Mathematics. — *Ueber endliche Geometrien.* Von O. BOTTEMA. (Communicated by Prof. W. VAN DER WOUDE.)

(Communicated at the meeting of November 30, 1929).

Zuerst von FANO und HESSENBERG, dann ausführlicher von einigen amerikanischen Mathematikern, namentlich von VEBLEN [1]), ist die Theorie der „endlichen projektiven Geometrien" ausgearbeitet worden d.h. diejenige der geometrischen Systeme, welche nur eine endliche Anzahl von Punkten enthalten, aber den Axiomen der projektiven Geometrie genügen (mit Ausnahme derjenigen, welche sich auf Anordnung und Kontinuität beziehen).

Wir werden zeigen, dasz die Konfigurationsschemata, welche diese Geometrien veranlassen, und die zum Teil, von anderem Gesichtspunkt aus schon von MOORE [2]) untersucht worden waren, wenigstens für die einfachsten Fälle, realisierbar sind in Figuren der „gewöhnlichen" (komplexen) projektiven Geometrie.

Wir beschränken uns dabei auf die ebene endliche Geometrie, machen aber sofort die Bemerkung, dasz nicht die ganze „Ebene" auf eine Figur eines komplexen projektiven Raumes (R) abgebildet wird, sondern die Restfigur, welche man erhält wenn man eine Gerade und die ihr inzidenten Punkte fortläszt. Faszt man diese Gerade auf als die unendliche ferne, dann ist diese Restfigur also eine affine (oder Euclidische) Ebene (M).

Es zeigt sich nun, um ein Beispiel voraus zu schicken, dasz eine sehr bekannte Konfiguration, die $(9_4,\ 12_3)$ nämlich der Inflexionspunkte und Achsen einer ebenen Kurve dritter Ordnung ohne Doppelpunkte als Bild einer solchen endlichen affinen Ebene fungieren kann. Die Punkte und Geraden von M sind den Punkten und Geraden der Konfiguration zugeordnet.

Dem Axiom, welches in M gilt: „Zwei verschiedene Punkte bestimmen eine Gerade" wird augenscheinlich Genüge geleistet: die Verbindungs gerade von zwei Inflexionspunkten ist eine Achse. Auch das Parallelen axiom ist erfüllt, sobald man zwei Achsen parallel nennt, wenn sie keinen Inflexionspunkt gemeinschaftlich haben.

Um allgemein zu zeigen, dasz wir in der genannten Konfiguration das Bild einer endlichen affinen Ebene vor uns haben, wird man am besten tun dieselbe mittels vier *idealer* Punkte und einer mit diesen inzidenten *idealen*

---

1) VEBLEN and BUSSEY, Finite projective geometries. Transactions Am. Math. Soc vol. 7 (1906), p. 241.
VEBLEN and YOUNG, Projective Geometry, I (1910), p. 201; II (1918), p. 33.

2) MOORE, Tactical Memoranda (Am. J. of Math. 18) (1896).

Geraden zuvervollständigen, womit ganz formell, eine Konfiguration (13_4) entsteht. Jedem Tripel paralleler Achsen (sie bilden in R ein sogenanntes Inflexionsdreieck) wird dabei ein idealer Punkt zugeordnet. Nach dieser Erweiterung kann man verifizieren, dasz den Axiomen der projektiven Geometrie Genüge geleistet wird.

Wir nennen im besonderen die Gültigkeit der in dieser Materie fundamentalen Sätze von DESARGUES und PAPPUS.

Es gibt aber einen anderen Weg die Richtigkeit der Abbildung zu zeigen. Jede projektive Geometrie kann auch analytisch gefaszt werden, auch in der endlichen projektiven Geometrie ist eine Koordinateneinführung statthaft. Das Resultat ist, dasz mit jedem Punkte ein geordneter Tripel von homogenen Zahlen aus einem *endlichen* Körper korrespondiert. Im allgemeinen hat man also mit Zahlen aus einem GALOIS-Körper zu tun; wir beschränken uns hier auf den einfacheren, auch historisch zuerst berücksichtigten Fall, wobei die Koordinaten Zahlen einer Kongruenz mit Primzahlmodulus sind. Eine affine endliche Ebene besteht dann also aus Punkten, welche karakterisiert werden durch zwei geordnete Zahlen mod. p, die Geraden sind bestimmt durch lineare Gleichungen, deren Koeffizienten ebenfalls dem zu Grunde gelegten Modulkörper angehören. Die Ebene enthält p^2 Punkte, die Anzahl der Geraden ergibt sich zu $p^2 + p$, Punkte und Gerade bilden eine Konfiguration $(p^2_{p+1}, (p^2+p)_p)$.

Es ist nicht schwer, die Inflexionspunkte und Achsen der ebenen C_3, auf entsprechende Weise darzustellen. Die C_3 ist eine elliptische Kurve, ihre Punkte sind mittels doppeltperiodischer Funktionen auf ein Periodenparallelogram der komplexen Parameterebene abbildbar. Bekannten Sätzen zufolge, wird jede C_3 dargestellt durch die Gleichungen

$$x = p\,(t), \quad y = p'\,(t),$$

wo p die *Weierstraszsche* Funktion ist. Zufolge des *Hermiteschen* Satzes sind drei Punkte der Kurve kollinear, falls ihre Parameter t_1, t_2, t_3, der Gleichung genügen:

$$t_1 + t_2 + t_3 \equiv 0 \; (mod.\; \omega_1, \omega_2),$$

wo ω_1 und ω_2 die Perioden der Funktion sind. Inflexionspunktsparameter genügen der Relation:

$$3\,t \equiv 0,$$

sie sind also:

$$t_{\lambda\mu} \equiv \lambda \frac{\omega_1}{3} + \mu \frac{\omega_2}{3},$$

wo λ und μ die Werte 0, 1 und 2 haben können. Die neun Inflexionspunkte werden jeder durch ein Paar Koordinaten λ, μ bestimmt, womit der Zusammenhang mit der abstrakt definierten affinen endlichen Ebene schon dargetan ist. Drei Inflexionspunkte sind kollinear, wenn die Summe ihrer Parameter $\equiv 0$ ist; man überzeugt sich leicht, dasz dieser Umstand dann und nur dann auftritt, wenn die Parameterpunkte kollinear sind, die Koordinaten λ, μ der Inflexionspunkte genügen dann aber einer linearen Gleichung mit Koeffizienten mod. 3.

Wir haben also das Resultat, dasz in der Tat die Inflexionskonfiguration die Bildfigur einer affinen endlichen Ebene ist und zwar derjenigen, deren zugeordneter Koordinatengeometrie die Zahlen der Kongruenz mod. 3 zur Verfügung stehen.

Die abgeleitete Uebereinstimmung zwischen der „modulären" Ebene M und der Konfiguration in R beschränkt sich nicht auf die Abbildbarkeit der Punkte und Geraden ; sie ist zu erweitern auf gewisse in beiden Geometrien vorhandene *Transformationen*. In der endlichen projektiven Geometrie ist auch von projektiven Punkttransformationen die Rede ; sie werden analytisch bestimmt durch Matrizen, deren Elemente dem Modulkörper angehören. Wir beschränken uns, der Sache gemäsz auf affine Transformationen. Jede von ihnen permutiert die p^2 Punkte. Es zeigt sich nun, dasz diejenigen Permutationen, welche durch die Gruppe der *äquiaffinen* Transformationen induziert werden, übereinstimmen mit denen, welche die Inflexionspunkte erfahren bei einer endlichen Gruppe von Kollineationen in R.

Die C_3 ist einer Gruppe von 18 Kollineationen gegenüber invariant (wir verzichten dabei auf die harmonischen und äquianharmonischen Kurven). Sie werden induziert durch die Parametertransformationen :

$$t' \equiv \pm t + m\frac{\omega_1}{3} + n\frac{\omega_2}{3},$$

wo m, n Zahlen mod. 3 sind. Die Permutationen, welche die Inflexionspunkte dabei erfahren, kann man augenscheinlich mittels der λ, μ Koordinaten vorstellen durch

$$\lambda' = \lambda + m, \qquad \mu' = \mu + n$$

$$\text{bzw.} \quad \lambda' = -\lambda + m, \quad \mu' = -\mu + n.$$

Die ersten sind Translationen in M, (sie bilden eine Untergruppe von 9 Elementen), die anderen sind Produkte einer Translation und einer Spiegelung in einen Punkt. Alle sind sie äquiaffin.

Im allgemeinen ist mit der G_{18} die Gruppe der Kollineationen, welche die C_3 invariant läszt, erschöpft. Bekanntlich gibt es aber eine Gruppe von 216 Kollineationen, zuerst von JORDAN entdeckt, oft nach HESSE benannt, welche zwar nicht die C_3, aber doch die Figur der Inflexionspunkte ungeändert läszt. (Die C_3 wird dabei permutiert mit 11 anderen Exemplaren des syzegetischen Büschels).

Es zeigt sich nun, dasz die G_{216} dieselben Permutationen der Inflexionspunkte veranlaszt wie die, welche durch äquiaffine Transformationen von λ und μ induziert werden. Wir verzichten auf einen Beweis, indem wir gleich die allgemeinere Abbildung ins Auge fassen, wobei die moduläre Ebene ihre Koordinaten einem Körper entlehnt, dem eine willkürliche

Primzahl p (statt 3) zu Grunde liegt. Wir bemerken aber noch, dasz die 216 Kollineationen am einfachsten hingeschrieben werden können, wenn man die C_3 nicht länger mittels der p Funktion darstellt, sondern ihre Gleichung in der Hesseschen Normalform schreibt; das Koordinatensystem ist dann ein Inflexionsdreieck.

Bei der Erweiterung der obengenannten Abbildung der ebenen modulären Geometrie auf eine Konfiguration in der komplexen projektiven Geometrie in R_2, zum Falle das p eine willkürliche Primzahl ist [1]), schicken wir die Bemerkung dasz $M(p)$ nicht abgebildet wird auf eine ebene Konfiguration, sondern auf eine in R_{p-1}. Um die Abbildung zu erhalten, denken wir uns in der komplexen t-Ebene die Punkte

$$t_{\lambda\mu} = \lambda \frac{\omega_1}{p} + \mu \frac{\omega_2}{p},$$

wo λ und μ ganze Zahlen mod. p. sind. Die p^2 Punkte welche wir durch ihre λ und μ karakterisieren wollen, sind ein gewisses Bild von $M(p)$. Ziehen wir auch die Verbindungsgeraden dieser Punkte und betrachten wir nicht nur homologe Punkte, sondern auch homologe Gerade als identisch, dann haben wir eine Abbildung der Punkte und Geraden von $M(p)$ vor uns. Die Geraden können durch lineare Gleichungen in λ und μ dargestellt werden. Man könnte hieraus wohl schon eine Abbildung der $M(p)$ erhalten, wobei jedem Punkt der $M(P)$ nur ein Punkt zugeordnet wäre, falls man das Periodenparallelogram in bekannter Weise auf einen Torus abbildete; mit den Geraden von $M(p)$ würden dann Kreise und Schraubenlinien auf dem Torus korrespondieren. Ein Bild aber das dem oben beschriebenen Fall $p = 3$ analog ist, bekommt man, indem das Periodenparallelogram auf eine *elliptische* Normkurve in R_{p-2} abgebildet wird, z.B. durch die Gleichungen

$$x_i = p^{(i)}(t) \qquad (i = 0, 1, \ldots p-2)$$

wo x_i Punktkoordinaten in einem R_{p-1} sind und $p^i(t)$ die i^{te} Ableitung der p Funktion darstellt. Dem Fall $p = 3$ analog findet man dann, dasz p Punkte der Kurve (welche p^{ter} Ordnung ist) in einem R_{p-2} liegen, wenn für ihre Parameter gilt $\sum\limits_1^p t_i \equiv 0$.

Die Punkte wofür $pt \equiv 0$, also mit den obengenannten Parametern $t_{\lambda\mu} = \lambda \dfrac{\omega_1}{p} + \mu \dfrac{\omega_2}{p}$, sind solche mit stationärem Schmiegungsraum; wir wollen sie wieder Inflexionspunkte nennen. Die ebenen R_{p-2}, welche durch je $p-1$ dieser Punkte bestimmt sind, haben mit der Kurve noch einen Inflexionspunkt gemein. Die Anzahl dieser Räume beträgt $\dfrac{(p^2)!}{p!(p^2-p+1)!}$; sie bilden mit den p Inflexionspunkten eine Konfigura-

[1]) Wir schliessen den Fall $p = 2$ aus; die affine Ebene $M(2)$ enthält vier Punkte, welche ein Parallelogram mit parallelen Diagonalen bilden.

tion; jedem Punkt sind $\frac{(p^2-1)!}{(p-1)!(p^2-p+1)!}$ Räume, jedem Raum sind p Punkte inzident. (Diese Konfiguration existiert übrigens auch wenn p nicht prim ist).

Nun kommt aber ein Unterschied mit dem Fall $p=3$. Augenscheinlich kann nicht die ganze Konfiguration als Bild der $M(p)$ fungieren. Wir werden eine grosze Anzahl linearer Räume unterdrücken müssen. p kollineare Punkte aus der t-Ebene genügen der Bedingung, dasz ihre Summe $\equiv 0$ ist; sie bestimmen also im R_{p-1} p Punkte welche in einem R_{p-2} liegen. Wir wollen nun in der Konfiguration nur solche R_{p-2} beibehalten, womit p *kollineare* Parameterpunkte korrespondieren. Sie wird dann zu einer

$$\{p^2_{p+1}, (p^2+p)_p\},$$

und ein Bild der $M(p)$ ist erhalten, falls man ihren Punkten und Geraden b.z.w. die Inflexionspunkte und die noch erhaltenen Verbindungsräume zuordnet.

Wir bemerken noch, dasz die genannte Reduktion der Inflexionskonfiguration nur für p prim durchzuführen ist.

Wenn wir uns die Frage vorlegen, inwieweit die projektiven Transformationen der $M(p)$ ihren Punkten Permutationen induzieren, welche auch durch Kollineationen im Raume der elliptischen Normkurve erhalten werden können, so werden wir dabei zu der namentlich von HURWITZ und KLEIN [1]) entwickelten Theorie der elliptischen Modulfunktionen geführt, der letzterer ein umfassendes Werk gewidmet hat worin auch gerade die Behandlung der elliptischen Normkurven als Illustration der allgemeinen Theorie eine hervorragende Rolle spielt. Es ist gerade der Zweck dieses Artikels auf den Zusammenhang dieser Theorie mit den amerikanischen Untersuchungen über endliche Geometrien hinzuweisen. KLEIN hat die Existenz einer endlichen Kollineationsgruppe in R_{p-1}, welche der Hesseschen G_{216} analog ist und die Eigenschaft besitzt die Figur der p^2 Inflexionspunkte der elliptischen Normkurve invariant zu lassen, sichergestellt. Die Gruppe besteht zuerst aus einer Untergruppe G_{2p^2} von Kollineationen, welche die ganze Normkurve ungeändert läszt; sie wird bestimmt durch die Parametertransformationen

$$t' = \pm t + m\frac{\omega_1}{p} + n\frac{\omega_2}{p},$$

und ist, wie oben, mit der Gruppe von Translationen und Punktspiegelungen der λ, μ Geometrie holoedrisch isomorf. Die übrigen Kollineationen bilden die Normkurve auf eine andere ab, welche dieselben Inflexionspunkte besitzt. Man erhält sie, indem man nicht die *Parameter*, sondern die *Perioden* ω_1, ω_2 der doppeltperiodischen Funktion transformiert. Es ist

[1]) KLEIN und FRICKE, Vorlesungen über die Theorie der elliptischen Modulfunktionen, II, p. 236.

dabei zweckmässig die Kurve nicht länger mittels der p Funktion darzustellen, sondern ein Koordinatensystem zu wählen, das dem Hesseschen für $p = 3$ analog ist. Es zeigt sich dann, dasz die Kollineationen bestimmt werden durch homogene lineare Transformationen von ω_1 und ω_2 mit Koeffizienten mod. p. und mit der Determinante 1. Die Zahlen λ, μ werden dann auch einer solchen Transformation

$$\begin{aligned} \lambda' &\equiv \alpha\lambda + \beta\mu \\ \mu' &\equiv \gamma\lambda + \delta\mu \end{aligned} \qquad \alpha\delta - \beta\gamma \equiv 1 \ (mod.\ p),$$

unterworfen. Die Gesamtzahl von dergleichen Transformationen berechnet sich zu $\frac{p(p^2-1)}{2}$. Mit Rücksicht auf die obengenannten Kollineationen entsteht also eine $G_{p^3(p^2-1)}$, welche der G_{216} analog und augenscheinlich der äquiaffinen Gruppe der $M\ (p)$ holoedrisch isomorf ist. Die Gruppe permutiert die Punkte und Räume der Inflexionskonfiguration; sie ist transitiv für die Punkte, intransitiv für die reduzierte. Die Räume welche wir beibehalten haben, bildeten also ein Transitivitätssystem der Gruppe gegenüber, welche die Konfiguration invariant läszt.

Indem wir für eine ausführliche Behandlung wenigstens der gruppentheoretischen Eigenschaften der $G_{\frac{p(p^2-1)}{2}}$ auf KLEIN hinweisen, fassen wir das vorangehende folgendermaszen zusammen:

Die Punkte bzw. Geraden einer endlichen (s.g. modulären) affinen Ebene können abgebildet werden auf die Inflexionspunkte einer elliptischen Normkurve in R_{p-1}, bzw. auf gewisse, mit je p dieser Punkte inzidente R_{p-2}.

Mit den äquiaffinen Transformationen der endlichen Ebene korrespondieren dabei die Kollineationen in R_{p-1} einer Hesseschen $G_{p^3(p^2-1)}$.