Mathematics. — *Zwei Kongruenzen von biquadratischen Raumkurven zweiter Art.* Von J. W. A. VAN KOL. (Communicated by Prof. HENDRIK DE VRIES.)

(Communicated at the meeting of September 28, 1929).

§ 1. Zuerst untersuchen wir die Kongruenz der biquadratischen Raumkurven zweiter Art k^4, welche durch sechs gegebene Punkte $A, A_1, \ldots, A_5$ gehen und eine durch A gehende Gerade t auszer A noch zweimal treffen. Wir gelangen zu einer Abbildung dieser Kongruenz auf einen Punktfeld, wenn wir als Bild einer Kurve k^4 den Punkt K betrachten, den sie auszer t mit einer durch t gelegten Ebene α gemein hat. Diese Abbildung ist offenbar eineindeutig. Durch einen beliebigen Punkt K von α geht eine Fläche zweiter Ordnung, welche überdies $A_1, \ldots, A_5$ und t enthält und auf dieser Fläche gibt es eine Kurve k^4, welche durch K geht und t dreimal trifft.

§ 2. *A ist ein singulärer Punkt; in A bildet sich ab das System der ∞^1 Kurven k^4, welche α in A berühren; dieses System liegt auf der Fläche zweiter Ordnung, welche $A_1, \ldots, A_5$ und t enthält und α in A berührt.*

Die kubische Raumkurve k^3, welche durch $A_1, \ldots, A_5$ geht und t zweimal trifft, hat mit α auszer t einen Punkt S gemein. *Auch S ist ein singulärer Punkt; in S bildet sich ab das System der ∞^1 ausgearteten Kurven k^4, welche bestehen aus k^3 und den Geraden, welche k^3 aus A projizieren.*

§ 3. Auszer dem oben schon erwähnten System enthält unsere Kongruenz noch fünf Systeme von ∞^1 ausgearteten Kurven k^4. Die Gerade AA_i $(i = 1, \ldots, 5)$ wird nämlich durch die kubischen Raumkurven, welche durch A_k, A_l, A_m und A_n gehen, t zweimal und AA_i einmal treffen und also auf der Fläche zweiter Ordnung liegen, welche durch A_k, A_l, A_m und A_n geht und die Geraden t und AA_i enthält, zu ∞^1 ausgearteten Kurven k^4 ergänzt. Dieses System wird abgebildet auf die Gerade, welche die eben genannte Fläche zweiter Ordnung mit α auszer t gemein hat.

§ 4. Es sei k_l die Bildkurve des Systems Σ_1 der ∞^1 Kurven k^4, welche eine gegebene Gerade l treffen. Auf jeder Fläche zweiter Ordnung, welche $A_1, \ldots, A_5$ und t enthält, gibt es zwei Kurven von Σ_1, welche l treffen, und die Kurve k^3 wird durch die drei Geraden, welche durch A gehen und k^3 und l treffen, zu drei ausgearteten Kurven von Σ_1 ergänzt.

Hieraus folgt, dasz k_l *eine Kurve fünfter Ordnung ist, welche in A einen Doppelpunkt und in S einen dreifachen Punkt hat.*

Analog beweist man:

Das System der Kurven k^4, welche eine Gerade durch A_i noch einmal treffen, wird abgebildet auf eine Kurve k_{li} dritter Ordnung, welche in S einen Doppelpunkt hat und durch A geht.

Das System der Kurven k^4, welche eine Gerade durch A noch einmal treffen, wird abgebildet auf eine durch A gehende Gerade g.

Das System der Kurven k^4, welche durch einen zweiten gegebenen Punkt B von t gehen, wird abgebildet auf eine Kurve k_B dritter Ordnung, welche in S einen Doppelpunkt hat und durch A geht.

Eine Kurve k_l trifft eine Kurve k_m, eine Kurve k_{mi}, eine Gerade g und eine Kurve k_B bzw. in 12, 7, 3 und 7 nicht singulären Punkten. Hieraus ergibt sich:

Es gibt zwölf Kurven k^4, welche zwei gegebene Geraden treffen.

Es gibt sieben Kurven k^4, welche eine gegebene Gerade treffen und durch einen zweiten gegebenen Punkt von t gehen.

Die Kurven k^4, welche eine gegebene Gerade l treffen, bilden eine Fläche O_l zwölfter Ordnung, welche in den Punkten A_i fünffache Punkte und in A einen neunfachen Punkt hat; t ist eine siebenfache und l eine einfache Gerade von O_l. Weiter läszt es sich zeigen, *dasz die Geraden AA_i Doppelgeraden sind und dasz k^3 eine dreifache Kurve ist.*

Die Kurven k^4, welche durch einen zweiten gegebenen Punkt B von t gehen, bilden eine Fläche siebenter Ordnung, welche in A_i dreifache Punkte und in A und B fünffache Punkte hat [1]).

§ 5. Es sei k_γ die Bildkurve des Systems Σ_2 der ∞^1 Kurven k^4, welche eine gegebene Ebene φ berühren. Auf einer Fläche zweiter Ordnung, welche $A_1, \ldots, A_5$ und t enthält, gibt es ∞^1 Kurven k^4, welche auf dem Kegelschnitt, den diese Fläche mit φ gemein hat, eine biquadratische Involution bestimmen. Auf dieser Fläche gibt es also sechs Kurven von Σ_2. Die Kurve k^3 wird durch die drei Geraden, welche durch A und die Treffpunkte von k^3 und φ gehen, zu drei ausgearteten Kurven von Σ_2 ergänzt, welche je doppelt zu rechnen sind. Aus dem Vorhergehenden folgt, dasz k_γ *eine Kurve zwölfter Ordnung ist mit sechsfachen Punkten in A und S.*

Eine Kurve k_γ trifft eine Kurve k_l, eine Kurve k_{li}, eine Gerade g, eine Kurve k_B und eine Kurve k_γ bzw. in 30, 18, 6, 18 und 72 nicht singulären Punkten. Hieraus ergibt sich:

Es gibt 30 Kurven k^4, welche eine gegebene Gerade treffen und eine gegebene Ebene berühren.

Es gibt 18 Kurven k^4, welche durch einen zweiten gegebenen Punkt von t gehen und eine gegebene Ebene berühren.

---

[1]) Dr. G. SCHAAKE hat diese Fläche untersucht. Siehe diese Proceedings, **32**, S. 110.

Es gibt 72 Kurven k^4, welche zwei gegebene Ebenen berühren.

Die Kurven k^4, welche eine gegebene Ebene φ berühren, bilden eine Fläche O_φ 30. Ordnung, welche in den Punkten A_i zwölffache Punkte und in A einen 24-fachen Punkt hat; t ist eine 18-fache Gerade, $A\,A_i$ sind sechsfache Geraden und k^3 ist eine sechsfache Kurve von O_φ. Weil eine durch l gelegte Ebene mit O_l auszer l eine Kurve elfter Ordnung gemein hat und es zwei Kurven k^4 gibt, welche l zweimal treffen (siehe § 6), *ist die Berührungskurve von O_φ mit φ von der Ordnung $11 - 2 \,.\, 2 = 7$.*

§ 6. Die oben untersuchte Kongruenz ist von der *ersten Ordnung* und von der *zweiten Klasse*. In § 1 hat es sich gezeigt, dasz durch einen beliebigen Punkt K eine Kurve k^4 geht. Weiter gibt es zwei Kurven k^4, welche eine beliebige Gerade l zweimal treffen. Denn die biquadratischen Raumkurven zweiter Art, welche durch $A_1, \ldots, A_5$ gehen und l zweimal und t dreimal treffen, liegen auf der kubischen Regelfläche, welche durch $A_1, \ldots, A_5$ geht und auf welcher l eine einfache und t eine Doppelgerade ist; durch einen Punkt A dieser Doppelgerade gehen offenbar zwei Kurven k^4. Diese Eigenschaft können wir auch in folgender Weise beweisen. Die Kurven k^4 von Σ_1 entsprechen den Punkten von l eineindeutig. Das System Σ_1 und auch die Bildkurve k_l ist also vom Geschlecht null. k_l hat somit auszer S und A noch $6 - 3 - 1 = 2$ Doppelpunkte; d.h. es gibt zwei Kurven von Σ_1, welche l zweimal treffen.

§ 7. Betrachten wir *die Fläche F_1 gebildet von den biquadratischen Raumkurven zweiter Art, welche durch fünf gegebene Punkte $A_1, \ldots, A_5$ gehen, zwei gegebene Geraden a_1 und a_2 treffen und eine gegebene Trisekante t haben.* Aus einer in § 4 abgeleiteten Anzahl folgt, dasz *t eine zwölffache Gerade von F_1 ist,* während *a_1 und a_2 Doppelgeraden* sind. Es sei F^2 eine Fläche zweiter Ordnung, welche durch $A_1, \ldots, A_5$ geht und t enthält. Der Durchschnitt von F^2 und F_1 besteht aus der zwölffachen Gerade t, aus den vier auf F^2 liegenden biquadratischen Raumkurven zweiter Art, welche durch $A_1, \ldots, A_5$ gehen, a_1 und a_2 je einmal und t dreimal treffen und aus der auf F^2 liegenden kubischen Raumkurve, welche durch $A_1, \ldots, A_5$ geht und t zweimal trifft. Diese kubische Raumkurve ist viermal zu rechnen, weil sie durch die vier Geraden, welche sie und die Geraden a_1, a_2 und t (auszer den Schnittpunkten von t und der genannten kubischen Raumkurve) zu vier biquadratischen Raumkurven von F_1 ergänzt wird. Der Durchschnitt von F^2 und F_1 ist also von der vierzigsten Ordnung. *F_1 ist somit eine Fläche 20. Ordnung, welche achtfache Punkte in $A_1, \ldots, A_5$ hat.*

Analog beweist man:

Die biquadratischen Raumkurven zweiter Art, welche durch fünf gegebene Punkte $A_1, \ldots, A_5$ gehen, eine gegebene Gerade a treffen, eine gegebene Trisekante t haben und eine gegebene Ebene φ berühren, *bilden eine Fläche F_2 48. Ordnung, welche 18-fache Punkte in $A_1, \ldots, A_5$ hat. a ist eine sechsfache und t eine 30-fache Gerade von F_2.*

Weil eine durch a_1 gelegte Ebene mit F_1 auszer a_1 eine Kurve 18. Ordnung gemein hat und es drei biquadratische Raumkurven von F_1 gibt, welche a_1 zweimal treffen (siehe § 6), ist *die Berührungskurve von F_2 mit der Ebene φ von der Ordnung* $18 - 2 \cdot 3 = 12$.

§ 8. Wir untersuchen noch die Kongruenz der biquadratischen Raumkurven zweiter Art k^4, welche durch vier gegebene Punkte $A_1, \ldots, A_4$ gehen, eine gegebene Gerade a treffen, eine gegebene Doppelsekante b und eine gegebene Trisekante t haben. Wir gelangen in folgender Weise zu einer einzweideutigen Abbildung dieser Kongruenz auf einen Punktfeld α. In α nehmen wir zwei Punkte P und Q an. Die Strahlenbüschel (P, α) und (Q, α) seien projektiv bezogen auf die Punktreihen von a bzw. b. Es seien p, q_1 und q_2 die Strahlen von (P, α) bzw. (Q, α), welche den Punkten A, B_1 und B_2 entsprechen, in denen eine Kurve k^4 a bzw. b trifft. Die Punkte $p\,q_1$ und $p\,q_2$ betrachten wir als Bilder von k^4. In einen beliebigen Punkt von α bildet sich *eine* Kurve k^4 ab.

§ 9. *Der singuläre Punkt P ist das Bild der ∞^1 Kurven k^4, welche durch den dem Strahle PQ zugeordneten Punkt L von b gehen und eine Fläche λ^{12} zwölfter Ordnung bilden, welche fünffache Punkte in $A_1, \ldots, A_4$ und L hat und auf welcher a eine einfache, b eine Doppel- und t eine siebenfache Gerade ist.* Diese Eigenschaften von λ^{12} lassen sich in derselben Weise zeigen wie die in § 7 genannten Eigenschaften von F_1.

Der singuläre Punkt Q ist das Bild der ∞^1 Kurven k^4, welche durch den dem Strahle PQ zugeordneten Punkt K von a gehen und die kubische Regelflache $\varkappa^3$ bilden, welche durch $A_1, \ldots, A_4$ und K geht und auf welcher b eine einfache und t eine Doppelgerade ist.

Die Gerade PQ ist die Bildgerade der singulären Kurve k^4, welche durch K und L geht.

Es gibt vier kubische Raumkurven k_i^3 $(i = 1, \ldots, 4)$, welche durch $A_1, \ldots, A_4$ gehen, und a und b je einmal und t zweimal treffen. k_i^3 wird durch die Geraden, welche b, t und k_i^3 treffen, zu ∞^1 ausgearteten Kurven k^4 ergänzt. Jede Kurve dieses Systems hat einen Bildpunkt im Schnittpunkt S_i der Strahlen von (P, α) und (Q, α), welche den Punkten $a\,k^3$ und $b\,k_i^3$ entsprechen.

Die vier Punkte S_i sind singuläre Punkte. Die Kurven k^4, welche sich in S_i abbilden, bestehen aus k_i^3 und den Erzeugenden der kubischen Regelfläche, von welcher b und t zwei Leitgeraden sind und k^3 eine Leitkurve ist.

Der Kegelschnitt k_i^2, der durch A_k, A_l und A_m geht und b und t trifft, wird durch die Kegelschnitte, die durch A_i gehen, in der Ebene $A_i\,t$ liegen und a, b und k_i^2 (auszer dem Punkt $k_i^2\,t$) treffen, zu ∞^1 ausgearteten Kurven k^4 ergänzt, welche sich abbilden in zwei singuläre Punkte S_{i1} und S_{i2}.

Es gibt noch acht singuläre Punkte S_{ik} $(i=1, \ldots, 4;\ k=1, 2)$. S_{i1} *und* S_{i2} *sind die Bilder von* ∞^1 *Kurven* k^4, *welche bestehen aus* k_i^2 *und einem in der Ebene* $A_i t$ *liegenden Kegelschnittebüschel.*

§ 10. Auszer den oben schon erwähnten können wir noch die folgenden Systeme von ∞^1 ausgearteten Kurven k^4 angeben.

Die durch A_i gehende Transversale von a und t wird durch die kubischen Raumkurven, welche durch A_k, A_l und A_m gehen, die Transversale (auszer ihrer Treffpunkt mit t) treffen, b und t zweimal treffen und auf der Fläche zweiter Ordnung liegen, welche durch A_k, A_l und A_m geht und b und t enthält, zu ∞^1 ausgearteten Kurven k^4 ergänzt. Es gibt vier derartige Systeme, welche sich abbilden auf vier Strahlen von (P, a).

Die durch A_i gehende Transversale von b und t wird durch die kubischen Raumkurven, welche durch A_k, A_l und A_m gehen, die Transversale und a und b einmal und t zweimal treffen, zu ∞^1 ausgearteten Kurven k^4 ergänzt. Die vier derartigen Systeme bilden sich ab auf vier Strahlen von (Q, a) und auf vier kubische Kurven, welche je durch Q, $S_1, \ldots, S_4$ gehen und in P einen Doppelpunkt haben. Es läszt sich zeigen, dasz die kubischen Raumkurven, welche durch A_k, A_l und A_m gehen, t zweimal treffen, und a, b und die durch A gehende Transversale von b und t einmal treffen, eine Fläche elfter Ordnung bilden, welche fünffache Punkte in A_k, A_l und A_m hat und auf welcher a eine einfache, b eine Doppel-, die genannte Transversale eine vierfache und t eine sechsfache Gerade ist.

Auf der Fläche zweiter Ordnung, welche durch A_k, A_l und A_m geht und b und t enthält, liegen zwei Systeme von ∞^1 kubischen Raumkurven, welche durch A_k, A_l und A_m gehen, a einmal und b und t zweimal treffen, und durch die Geraden, welche durch A_i gehen und diese Kurven und t in verschiedenen Punkten treffen, zu zwei Systemen von ∞^1 ausgearteten Kurven k^4 ergänzt werden und je auf einen Strahl von (P, a) abgebildet werden. Es gibt offenbar acht derartige Systeme.

Es gibt ∞^1 kubische Raumkurven, welche durch $A_1, \ldots, A_4$ gehen, b einmal und t zweimal treffen und eine biquadratische Fläche bilden, welche Doppelpunkte in $A_1, \ldots, A_4$ hat und auf welcher b eine einfache und t eine Doppelgerade ist. Jede derartige kubische Kurve wird durch drei Transversalen von a, b und t zu ausgearteten Kurven k^4 ergänzt. In dieser Weise erhalten wir ein System von ausgearteten Kurven k^4, das abgebildet wird auf einen Kegelschnitt, der durch P und Q geht, und auf eine biquadratische Kurve, welche durch $S_1, \ldots, S_4$ und Q geht und in P einen dreifachen Punkt hat; überdies geht der Kegelschnitt durch vier Punkte S_{ik} und die biquadratische Kurve durch die anderen vier.

§ 11. Es sei k_l die Bildkurve des Systems Σ_3 der ∞^1 Kurven k^4, welche eine gegebene Gerade l treffen. Durch einen Punkt von a gehen drei und durch einen Punkt von b zwölf Kurven von Σ_3 (siehe § 9). *k_l ist also eine Kurve 18. Ordnung, welche in P einen zwölffachen und in Q einen sechsfachen Punkt hat. Weiter hat k_l einfache Punkte in S_{ik} und dreifache Punkte in S_i.*

Das System der ∞^1 Kurven k^4, welche eine Gerade l durch A_1 noch einmal treffen, wird abgebildet auf eine Kurve k'_l elfter Ordnung, welche einen siebenfachen Punkt in P, einen vierfachen Punkt in Q, einfache Punkte in $S_{ik} (i \neq 1)$ und Doppelpunkte in S_i hat.

Das System der ∞^1 Kurven k^4, welche durch einen gegebenen Punkt T von t gehen, wird abgebildet auf eine Kurve k_T elfter Ordnung, welche einen siebenfachen Punkt in P, einen vierfachen Punkt in Q, einfache Punkte in S_{ik} und Doppelpunkte in S_i hat.

Eine Kurve k_l schneidet eine Kurve k_m, eine Kurve k'_m und eine Kurve k_T bzw. in 100, 60 und 58 nicht singulären Punkten.

Hieraus ergibt sich:

Es gibt 50 Kurven k^4, welche zwei gegebene Geraden l und m treffen.

Die Kurven k^4, welche eine gegebene Gerade l treffen, bilden eine Fläche F_l 50. Ordnung, welche 20-fache Punkte in $A_1, \ldots, A_4$ hat und auf welcher t eine 29-fache Gerade ist. Weiter läszt es sich zeigen, dasz a und l dreifache Geraden sind und dasz b eine zwölffache Gerade von F_l ist.

§ 12. Es sei Σ_4 das System der ∞^1 Kurven k^4, welche a zweimal treffen. Jede Kurve von Σ_4 hat vier Bilder. Durch einen Punkt von a oder b gehen zwei Kurven von Σ_4. *Die Bildkurve k_a von Σ_4 ist also von der achten Ordnung und hat vierfache Punkte in P und Q. k_a hat Doppelpunkte in S_i, aber geht nicht durch S_{ik}.*

Die Kurve k_a trifft eine Kurve k, eine Kurve k'_l und eine Kurve k_T bzw. in 48, 28 und 28 nicht singulären Punkten. Hieraus folgt:

Es gibt 12 Kurven k^4, welche a zweimal und eine gegebene Gerade l einmal treffen.

Die Kurven k^4, welche a zweimal treffen, bilden eine Fläche F_a 12. Ordnung, welche fünffache Punkte in $A_1 \ldots A_4$ hat und auf welcher t eine siebenfache Gerade ist und a und b Doppelgeraden sind.

§ 13. Untersuchen wir noch die Abbildung des Systems Σ_5 der Kurven k^4, welche eine gegebene Ebene φ berühren. Durch einen Punkt von b gehen dreiszig Kurven von Σ_5 (siehe § 7). Die ∞^1 Kurven k^4, welche die kubische Regelfläche $\varkappa^3$ bilden, schneiden auf der nodalen kubischen Kurve, welche $\varkappa^3$ mit φ gemein hat, eine biquadratische Involution ein. Es gibt also auf $\varkappa^3$ sechs Kurven von Σ_5. *Die Bildkurve k_φ von Σ_5 ist somit von der Ordnung 42 und hat einen 30-fachen Punkt in P und einen 12-fachen Punkt in Q. Weiter hat k_φ Doppelpunkte in S_{ik} und sechsfache Punkte in S_i.*

Eine Kurve k_φ trifft eine Kurve k_l, eine Kurve k'_l, eine Kurve k_T, die Kurve k_a und eine Kurve k_ψ bzw. in 236, 144, 140, 120 und 544 nicht singulären Punkten. Hieraus ergibt sich:

Es gibt 118 Kurven k^4, welche eine gegebene Gerade l treffen und eine gegebene Ebene φ berühren.

Die Kurven k^4, welche eine gegebene Ebene φ berühren, bilden eine Fläche F_φ 118. Ordnung, welche 46-fache Punkte in $A_1, \ldots, A_4$ hat und auf welcher t eine 70-fache Gerade ist. Weiter ist a eine sechsfache und b eine dreiszigfache Gerade auf F_φ. Weil eine durch l gelegte Ebene mit F_l auszer l eine Kurve 47. Ordnung gemein hat und es zwölf Kurven k^4 gibt, welche l zweimal treffen, ist *die Berührungskurve von F_φ mit φ von der Ordnung $47 - 2.12 = 23$.*

Es gibt 30 Kurven k^4, welche a zweimal treffen und eine gegebene Ebene φ berühren.

Es gibt 272 Kurven k^4, welche zwei gegebene Ebenen φ und ψ berühren.

§ 14. Wir bemerken noch dasz die oben untersuchte Kongruenz von der *dritten Ordnung* und von der *zwölften Klasse* ist. Dies geht hervor aus oben abgeleiteten Eigenschaften.