kleiner als n ist. Ob dies auch für $n \equiv 2 \pmod{4}$ zutrifft, bleibe dahingestellt.

3. Substitution von (8) in (1) und (5) ergibt n Relationen ersten und $n(n-1)$ Relationen $2n$-ten Grades in den $\overset{k}{\underset{ij}{\mathfrak{C}}}$ zwischen diesen Inva-

[1]) Vgl. die vorangehende Note. Die dort definierte Körperbasis besteht aus Invarianten niedrigeren Grades, lässt sich aber nicht auf beliebiges n erweitern.

rianten und $\mathfrak{V}$. Dies stimmt überein mit der zu erwartenden Anzahl von $n^3 - n^2$ absoluten, also $n^3 - n^2 + 1$ relativen algebraisch unabhängigen Invarianten. Die Relationen lauten:

$$\sum_j \overset{j}{\underset{ij}{\mathfrak{C}}} = \begin{cases} \mathfrak{V}^2, & i = 1, \\ 0, & i \neq 1. \end{cases} \qquad (9)$$

$$n!^2 \sum_{\substack{i_1 \ldots i_n, k \\ j_1 \ldots j_n, l}} \overset{l}{\underset{kl}{\mathfrak{C}}} \, \overset{k}{\underset{i_1[1}{\mathfrak{C}}} \, \overset{j_2}{\underset{2|i_2|}{\mathfrak{C}}} \, \overset{j_3}{\underset{3|i_3|}{\mathfrak{C}}} \ldots \overset{j_n}{\underset{n]}{\mathfrak{C}}} \, \delta^{j_1}_{i_n} \, \overset{i_2}{\underset{[1\ 2|j_2|}{\mathfrak{C}}} \, \overset{i_3}{\underset{3|j_3|}{\mathfrak{C}}} \ldots \overset{i_n}{\underset{n]j_n}{\mathfrak{C}}} = \mathfrak{V}^{4n-2} \delta^{j_1+1}_{i_1}. \qquad (10)$$