Mathematics. — *Ueber den Komplex der kubischen Raumkurven, welche durch zwei gegebene Punkte gehen, eine gegebene Gerade zweimal und drie gegebene Geraden je einmal treffen.* Von J. W. A. VAN KOL. (Communicated by Prof. HENDRIK DE VRIES).

(Communicated at the meeting of May 25, 1929).

§ 1. Den Komplex der kubischen Raumkurven k^3, welche durch zwei gegebene Punkte A_1 und A_2 gehen, eine gegebene Gerade a zweimal und drei gegebene Geraden a_1, a_2 und a_3 je einmal treffen, bilden wir in folgender Weise auf den Punktraum ab. Es seien a'_1, a'_2 und a'_3 drei beliebige Geraden. Wir beziehen die Punktreihe von a_i projektiv auf den Ebenenbüschel mit der Achse a'_i $(i = 1, 2, 3)$. Als Bild einer Kurve k^3, welche a_1, a_2 und a_3 bzw. in P_1, P_2 und P_3 trifft, betrachten wir den Schnittpunkt der diesen Punkten zugeordneten Ebenen. Diese Abbildung ist offenbar eineindeutig.

§ 2. a'_i sind *singuläre Geraden*. In einem beliebigen Punkt P'_i von a'_i werden die ∞^1 Kurven k^3, welche durch die den Ebenen $P'_i\, a'_k$ und $P'_i\, a'_l$ zugeordneten Punkten von a_k und a_l gehen, abgebildet. Die ∞^2 Kurven k^3, welche auf a'_i abgebildet werden, treffen a_k und a_l in entsprechenden Punkten einer projektiven Verwandtschaft V_i.

Zum Komplex gehören ∞^2 kubische Plankurven, welche in den durch die Gerade $A_1 A_2$ gehenden Ebenen liegen. Die Ebenen durch $A_1 A_2$ erzeugen auf a_1, a_2 und a_3 drei projektive Punktreihen, denen drei projektive Ebenenbüschel mit den Achsen a'_1, a'_2 und a'_3 zugeordnet sind. Das System der ∞^2 kubischen Plankurven wird demnach auf eine kubische Raumkurve $k_1{}^3$, welche a'_i zu Doppelsekanten hat, abgebildet. In einen beliebigen Punkt dieser *singulären Kurve* $k_1{}^3$ wird ein Büschel von kubischen Plankurven abgebildet.

Jeder Kegelschnitt, der a zweimal und a_1, a_2, a_3 und $A_1 A_2$ je einmal trifft, wird durch $A_1 A_2$ zu einer ausgearteten Kurve k^3 ergänzt. Dieses System von ∞^2 Ausartungen wird ebenfalls auf eine kubische Raumkurve $k_2{}^3$, welche a'_i zu Doppelsekanten hat, abgebildet. Das System, das in einen beliebigen Punkt dieser *singulären Kurve* $k_2{}^3$ abgebildet wird, besteht aus $A_1 A_2$ und einem Büschel von Kegelschnitten.

Die Geraden, welche durch A_μ gehen und a_i treffen, werden durch die Kegelschnitte, welche in der Ebene $A_\nu\, a$ liegen, durch A_ν gehen und a_k, a_l und eine solche Gerade treffen, zu ∞^2 ausgearteten Kurven k^3 ergänzt. Dieses System bildet sich ab auf eine *singuläre Gerade* $s_{\mu i}$, welche

a'_k und a'_l trifft. Es gibt offenbar sechs solche *singuläre Geraden*. Das System, das in einen beliebigen Punkt einer solchen singulären Gerade abgebildet wird, besteht aus einer Gerade und einem Büschel von Kegelschnitten.

Die Kegelschnitte, welche in der Ebene $A_\nu a$ liegen, durch A_μ gehen und a_1, a_2 und a_3 treffen, werden durch die Geraden, welche durch A_ν gehen und einen solchen Kegelschnitt treffen, zu ∞^2 ausgearteten Kurven k^3 ergänzt. Dieses System bildet sich ab in einen *Hauptpunkt* H_μ. Der *Hauptpunkt* H_1 ist der Treffpunkt der drei singulären Geraden s_{2i} und der Hauptpunkt H_2 ist der Treffpunkt der drei singulären Geraden s_{1i}, während beide *Hauptpunkte* auf der singulären Kurve $k_2{}^3$ liegen.

Die zwei Transversalen t' und t'' von a, a_1, a_2 und a_3 werden durch die Kegelschnitte, welche durch A_1 und A_2 gehen und a und t' bzw. t'' treffen, zu ∞^2 ausgearteten Kurven k^3 ergänzt. Die Bilder H' und H'' dieser zwei Systeme sind *Hauptpunkte*, welche ebenfalls auf $k_2{}^3$ liegen.

Die durch A_ν gehende Transversale von a_k und a_l wird durch die Kegelschnitte, welche in der Ebene $A_\nu a$ liegen, durch A_ν gehen und a_i und die eben genannte Transversale treffen, zu ∞^2 ausgearteten Kurven k^3 ergänzt, welche sich abbilden in einen Hauptpunkt $H_{\mu i}$. Es gibt *sechs* derartige *Hauptpunkte*, welche aber nicht auf singulären Kurven oder Geraden liegen.

Schieszlich gibt es vier Kegelschnitte, welche durch A_1 und A_2 gehen und a, a_1, a_2 und a_3 treffen. Jeder dieser Kegelschnitte wird durch die Geraden, welche ihn und a treffen, zu ∞^2 ausgearteten Kurven k^3 ergänzt. Wir finden also noch *vier Hauptpunkte* H'_ϱ ($\varrho = 1, \ldots, 4$), welche auf $k_1{}^3$ liegen.

§ 3. Die Transversalen von a'_1, a'_2 und a'_3 bestimmen drei projektive Ebenenbüschel mit den Achsen a'_1, a'_2 und a'_3, denen drei projektive Punktreihen auf a_1, a_2 und a_3 entsprechen. Jede Kurve k^3, welche a_1, a_2 und a_3 in entsprechenden Punkten dieser Punktreihen trifft, hat ∞^1 Bilder nämlich alle Punkte einer Transversale von a'_1, a'_2 und a'_3; jede derartige Kurve k^3 ist also eine singuläre Kurve.

Mit Hilfe des Satzes, dasz die Kurven k^3, welche a_1 in einem gegebenen Punkt P_1 und a_2 in einem gegebenen Punkt P_2 treffen, eine Fläche vierter Ordnung bilden, welche Doppelpunkte in A_2, A_2, P_1 und P_2 hat und auf welcher a eine Doppelgerade und a_3 eine einfache Gerade ist, läszt es sich zeigen, dasz die singulären Kurven unseres Komplexes eine Fläche zwölfter Ordnung bilden, welche sechsfache Punkte in A_1 und A_2 hat und auf welcher a eine sechsfache Gerade und a_1, a_2 und a_3 einfache Geraden sind.

§ 4. Auszer den oben schon erwähnten können wir noch die folgenden Systeme von ausgearteten Kurven k^3 angeben.

Die durch A_μ gehende Transversale von a und a_i wird durch die

Kegelschnitte, welche durch A_ν gehen und a, a_k, a_l und die eben genannte Transversale treffen, zu ∞^2 ausgearteten Kurven k^3 ergänzt. Dieses System bildet sich ab auf eine Ebene $\sigma_{\mu i}$, welche die drei singulären Geraden a'_i, $s_{\nu k}$ und $s_{\nu l}$ und die zwei Hauptpunkte H_ν und $H_{\nu i}$ enthält.

Die Geraden, welche durch A_μ gehen und a treffen, werden durch die Kegelschnitte, welche durch A_ν gehen und eine solche Gerade, a, a_1, a_2 und a_3 treffen, zu ∞^2 ausgearteten Kurven k^3 ergänzt. Dieses System wird auf eine kubische Fläche $O_\mu{}^3$ abgebildet, welche die singulären Geraden a'_i, die singuläre Kurve $k_1{}^3$ und die zehn Hauptpunkte H_ν, H', H'', $H_{\nu i}$ und H'_ρ enthält.

Die Transversalen von a, a_k und a_l werden durch die Kegelschnitte, welche durch A_1 und A_2 gehen und a, a_i und eine solche Transversale treffen, zu ∞^2 ausgearteten Kurven k^3 ergänzt. Dieses System wird auf eine Fläche $O_i{}^2$ zweiter Ordnung abgebildet, welche die vier singulären Geraden a'_k, a'_l, s_{1i} und s_{2i}, die singuläre Kurve $k_2{}^3$ und die zehn Hauptpunkte H_1, H_2, H' und H'' enthält.

Die Kegelschnitte, welche durch A_1 und A_2 gehen und a, a_k und a_l treffen, werden durch die Geraden, welche a, a_i und einen solchen Kegelschnitt treffen, zu ∞^2 ausgearteten Kurven k^3 ergänzt. Dieses System wird auf eine Fläche $O'_i{}^2$ zweiter Ordnung abgebildet, welche die zwei singulären Geraden a'_k und a'_l, die singuläre Kurve $k_1{}^3$ und die sechs Hauptpunkte H_{1i}, H_{2i} und H'_ρ enthält.

§ 5. Es sei k_P die Bildkurve des Systems Σ_1 der ∞^1 Kurven k^3, welche durch einen gegebenen Punkt P gehen. Es gibt vier Kurven von Σ_1, welche durch einen gegebenen Punkt von a_i gehen und somit acht Kurven von Σ_1, welche a_k und a_l in einander in der Projektivität V_i zugeordneten Punkten treffen. Hieraus erhellt, dasz eine durch a'_i gelegte Ebene mit k_P auszer a'_i vier Punkte gemein hat und dasz a'_i mit k_P acht Punkte gemein hat. *k_P ist also eine Kurve zwölfter Ordnung, welche die Geraden a'_i je in acht Punkten trifft.* Ferner läszt es sich zeigen, dasz *k_P die Kurven $k_1{}^3$ und $k_2{}^3$ auszer Hauptpunkten je in einem Punkt trifft und dasz k_P einfache Punkte in H_μ, H', H'' und H'_ρ hat.*

§ 6. Analog beweist man:

Das System der ∞^1 Kurven k^3, welche eine gegebene Doppelsekante b haben, wird abgebildet auf eine Kurve k_b zwölfter Ordnung, welche a'_i in 8 und $S_{\nu i}$ (auszer H_μ) in einem Punkt trifft und einfache Punkte in H_μ hat.

§ 7. Betrachten wir das System Σ_2 der ∞^2 Kurven k^3, welche eine gegebene Gerade l treffen und seine Bildfläche O_l. Es gibt vier Kurven von Σ_2, welche durch einen gegebenen Punkt von a_i und einen gegebenen Punkt von a_k gehen. Hieraus folgt, dasz *a'_i vierfache Geraden auf O_l* sind und dasz eine Transversale von a'_i und a'_k mit O_l auszer a'_i und a'_k vier Punkte gemein hat. O_l ist somit *eine Fläche zwölfter*

Ordnung, auf welcher k_1^3 und k_2^3 einfache Kurven und $s_{\mu i}$ einfache Geraden sind. In § 8 wird es sich zeigen, dasz O_l *dreifache Punkte in H_μ, Doppelpunkte in H', H'' und H'_ρ und einfache Punkte in $H_{\mu i}$ hat.*

k_P und k_b treffen O_l auszer singulären und Hauptpunkten in 28 bzw. 36 Punkten. Hieraus ergibt sich:

Es gibt 28 kubische Raumkurven, welche durch drei gegebene Punkte gehen, eine gegebene Gerade zweimal und vier gegebene Geraden je einmal treffen.

Es gibt 36 kubische Raumkurven, welche durch zwei gegebene Punkte gehen, zwei gegebene Geraden je zweimal und vier gegebene Geraden je einmal treffen.

§ 8. Zwei Flächen O_l und O_m haben auszer a'_i, k_1^3, k_2^3 und $s_{\mu i}$ eine *Kurve k_{lm} 84. Ordnung* gemein, welche offenbar die Bildkurve des Systems der ∞^1 Kurven k^3 ist, welche zwei gegebene Geraden l en m treffen. Aus einer oben abgeleiteten Anzahl folgt, dasz eine durch a'_i gelegte Ebene k_{lm} auszer a'_i in 28 Punkten trifft. *k_{lm} trifft demnach a'_i je in 56 Punkten.*

Die Anzahl der Treffpunkte von k_{lm} und $k^3{}_1$, somit die Anzahl der kubischen Plankurven, welche durch A_1 und A_2 gehen, ihren Doppelpunkt auf a haben und a_1, a_2, a_3, l und m treffen, bestimmen wir in folgender Weise.

Es sei F die Fläche gebildet von den kubischen Plankurven, welche durch A_1 und A_2 gehen, ihren Doppelpunkt auf a haben und a_1, a_2, a_3 und l treffen. Zur Bestimmung der Ordnung von F legen wir eine beliebige Ebene α durch die Gerade $A_1 A_2$. α hat mit F eine kubische Plankurve und die Gerade $A_1 A_2$ gemein. Die Vielfachheit von $A_1 A_2$ auf F ist gleich der Anzahl der kubischen Plankurven, welche durch A_1, A_2 und einen dritten Punkt A_3 von $A_1 A_2$ gehen, ihren Doppelpunkt auf a haben und a_1, a_2, a_3 und l treffen. Es sei F' die Fläche gebildet von den kubischen Plankurven, welche durch A_1, A_2 und A_3 gehen, ihren Doppelpunkt auf a haben und a_1, a_2 und a_3 treffen. α hat mit F' wieder eine kubische Plankurve und die Gerade $A_1 A_2$ gemein. Nun wird die Gerade $A_1 A_2$ zu kubischen Plankurven ergänzt durch die Transversalen t'_i und t''_i von $A_1 A_2$, a, a_k und a_l und die durch den Punkt $a\,t'_i$ oder $a\,t''_i$ gehende Transversale von $A_1 A_2$ und a_i. Die Gerade $A_1 A_2$ ist also eine sechsfache Gerade auf der Fläche F', welche somit von der neunten Ordnung ist. Hieraus erhellt wieder, dasz $A_1 A_2$ eine neunfache Gerade auf F und F also eine Fläche zwölfter Ordnung ist. Demnach haben *k_{lm} und k_1^3 auszer Hauptpunkten zwölf Punkte gemein.*

k_{lm} und k_2^3 haben auszer Hauptpunkten acht Punkte gemein, weil es acht Kegelschnitte gibt, welche sechs gegebene Geraden treffen und deren Ebene durch zwei gegebene Punkte geht[1]).

[1]) Siehe: SCHUBERT, Kalkül der abzählenden Geometrie, S. 95, wo die Kegelschnittzahl $\mu^2\nu^6 = 8$ abgeleitet ist.

Es läszt sich ferner einfach beweisen, dasz k_{lm} $s_{\mu i}$ *auszer* H_μ *je in vier Punkten trifft und fünffache Punkte in* H_μ, *dreifache Punkte in* H', H'' *und* H'_ρ *und einfache Punkte in* $H_{\mu i}$ *hat.*

Aus dem Vorhergehenden folgt, dasz der totale Schnitt von O_l und O_m neunfache Punkte in H_μ, vierfache Punkte in H', H'' und H'_ρ und einfache Punkte in $H_{\mu i}$ hat. Demnach hat O_l dreifache Punkte in H_μ, Doppelpunkte in H', H'' und H'_ρ und einfache Punkte in $H_{\mu i}$.

k_{lm} trifft O_n auszer singulären und Hauptpunkten in 220 Punkten.

Es gibt 220 kubische Raumkurven, welche durch zwei gegebene Punkte gehen, eine gegebene Gerade zweimal und sechs gegebene Geraden je einmal treffen.

§ 9. Es sei O_φ die Bildfläche des Systems Σ_3 der ∞^2 Kurven k^3, welche eine gegebene Ebene φ berühren. Es gibt acht Kurven von Σ_3, welche durch einen gegebenen Punkt von a_i und einen gegebenen Punkt von a_k gehen[1]). *O_φ ist also eine Fläche 24. Ordnung, auf welcher a'_i achtfache Geraden sind.* In jeder Ebene durch A_1 A_2 gibt es vier kubische Plankurven, welche durch A_1 und A_2 gehen, ihren Doppelpunkt auf a haben, a_1, a_2 und a_3 treffen und φ berühren[2]). *k_1^3 ist somit eine vierfache Kurve auf O_φ. Ferner ist k_2^3 eine Doppelkurve und sind $s_{\mu i}$ Doppelgeraden auf O_φ.* In § 10 wird es sich zeigen, dasz *O_φ sechsfache Punkte in H_μ, vierfache Punkte in H', H'' und H'_ρ und Doppelpunkte in $H_{\mu i}$ hat.*

k_p, k_b und k_{lm} treffen O_φ auszer singulären und Hauptpunkten bzw. in 54, 72 und 416 Punkten.

Es gibt 54 kubische Raumkurven, welche durch drei gegebene Punkte gehen, eine gegebene Gerade zweimal und drei gegebene Geraden je einmal treffen und eine gegebene Ebene berühren.

Es gibt 72 kubische Raumkurven, welche durch zwei gegebene Punkte gehen, zwei gegebene Geraden je zweimal und zwei gegebene Geraden je einmal treffen und eine gegebene Ebene berühren.

Es gibt 416 kubische Raumkurven, welche durch zwei gegebene Punkte gehen, eine gegebene Gerade zweimal und fünf gegebene Geraden je einmal treffen und eine gegebene Ebene berühren.

§ 10. Zwei Flächen O_l und O_φ haben auszer a'_i, k_1^3, k_2^3 und $s_{\mu i}$ eine Kurve $k_{l\varphi}$ 162. Ordnung gemein, welche die Bildkurve ist des Systems Σ_4 der Kurven k^3, welche eine gegebene Gerade l treffen und eine gegebene Ebene φ berühren. Aus einer in § 9 berechneten Anzahl folgt, dasz eine durch a_i gelegte Ebene $k_{l\varphi}$ auszer a'_i in 54 Punkten trifft. $k_{l\varphi}$ trifft demnach a'_i je in 108 Punkten.

Die Anzahl der Treffpunkte von $k_{l\varphi}$ und k_1^3 ist gleich der Anzahl der kubischen Plankurven, welche durch A_1 und A_2 gehen, ihren Doppel-

---

[1]) SCHUBERT, Kalkül der abzählenden Geometrie, S. 182.

[2]) SCHUBERT, S. 160.

punkt auf a haben, a_1, a_2, a_3 und l treffen und φ berühren. Zur Bestimmung dieser Anzahl wenden wir eine SCHUBERT'sche Formel an, welche sich in unserm Fall vereinfacht zu:

$$2\,\nu - {}^1/_2\,\varrho - 3\,\mu = b \;\; {}^{1)}.$$

Hierin bedeutet ν die Bedingung, dasz die kubische Plankurve eine gegebene Gerade treffen soll, ϱ die Bedingung dasz sie eine gegebene Ebene berühren soll, μ die Bedingung, dasz ihre Ebene durch einen gegebenen Punkt gehen soll und b die Bedingung, dasz sie einen Doppelpunkt auf einer gegebenen Ebene haben soll. Bezeichnen wir noch mit P die Bedingung, dasz die kubische Plankurve durch einen gegebenen Punkt gehen soll, so ist:

$$2\,.\,P^2\,b^2\,\nu^5 - {}^1/_2\,.\,P^2\,b^2\,\nu^4\,\varrho - 3\,.\,P^2\,b^2\,\mu\,\nu^4 = P^2\,b^3\,\nu^4.$$

In § 8 haben wir gefunden: $P^2\,b^2\,\nu^5 = 12$, während $P^2\,b^2\,\mu\,\nu^4 = P^2\,b^3\,\nu^4 = 1$. Es ergibt sich: $P^2\,b^2\,\nu^4\,\varrho = 40$ [2]). k_{l_γ} und $k_1{}^3$ *haben also auszer Hauptpunkte 40 Punkte gemein.*

$k_2{}^3$ trifft k_{l_γ} auszer Hauptpunkten in einem Doppelpunkt, welcher das Bild ist der doppelt gerechneten Kurve k^3 von Σ^4 gebildet von der Gerade $A_1\,A_2$ und dem Kegelschnitt, der durch den Punkt $(A_1\,A_2)\,\varphi$ geht und a zweimal und a_1, a_2, a_3 und l je einmal trifft, und in *vierzehn einfachen Punkten,* welche die Bilder sind der Kurven k^3 von Σ_4 gebildet von der Gerade $A_1\,A_2$ und den vierzehn Kegelschnitten, welche a zweimal und a_1, a_2, a_3, l und $A_1\,A_2$ je einmal treffen und φ berühren.

Es läszt sich ferner beweisen, dasz *die Geraden $s_{\mu i}$ je k_{l_γ} in zwei Doppelpunkten und vier einfachen Punkten treffen und dasz k_{l_γ} zehnfache Punkte in H_μ, sechsfache Punkte in H' und H'', Doppelpunkte in $H_{\mu i}$ und vierfache Punkte in H'_ρ hat.*

Aus dem Vorhergehenden folgt wieder. dasz der totale Schnitt von O_l und O_γ 18-fache Punkte in H_μ, 8-fache Punkte in H', H'' und H'_ρ und Doppelpunkte in $H_{\mu i}$ hat. O_γ hat also sechsfache Punkte in H_μ, vierfache Punkte in H', H'' und H'_ρ und Doppelpunkte in $H_{\mu i}$.

k_{l_γ} trifft O_γ auszer singulären und Hauptpunkten in 752 Punkten.

Es gibt 752 kubische Raumkurven, welche durch zwei gegebene Punkte gehen, eine gegebene Gerade zweimal und vier gegebene Geraden je einmal treffen und zwei gegebene Ebenen berühren.

§ 11. Analog beweist man:

Das System der ∞^1 Kurven k^3, welche zwei gegebene Ebenen φ und

---

[1]) SCHUBERT, S. 152.

[2]) Diese Anzahl läszt sich auch auf derselben Weise wie $P^2 b^2 \nu^5$ bestimmen (§ 8). Herrn Dr. G. SCHAAKE verdanke ich die folgende Bemerkung. Die Fläche F hat mit der Ebene φ eine Kurve k^{12} zwölfter Ordnung gemein. welche einen neunfachen Punkt in $(A_1 A_2)\,\varphi$ und einen Doppelpunkt in $a\,\varphi$ hat. Durch den Punkt $(A_1 A_2)\,\varrho$ gehen $12\,.\,11 - 10\,.\,9 - 2 = 40$ Tangenten, welche k^{12} auszer diesem Punkt berühren. Hieraus folgt unmittelbar $P^2 B^2\,\nu^4\,\varrho = 40$.

[3]) SCHUBERT, S. 95

ψ berühren, wird abgebildet auf eine Kurve $k_{\varphi\psi}$ 300. Ordnung, welche von a'_i in 200 Punkten, von k_1^3 in 128 Punkten, von k_2^3 in 24 einfachen und vier Doppelpunkten und von $s_{\mu i}$ in 8 einfachen und vier Doppelpunkten getroffen wird und 20-fache Punkte in H_μ, 12-fache Punkte in H' und H'' und vierfache Punkte in $H_{\mu i}$ hat, aber nicht durch H'_ϱ geht.

Das $k_{\varphi\psi}$ und a'_i 200 Treffpunkte haben, folgt jetzt nicht aus einer oben abgeleiteten Anzahl. Man kann aber leicht beweisen, dasz die Anzahl der Treffpunkte von $k_{\varphi\psi}$ und a'_i gleich zwei drittel der Ordnung von $k_{\varphi\psi}$ ist [1]).

$k_{\varphi\psi}$ trifft O_χ auszer singulären und Hauptpunkten in 1248 Punkten.

Es gibt 1248 kubische Raumkurven, welche durch zwei gegebene Punkte gehen, eine gegebene Gerade zweimal und drei gegebene Geraden je einmal treffen und drei gegebene Ebenen berühren.

Eine durch a'_i gelegte Ebene trifft $k_{\varphi\psi}$ auszer a'_i in 100 Punkten.

Es gibt 100 kubische Raumkurven, welche durch drei gegebene Punkte gehen, eine gegebene Gerade zweimal und zwei gegebene Geraden je einmal treffen und zwei gegebene Ebenen berühren.

§ 12. Die folgende Tabelle enthält die Anzahlen, welche oben berechnet sind oder sich mit Hilfe der Abbildungen von einigen anderen Systemen von Kurven k^3 berechnen lassen.

$P^3 B\nu^4 = 28$	$P^2 B^4 = 1$	$P^2 B^3 \nu^2 = 6$	$P^2 B^2 \nu^4 = 36$
$P^3 B\nu^3 \varrho = 54$		$P^2 B^3 \nu\varrho = 12$	$P^2 B^2 \nu^3\varrho = 72$
$P^3 B\nu^2 \varrho^2 = 100$			$P^2 B^2 \nu^2 \varrho^2 = 144$
$P^2 B \nu^6 = 220$			
$P^2 B \nu^5\varrho = 416$			
$P^2 B \nu^4\varrho^2 = 752$			
$P^2 B \nu^3\varrho^3 = 1248$			

Hierin bedeutet P die Bedingung, dasz die kubische Raumkurve durch einen gegebenen Punkt gehen soll, B die Bedingung dasz sie eine gegebene Doppelsekante haben soll, ν die Bedingung dasz sie eine gegebene Gerade treffen soll und ϱ die Bedingung dasz sie eine gegebene Ebene berühren soll.

§ 13. Schlieszlich geben wir einige Eigenschaften von Flächen gebildet von Systemen von ∞^1 Kurven k^3 [2]).

Die Kurven k^3, welche durch einen gegebenen Punkt P gehen, bilden eine Fläche F_P 28. Ordnung, welche 14-fache Punkte in A_1, A_2 und P hat und auf welcher a eine 13-fache Gerade und a_i 4-fache Geraden sind.

Die Kurven k^3, welche zwei gegebene Geraden l und m treffen, bilden eine Fläche F_{lm} 220. Ordnung, welche 108-fache Punkte in A_1 und A_2

[1]) Eine derartige Bemerkung gilt auch für die Kurven k_{lm} und $k_{l\varphi}$.

[2]) Siehe auch diese Proceedings, **30**, S. 1015—1016.

hat und auf welcher a eine 92-fache Gerade und a_i, l und m 28-fache Geraden sind.

Die Kurven k^3, welche eine gegebene Gerade l treffen und eine gegebene Ebene φ berühren, bilden eine Fläche $F_{l\varphi}$ 416. Ordnung, welche 196-fache Punkte in A_1 und A_2 hat und auf welcher a eine 180-fache Gerade und a_i und l 54-fache Geraden sind. Weil eine durch l gelegte Ebene φ mit F_{lm} auszer l eine Kurve 192. Ordnung gemein hat und es 36 Kurven k^3 gibt, welche l zweimal und m einmal treffen, ist die Berührungskurve von $F_{l\varphi}$ mit φ von der Ordnung $192 - 2 \,.\, 36 = 120$.

Die Kurven k^3, welche zwei gegebene Ebenen φ und ψ berühren, bilden eine Fläche $F_{\varphi\psi}$ 752. Ordnung, welche 328-fache Punkte in A_1 und A_2 hat und auf welcher a eine 344-fache Gerade und a_i 100-fache Geraden sind. Weil eine durch l gelegte Ebene mit $F_{l\varphi}$ auszer l eine Kurve 362. Ordnung gemein hat und es 72 Kurven k^3 gibt. welche l zweimal treffen und φ berühren. sind die Berührungskurven von $F_{\varphi\psi}$ mit φ und ψ von der Ordnung $372 - 2 \,.\, 72 = 218$.

Wir bemerken noch, dasz die Vielfachheiten von A_1, A_2 und a sich berechnen lassen vermittelst der Abbildungen der Systeme der Kurven k^3, welche eine durch A_α gelegte Gerade noch auszer A treffen oder eine Gerade, welche a trifft, noch auszer diesem Treffpunkt treffen. Aus oben angegebenen Eigenschaften der Bildkurven k_P, k_{lm}, $k_{l\varphi}$ und $k_{\varphi\psi}$ lassen sich viele Eigenschaften folgern, welche sich beziehen auf die ausgearteten Kurven k^3, welche auf den Flächen F_P, F_{lm}, $F_{l\varphi}$ und $F_{\varphi\psi}$ liegen.