Mathematics. — *Gewisse Kongruenzen von rationalen Raumkurven.* Von Prof. JAN DE VRIES.

(Communicated at the meeting of November 30, 1929)

1. Vorgegeben seien die Punkte A, B und C_k ($k = 1, 2, \ldots, 2n-1$). Die Kegelflächen n^{en} Grades, α^n, durch die Geraden $a_k \equiv AC_k$, welche in AB eine $(n-1)$ fache Erzeugende haben, bilden einen Büschel, (α^n). Analog gibt es einen Büschel (β^n), mit $(n-1)$ facher Erzeugenden BA und einfachen Erzeugenden $b_k \equiv BC_k$. Eine Fläche α^n hat mit einer Fläche β^n, ausser $c\,(AB)$, eine rationale Raumkurve ϱ^{2n-1} gemein, welche die Punkte C_k enthält und $(n-1)$ fache Punkte in A und B besitzt. Eine Ebene durch A schneidet nämlich α^n in n Stralen und β^n in einer Kurve n^{en} Grades, mit $(n-1)$ fachem Punkt A; daher trifft die betreffende ϱ^{2n-1} diese Ebene ausserhalb A in n Punkten.

Die von den Kurven ϱ^{2n-1} gebildete *Kongruenz* soll nun untersucht werden. [1])

2. Der Büschel (α^n) enthält $(2n-1)$ *zusammengesetzte* Flächen, welche aus einer Ebene $\gamma_k \equiv ca_k$ und einem Kegel α_k^{n-1}, mit $(n-2)$ facher Erzeugenden c, bestehen. Der Schnitt einer solchen Fläche mit der analogen aus der Ebene $\gamma_k \equiv cb_k$ und dem Kegel β_k^{n-1} bestehenden Fläche liefert das System von *ausgearteten Kurven*, welche zusammengesetzt sind aus einer festen Kurve ϱ_k^{2n-3} und einem *Kegelschnitt* ϱ_k^2 durch A, B, C_k und dem Schnittpunkt von ϱ_k^{2n-3} mit der Ebene $a_k\, b_k \equiv \gamma_k$.

Wenn zwei Flächen α^n und β^n sich in c berühren, *artet* ϱ^{2n-1} *aus* in c und eine Kurve ϱ^{2n-2} durch A, B und C_k. Der Ort dieser Figuren ist das Erzeugniss einer Verwandtschaft $(n-1,\ n-1)$ zwischen (α^n) und (β^n); weil die $(2n-1)$ Ebenen γ_k ausscheiden, ergibt sich eine Fläche Γ der Ordnung $(2n^2-4n+1)$.

3. Eine Kurve ϱ^{2n-1} trifft die feste, durch c gelegte, Ebene ε, ausserhalb c, in einem Punkt E, der als *Bild* jener Kurve soll betrachtet werden.

Die Spur S_k der Kurve ϱ_k^{2n-3} ist *singulärer Bildpunkt* und vertritt alle aus ϱ_k^{2n-3} und einem Kegelschnitt ϱ_k^2 gebildeten Kongruenzkurven.

Der Kegel α_0^n, welcher die Bildebene ε berührt, enthält die Kurven ϱ^{2n-1}, die er mit dem Büschel (β^n) erzeugt; alle diese Kurven werden in

[1]) Für $n = 3$ erhält man die bekannte Kongruenz von REYE (kubische Raumkurven durch fünf Punkte).

dem *singulären Punkt* B abgebildet. Analog ist A das *Bild* aller auf dem Kegel β_0^n liegenden Kongruenzkurven.

Die Gerade AS_k enthält die *Bilder* der ϱ^{2n-1} des Kegels α_k^{n-1}; analog BS_k die *Bildpunkte* der auf β_k^{n-1} liegenden Kurven.

Der Schnittpunkt E_{kl} der Geraden AS_k und BS_l ist das *Bild* der aus AC_k, BC_l und einer Kurve ϱ^{2n-3} zusammengesetzten Kurve.

4. Die *Bildkurve* λ der Kurven ϱ^{2n-1}, die eine *Gerade* l treffen, hat n fache Punkte in A und B, und geht durch die Punkte S.

Eine Gerade e von ε enthält die Bilder der Kurven, welche auf der Fläche E^{2n} liegen, die durch die sich auf c berührenden Flächen α^n und β^n erzeugt wird. Daher enthält e $2n$ Bildpunkte von λ und entspricht diese dem *Symbol* $\lambda^{2n}(A^n B^n S_k)$.

Diese Kurve ist offenbar rational, besitzt daher $(n-1)^2$ Doppelpunkte; diese entsprechen den Kurven ϱ^{2n-1}, welche l zweimal treffen. Ihre Stützpunkte bilden die gemeinschaftliche Paare der beiden Involutionen, welche die beiden Kegelbüschel auf l bestimmen.

Zwei Kurven λ^{2n} haben $(2n^2-2n+1)$ Punkte E gemein; es gibt daher $(2n^2-2n+1)$ Kurven ϱ^{2n-1}, welche *zwei Geraden* treffen.

5. Die Kongruenzkurven, welche die Gerade l treffen, liegen auf einer *Fläche* Λ der Ordnung $(2n^2-2n+1)$, welche in c eine Gerade der Ordnung $(2n^2-4n+1)$ besitzt. Die Ebene γ_k hat mit Λ einen Kegelschnitt ϱ_k^2 und die Geraden c, a_k und b_k gemein; aus $(2n^2-2n+1)-(2n^2-4n+1)-$ $-2=2(n-1)$ erhellt, dass a_k und b_k vielfache Geraden der Ordnung $(n-1)$ sind.

Eine durch A gelegte Gerade von γ_k trifft Λ ausserhalb A in $(n-1)+1$ Punkten, demnach in $(2n^2-3n+1)$ in A liegenden Punkten. Hieraus ergibt sich dass A und B Punkte der Ordnung $(n-1)(2n-1)$ sind.

Eine nicht auf Λ liegende ϱ^{2n-1} hat mit Λ in A und B $2(n-1)^2$ $(2n-1)$ Punkte gemein; da sie Λ ausserdem nur noch in den Punkten C_k kann treffen, ergibt sich aus

$$(2n-1)(2n^2-2n+1)-2(n-1)^2(2n-1)=(2n-1)^2,$$

dass C_k $(2n-1)$ fache Punkte von Λ sind.

Zwei Flächen Λ haben die Geraden c, a_k, b_k, die Kurven ϱ_k^{2n-3} und $(2n^2-2n+1)$ Kurven ϱ^{2n-1} gemein. Zur Erhärtung möge bemerkt werden, dass

$$(2n^2-4n+1)^2+2(2n-1)(n-1)^2+(2n-1)(2n-3)+$$
$$+(2n^2-2n+1)(2n-1)=(2n^2-2n+1)^2.$$

6. Die Bildkurve des Systems der Kongruenzkurven welche eine *Ebene* φ *berühren*, besitzt Doppelpunkte in S_k, denn es gibt in der Ebene

γ_k zwei Kegelschnitte ϱ_k^2, welche φ berühren. Auf der Schnittkurve von φ mit α_0^n erzeugen die auf diesem Kegel liegenden ϱ^{2n-1} eine Involution, welche $4(n-1)$ Doppelpunkte hat. Somit sind A und B $4(n-1)$-fache Punkte der Bildkurve, und diese entspricht dem *Symbol* $\varphi^{8(n-1)}$ $(A^{4(n-1)}$ $B^{4(n-1)} S_k^2)$.

Weil sie mit einer Kurve $\lambda^{2n}(A^n B^n S_k)$ $8n^2-12n+2$ Punkte E gemein hat, liegen die Kurven des sprachlichen Systems auf einer *Fläche* Φ der Ordnung $2(4n^2-6n+1)$.

Aus der Anzahl der gemeinschaftlichen Punkte von zwei Kurven $\varphi^{8(n-1)}$ ergibt sich, dass *zwei* beliebig gewählte *Ebenen* von $4(8n^2-18n+9)$ Kurven ϱ^{2n-1} berührt werden.

7. Die Ebene φ schneidet den Kegel β_k^{n-1} in einer Kurve, auf der eine Involution $(2n-2)^{\text{en}}$ Grades erzeugt wird durch die ϱ^{2n-2}, welche (α^n) auf β_k^{n-1} bestimmt. Es gibt daher $(4n-6)$ Kurven, welche φ berühren und a_k ist $(4n-6)$ fache Gerade der Fläche Φ.

Ein Kegel α^n hat mit Φ $(4n-4)$ Kurven ϱ^{2n-1} und die Gerade a_k, c gemein. Hieraus erhellt, dass die Gerade c auf Φ $(8n^2-20n+10)$ fach ist.

Der Schnitt von Φ mit γ_k besteht aus c, a_k, b_k und zwei ϱ_k^2. Eine durch A gelegte Gerade von γ_k trifft Φ auf b_k und den beiden ϱ_k^2 noch in $(8n^2-12n+2)-(4n-4)$ Punkten; demnach sind A und B $(8n^2-16n+6)$ fache Punkte von Φ. Benutzt man eine Gerade durch C_k, so erhellt, dass die Punkte C_k $(8n-10)$ fach sind.