Mathematics. — *Ueber involutorische Punkttransformationen im konformen Raum.* Von H. BECK in Bonn. (Communicated by Prof. JAN DE VRIES).

(Communicated at the meeting of March 23, 1929).

1. In einer Note: On an involution among the rays of space [1]) hat Herr JAN DE VRIES eine involutorische Geradentransformation beschrieben. die nicht nur an sich interessant ist, sondern den Weg zu einer grossen Anzahl weiterer solcher involutorischen *Geraden*transformationen des dreidimensionalen *projectiven* Raumes eröffnet, wie im Folgenden gezeigt werden soll. Ausserdem lässt sich aus dem Ansatz von Herrn J. DE VRIES noch eine ganze Anzahl von involutorischen *Punkt*transformationen des dreidimensionalen *konformen* Raumes gewinnen.

2. Herr J. DE VRIES geht von vier Geradenbüscheln aus, Eine Gerade G des Raumes trifft eine Gerade jedes der vier Büschel und die andere Quadrisekante dieser vier letztgenannten geraden Linien ist die zu G zugeordnete Gerade G'.

Bildet man jetzt in bekannter Weise die geraden Linien des Raumes auf die Punkte einer singularitätenfreien M_4^2 eines R_5 ab, so hat man auf dieser M_4^2 vier gerade Linien (den Büscheln entsprechend) und einen Punkt (der Geraden G zugeordnet). Der Tangential-R_4 in diesem Punkte schneidet jede der vier geraden Linien in einem Punkte. Durch die so gewonnenen vier Punkte läuft dann noch ein anderer Tangential-R_4 von M_4^2, und sein Berührungspunkt entspricht der Geraden G'.

3. Jetzt ersetzen wir die M_4^2 durch eine singularitätenfreie M_3^2 eines R_4. Auf dieser nehmen wir *drei* gerade Linien G_1, G_2, G_3 an, und einen Punkt p. Der Tangential-R_3 in p wird von G_1, G_2, G_3 in den Punkten p_1, p_2, p_3 geschnitten. Durch die Punkte p_1, p_2, p_3 *läuft noch ein weiterer* Tangential-R_3 vom Berührungspunkt p'. Dann ist die Beziehung zwischen den Punkten p und p' involutorisch.

4. Der *konforme* dreidimensionale Raum hat den Zusammenhang einer singularitätenfreien M_3^2. Man stellt den "eigentlichen" Punkt mit den rechtwinkligen kartesischen Koordinaten (ξ, η, ζ) durch fünf Koordinaten $x_0 : x_1 : x_2 : x_3 : x_4$ dar:

$$\xi = \frac{x_1}{x_0 + x_4}, \quad \eta = \frac{x_2}{x_0 + x_4}, \quad \zeta = \frac{x_3}{x_0 + x_4}.$$

[1]) Diese Proceedings, Vol. 22, p. 478.

Zwischen den konformen Koordinaten des Punktes besteht dann die Relation

$$x_0^2 - x_1^2 - x_2^2 - x_3^2 - x_4^2 = 0,$$

und diese liefert die $M_3{}^2$, wenn die x als homogene Punktkoordinaten in einem R_4 gedeutet werden. Die Punkte x von $M_3{}^2$, für die $x_0 + x_4 = 0$ ist, liefern die nicht eigentlichen oder *akzessorischen* Punkte des konformen Raumes, die sich nicht durch (ξ, η, ζ)-Koordinaten darstellen lassen.

Den geraden Linien auf $M_3{}^2$ entsprechen dann die *Isotropen* des konformen Raumes, wobei unter einer Isotrope verstanden werden soll eine *Minimalgerade oder eine Tangente* (aber nicht Bisekante) *des imanären Kugelkreises*. Zwei Punkte auf einer Isotropen sollen *zueinander parallel* genannt werden.

5. Danach lässt sich die Konstruktion von § 3 folgendermassen in den konformen Raum übertragen: *Gegeben ist ein Punkt p und drei Isotrope G_1, G_2, G_3. Auf jeder von ihnen liegt ein zu p paralleler Punkt. Diese drei Punkte bestimmen einen Kreis, der p zum Scheitel* (CHASLES) *hat* [1]. *Der andere Scheitel p' dieses Kreises ist dem Punkte p involutorisch zugeordnet.*

6. Um jetzt die Einzelheiten dieser involutorischen Punkttransformation des konformen Raumes verfolgen zu können, haben wir die Isotropentripel G_1, G_2, G_3 gegenüber konformen Transformationen zu klassifizieren. Das gibt fünf Typen solcher Tripel.

a. *Drei Isotrope auf einer speziellen Kugel* (d. i. auf einem Minimalkegel, einer Minimalebene, oder endlich drei Tangenten des imaginären Kugelkreises). Hier artet die Transformation aus; der Punkt p' hat, so lange er überhaupt eindeutig bestimmt ist, nicht ∞^3, sondern nur eine einzige Lage (z. B. Doppelpunkt des Minimalkegels).

b, c. *Drei Isotrope auf einer nicht speziellen Kugel* (d. i. auf einer Kugel im eigentlichen Sinne des Wortes, oder auf einer Euklidischen Ebene).

Hier reduziert sich die Transformation auf die *Inversion* an der Kugel.

d. *Zwei sich schneidende Isotrope sind zu einer dritten windschief* [2].

e. *Drei windschiefe Isotrope, die keiner Kugel angehören.* Es gibt jedesmal nur eine einzige Klasse dieser Isotropentripel, d, i. das Isotropentripel besitzt keine absolute konforme Invariante. Den Fall *e* werden wir nicht mehr zu behandeln nötig haben, weil der Fall *d* bereits eine viel weiter reichende Verallgemeinerung liefert.

---

[1]) Die Scheitel eines Kreises sind also die Punkte, die gleichzeitig zu allen Punkten des Kreises parallel sind.

[2]) Parallele Minimalgerade gelten nur dann als sich schneidende Isotrope, wenn sie die Minimalebene gemeinsam haben.

7. Im Falle d lassen sich drei Isotropen immer durch konforme Transformation in folgende Lagen bringen

$$G_1;\quad \lambda : \mu : i\mu : 0 : -\lambda \qquad G_2;\quad \lambda : \mu : -i\mu : 0 : -\lambda$$
$$G_3;\quad \lambda : 0 : \mu : i\mu : \lambda.$$

Wir haben also einen veränderlichen Punkt der Isotropen durch zwei homogene Parameter $\lambda : \mu$ dargestellt. Die Isotropen G_1 und G_2 schneiden sich im Punkte $1 : 0 : 0 : 0 : -1$. Dieser ist parallel zum Punkte $0 : 0 : 1 : i : 0$ von G_3, so dass man noch eine vierte Isotrope so erhält:

$$G_4;\quad \lambda : 0 : \mu : i\mu : -\lambda$$

Zwei windschiefe Isotropen können immer durch eine einzige nicht spezielle Kugel verbunden werden. So ergeben sich hier die Verbindungskugeln von $G_1 G_3$ und $G_2 G_3$:

$$K_1;\quad -x_1 + x_3 - ix_2 = 0, \qquad K_2;\quad +x_1 + x_3 - ix_2 = 0.$$

Sie berühren sich längs aller Punkte von G_3 und von G_4; der Berührungspunkt ist also der Schnittpunkt (nicht von G_1 und G_2, sondern) von G_3 und G_4.

In dem Kugelbüschel von den Basiskugeln K_1 und K_2 tritt eine einzige spezielle Kugel K_3 auf; als K_4 bezeichnen wir ferner die Kugel, die im Kugelbüschel von K_3 harmonisch durch die Kugeln K_1 und K_2 getrennt wird:

$$K_3;\quad x_3 - ix_2 = 0, \qquad K_4;\quad x_1 = 0.$$

Dann verhalten sich die Punkte der beiden Kugeln K_3 und K_4 singulär gegenüber der Transformation, wie wir sehen werden.

8. Jetzt stellen wir die Transformationsformeln auf. Zum Punkte x sind auf den Isotropen G_1, G_2, G_3 parallel[1]) die Punkte

$$\begin{array}{lllll} x_1 + ix_2 : & x_0 + x_4 : & i(x_0 + x_4) : & 0 & : -(x_1 + ix_2), \\ x_1 - ix_2 : & x_0 + x_4 : & -i(x_0 + x_4) : & 0 & : -(x_1 - ix_2), \\ x_2 + ix_3 : & 0 : & x_0 - x_4 : & i(x_0 - x_4) : & x_2 + ix_3, \end{array}$$

und der dem Punkte x involutorisch zugeordnete Punkte y ist durch die drei Bedingungen

$$\left.\begin{array}{r} x_0 y_1 - x_1 y_0 - (x_1 y_4 - x_4 y_1) = 0, \\ x_0 y_2 - x_2 y_0 - (x_2 y_4 - x_4 y_2) = 0, \\ x_0 y_2 - x_2 y_0 + i(x_0 y_3 - x_3 y_0) + (x_2 y_4 - x_4 y_2) + i(x_3 y_4 - x_4 y_3) = 0 \end{array}\right\} \quad (1)$$

bestimmt, zu denen noch

$$y_0^2 - y_1^2 - y_2^2 - y_3^2 - y_4^2 = 0$$

---

[1]) Die Punkte x und y sind parallel, wenn $x_0 y_0 - x_1 y_1 - x_2 y_2 - x_3 y_3 - x_4 y_4 = 0$.

kommt. Auf diese Weise erhalten wir die Transformationsformeln, die sich wohl am übersichtlichsten so schreiben lassen:

$$\left.\begin{aligned} y_0 + y_4 &= (x_3 - ix_2)^2 . (x_0 + x_4) \\ y_0 - y_4 &= \quad x_1^2 \quad . (x_0 - x_4) \\ y_1 &= (x_3 - ix_2)^2 . \ x_1 \\ y_2 &= (x_3 - ix_2)^2 . \ x_2 \\ y_3 - iy_2 &= \quad x_1^2 \quad . (x_3 - ix_2). \end{aligned}\right\} \quad . \ . \ . \ . \ . \ (2)$$

Danach ist die Transformation von dritter Ordnung, d.i. sie verwandelt eine Kugel im allgemeinen in eine Fläche, die von einer *Isotropen* in drei Punkten geschnitten wird. Eine Isotrope wird in eine Kurve dritter Ordnung übergeführt, wieder im Sinne der konformen Geometrie, d.i. in eine sphärische Kurve (wieder nur im allgemeinen).

9. Für die Punkte der beiden Isotropen G_3 und G_4 wird die Transformation *völlig* unbestimmt, für die sonstigen Punkte der Kugel K_3 insofern singulär, als sie sämtlich auf den Schnittpunkt von G_1 und G_2 geworfen werden. Alle übrigen Punkte der Kugel K_4 bilden sich auf die Punkte von G_3 ab.

Liegt der Punkt x auf keiner der beiden Kugeln K_3 und K_4, so verhält sich die Transformation regulär; Ruhepunkte (Fixpunkte) sind die Punkte der beiden Kugeln K_1 und K_2, natürlich nur diejenigen, die weder auf G_3 noch auf G_4 liegen.

In rechtwinkligen Kartesischen Koordinaten heisst die Transformation so:

$$\xi' = \xi, \qquad \eta' = \eta, \qquad \zeta' = \{\xi^2 + \eta^2 + i\eta\zeta\} : \{- i\eta + \zeta\},$$

wo der transformierte Punkt durch (ξ', η', ζ') bezeichnet ist.

10. Der Gestalt (1) unserer Transformation lässt sich eine neue Seite abgewinnen. Denn die drei Gleichungen (1) sind linear in den Grassmannschen Koordinaten

$$X_{jt} = x_j y_t - x_t y_j\,, \qquad (j,\ t = 0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4)$$

der Verbindungsgeraden im R_4 der beiden Punkte x und y; man kann also schreiben

$$X_{01} - X_{14} = 0, \qquad X_{02} - X_{24} = 0, \qquad X_{12} = 0\,; \quad . \ . \ . \ (3)$$

Die letzte Gleichung ergibt sich am bequemsten aus (2); sie ist eine Folge der fünf zwischen den X_{jt} bestehenden quadratischen Identitäten.

Eine solche lineare Gleichung in den X_{jt} ergibt eine Figur von ∞^5 geraden Linien des R_4, einen *Geradenpentakomplex*[1]); durch einen Punkt des R_4 laufen ∞^2, im Sonderfalle sogar ∞^3, gerade Linien des Komplexes.

[1]) CASTELNUOVO, Richerche di geometria della retta nello spazio a quattro dimensioni. Ven. Ist. Atti **7** (II); HOFFMANN, Die Nullsysteme im vierdimensionalen Raum. Diss. Bonn, 1928.

Drei solcher Geradenpentakomplexe, wie sie in (3) vorliegen, bestimmen ein Bündel, und der Durchschnitt aller Geradenpentakomplexe des Bündels ist ein *Geradentrikomplex*. Durch einen Punkt des R_4 allgemeiner Lage läuft eine einzige Gerade des Trikomplexes. Liegt sie nicht ganz auf M_3^2, so schneidet sie M_3^2 in zwei Punkten, und diese sind involutorisch zugeordnet.

11. Da ein Geradenpentakomplex durch ein Nullsystem (Punkt $\rightarrow$ Nullraum) des vierdimensionalen Raumes bestimmt wird — er besteht aus allen geraden Linien durch einen Punkt in seinem Nullraume — so lässt sich jetzt folgende viel allgemeinere Konstruktion einer involutorischen Punkttransformation des konformen Raumes angeben:

Man nimmt drei linear unabhängige Nullsysteme (Punkt $\rightarrow$ Nullraum) *im R_4 und bringt die ∞^3 gemeinsamen Nullgeraden* (bezw. *einen irreduziblen Bestandteil dieser Figur*) *mit $M_3{}^2$ zum Schnitt.*

Schon gegenüber projektiven Punkttransformationen des R_4 gibt es siebzehn verschiedene Typen solcher Tripel von Nullsystemen, und diese Zahl erhöht sich noch beträchtlich, wenn man gegenüber der Gruppe der automorphen Kollineationen der $M_3{}^2$ klassifiziert.

Diese Erklärung hat den Übelstand, dass sie nicht auf $M_3{}^2$ arbeitet, sondern auch im R_4. Im konformen Raum erscheint das Nullsystem von R_4 als Korrelation Punkt $\rightarrow$ Kugel, und die Geraden des Pentakomplexes, die auf $M_3{}^2$ liegen, finden sich wieder als die (isotropen) Tangenten der Minimalkurven einer Schar auf einer Dupinsche Zyklide, wenigstens im allgemeinen der acht Fälle [1]). Man müsste im konformen Raum also sagen:

Man nimmt drei linear unabhängige Kugelnullsysteme und bringt die drei Nullkugeln eines Punktes x zum Schnitt; der zweite Schnittpunkt y ist dem Punkte x involutorisch zugeordnet.

12. Und jetzt ergibt sicht leicht die Verallgemeinerung des Verfahrens von Herrn J. DE VRIES,

Man nimmt vier linear unabhängige Nullsysteme des R_5, Jedes von ihnen bestimmt einen Heptakomplex von Nullgeraden des R_5, und der Durchschnitt aller dieser vier Heptakomplexe ergibt einen Tetrakomplex von Geraden des R_5. Diesen bringt man mit $M_4{}^2$ zum Schnitt.

Ob es noch andere involutorische Geradentransformationen des dreidimensionalen projektiven Kontinuums gibt, hängt davon ab, ob es im R_5 Geradentetrakomplexe von der Ordnung 1 gibt, die nicht als Schnittfiguren von vier Nullsystemen erhalten werden können.

Bonn, den 30 März 1929.

---

[1]) BOHRES, Ueber zweigliedrige Gruppen konformer Transformationen des Raumes. Diss. Bonn. 1929.