Mathematics. — *Ueber Differentialinvarianten einer verallgemeinerten* GALILEI—NEWTON-*Gruppe*. Von C. G. G. VAN HERK. (Communicated by Prof. R. WEITZENBÖCK).

(Communicated at the meeting of December 21, 1929).

I.

§ 1. *Einleitung.*

Die Veranlassung zu den folgenden Betrachtungen bilden gewisse physikalische Spekulationen, auf die hier nicht eingegangen wird.

Sei $(x_1\, x_2\, x_3\, t)$ ein 4-dimensionales Raum-Zeit-Kontinuum, und sei T eine Transformation:

$$\left.\begin{array}{l} x_i = e_i + e_{i1}\bar{x}_1 + e_{i2}\bar{x}_2 + e_{i3}\bar{x}_3 \; (i = 1, 2, 3) \\ t = \bar{t} \end{array}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

wo $\|e_{ik}\|$ eine orthogonale Matrix ist; für $i \neq k$ sind die e_{ik} bis auf eine Zweideutigkeit durch drei unabhängige Parameter $e_{ii} = \varepsilon_i$ bestimmt. Falls die e_i und ε_i Konstanten sind, bezeichnen wir die Transformation T mit T_1; sind die $e_i = e_i(\bar{t})$, $\varepsilon_i = \varepsilon_i(\bar{t})$ *willkürliche* (differentierbare) Funktionen der Zeit $\bar{t}$ so bezeichnen wir T mit T_2.

Eine Verallgemeinerung von (1), indem man $t = \bar{t} + c$, $c =$ Konstant setzt, ist für unser Problem ohne Bedeutung.

Die Menge aller T_1 bildet eine sechsgliedrige Gruppe $\mathfrak{G}_1$; die verschiedenen T_2 bilden eine unendliche Gruppe $\mathfrak{G}_2$. Auszerdem haben wir zu tun mit der dreigliedrigen Drehungsgruppe, in inhomogenen Koordinaten (ξ) bestimmt durch die Gleichungen:

$$\xi_i = e_{i1}\bar{\xi}_1 + e_{i2}\bar{\xi}_2 + e_{i3}\bar{\xi}_3 \; (i = 1, 2, 3) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2)$$

Diese sei mit $\mathfrak{G}_0$ bezeichnet.

Deuten wir (1) als Koordinatentransformation $(x_i) \rightarrow (\bar{x}_i)$ im Euklidischen Raume, wo die (x_i) und $(\bar{x}_i)$ auf rechtwinklige Axenkreuze O_1 bzw. O_2 zu beziehen sind, so verharren O_1 und O_2 zu einander in Ruhe, wenn eine T_1 vorliegt, während im Fall der T_2 das Axenkreuz O_2 mit wachsender Zeit jede beliebige, aus Translationen und Rotationen zusammengesetzte Bewegung, mit beliebig-variabeler Geschwindigkeit relativ zu O_1 vollführen kann. Somit ist die Galilei-Newtongruppe der klassischen Mechanik als Spezialfall in $\mathfrak{G}_2$ enthalten.

Sei jetzt:

$$\varphi(x_1, x_2, x_3, t) = \bar{\varphi}(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{x}_3, \bar{t}) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (3)$$

ein Skalar. Die Funktion φ sei genügend oft differentierbar, im übrigen willkürlich. Die Betrachtung mehrerer Skalaren $\varphi_1 \ldots \varphi_\omega$ ergibt nichts wesentlich neues und wird deshalb unterdrückt.

Wir stellen uns die folgende Aufgabe:

Es sind alle absoluten Differentialinvarianten F_1 und F_2 zu den Gruppen $\mathfrak{G}_1$, bzw. $\mathfrak{G}_2$ gehörig, aus φ zu bilden, d.h. alle Lösungen der Gleichung:

$$\left.\begin{aligned} F\left(\varphi; \frac{\partial \varphi}{\partial x_i}; \ldots \frac{\partial^n \varphi}{\partial x_{i_1} \ldots \partial x_{i_n}}; \frac{\partial \varphi}{\partial t}; \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_i \partial t} \ldots\right) = \\ = F\left(\bar{\varphi}; \frac{\partial \bar{\varphi}}{\partial \bar{x}_i}; \ldots \frac{\partial^n \bar{\varphi}}{\partial \bar{x}_{i_1} \ldots \partial \bar{x}_{i_n}}; \frac{\partial \bar{\varphi}}{\partial \bar{t}}; \frac{\partial^2 \bar{\varphi}}{\partial \bar{x}_i \partial \bar{t}} \ldots\right) \end{aligned}\right\} . \quad (4)$$

zu ermitteln, wo F gegebener Ordnung in den Ableitungen nach den (x_i) und t, und eine analytische Funktion seiner Argumente ist; und zwar kann man sich auf Polynome F beschränken. Freilich könnte man diese letzte Voraussetzung ganz fallen lassen, solange nur Differentialgleichungen für F betrachtet werden. In der Folge wird aber auch die symbolische Methode verwendet und da ist die Voraussetzung ganzer rationaler F — obgleich an sich keine wesentliche Beschränkung der Allgemeinheit — doch unentbehrlich.

Weil $\mathfrak{G}_1$ ein Teiler von $\mathfrak{G}_2$, ist jedes F_2 auch ein F_1; umgekehrt wird nicht jedes F_1 auch ein F_2 sein.

§ 2. *Der Reduktionssatz der F_1.*

Sei $(f_1, f_2 \ldots)$ ein System ternärer Formen der ξ_i mit Koeffizienten δ:

$$f_n = \sum_{\lambda+\mu+\nu=n} \frac{n!}{\lambda!\,\mu!\,\nu!} \delta_{\lambda\mu\nu} \xi_1^\lambda \xi_2^\mu \xi_3^\nu \; (n \geqq 1) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (5)$$

Symbolisch ist zu schreiben:

$$f_1 = (a\xi); \quad f_2 = (b\xi)^2; \ldots \quad f_n = (h\xi)^n; \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (5')$$

Die ganzen rationalen, zur Gruppe $\mathfrak{G}_0$ gehörigen Drehungsinvarianten der $(f_1 f_2 \ldots f_n)$ bauen sich auf aus Faktoren der Gestalt:

$$\left.\begin{aligned} (\alpha|\beta) &= \alpha_1\beta_1 + \alpha_2\beta_2 + \alpha_3\beta_3 \\ (\alpha\beta\gamma) &= \begin{vmatrix} \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_2 \\ \alpha_3 & \beta_3 & \gamma_3 \end{vmatrix} \end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (6)$$

wo die α, β, γ irgendwelche Symbole $a, b, \ldots h$ sind. So ist z. B. nach

(5) $a_{i_1} a_{i_2} \dots a_{i_n}$ mit $\delta_{\lambda\mu\nu}$ identisch, wenn $i = 1, 2, 3$ und die Zahlenreihe $(i_1\, i_2 \dots i_n)$ λ-mal 1, μ-mal 2 und ν-mal 3 enthält [1]).

Wir setzen:

$$\left.\begin{aligned} &\frac{\partial^{\lambda+\mu+\nu}\varphi}{\partial x_1^{\lambda}\,\partial x_2^{\mu}\,\partial x_3^{\nu}} = D_{\lambda\mu\nu} \\ &\frac{\partial D_{\lambda\mu\nu}}{\partial t} = \dot{D}_{\lambda\mu\nu}\,; \qquad \frac{\partial \dot{D}_{\lambda\mu\nu}}{\partial t} = \ddot{D}_{\lambda\mu\nu} \text{ u.s.f.} \end{aligned}\right\} \quad \dots \dots \tag{7}$$

und schreiben immer transformierte Gröszen mit Strich, also $\dfrac{\partial^{\lambda+\mu+\nu}\bar{\varphi}}{\partial \bar{x}_1^{\lambda}\,\partial \bar{x}_2^{\mu}\,\partial \bar{x}_3^{\nu}} =$ $= \bar{D}_{\lambda\mu\nu}$ u.s.f.

Für $\mathfrak{G}_1$ lauten die Transformationsformeln der Differentiationen:

$$\left.\begin{aligned} &\frac{\partial}{\partial x_i} = e_{i1}\frac{\partial}{\partial \bar{x}_1} + e_{i2}\frac{\partial}{\partial \bar{x}_2} + e_{i3}\frac{\partial}{\partial \bar{x}_3} \quad (i = 1, 2, 3) \\ &\frac{\partial}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial \bar{t}} \end{aligned}\right\} \quad \dots \tag{8}$$

d.h. der Prozesz $\dfrac{\partial}{\partial x_i}$ ist kogredient zu den ξ_i in (2), während $\dfrac{\partial}{\partial t}$ sich wie eine invariante Operation verhält. Hieraus ergibt sich die Kogredienz der Gröszen $D_{\lambda\mu\nu}$, $\dot{D}_{\lambda\mu\nu}$, $\ddot{D}_{\lambda\mu\nu} \dots$ zu den Formenkoeffizienten $\delta_{\lambda\mu\nu}$ in (5), da $\varphi = \bar{\varphi}$ sich gemäsz (3) wie eine Invariante nullter Ordnung beträgt. Überdies sind die verschiedenen $D_{\lambda\mu\nu}$, $\dot{D}_{\lambda\mu\nu}, \dots$ algebraisch-unabhängige Gröszen. Somit gilt der:

Satz 1. Man bekommt alle F_1 p-ter Ordnung in den Ableitungen nach den (x_i) und q-ter Ordnung in den Ableitungen bzgl. t, indem man mittels (6) alle Drehungsinvarianten der Grundformen

$$f_{n,m} = \sum_{\lambda+\mu+\nu=n} \frac{n!}{\lambda!\,\mu!\,\nu!}\,\delta^{(m)}_{\lambda\mu\nu}\,\xi_1^{\lambda}\,\xi_2^{\mu}\,\xi_3^{\nu}. \begin{pmatrix} n = 1 \dots p \\ m = 0, \dots q \end{pmatrix} \quad \dots \tag{9}$$

bildet und dann setzt:

$$\delta^{(m)}_{\lambda\mu\nu} = \frac{\partial^m D_{\lambda\mu\nu}}{\partial t^m} \quad \dots \dots \dots \tag{10}$$

§ 3. *Die Invarianten F_2: Allgemeines.*

Während die Aufstellung aller F_1 ein leichtes war durch die Möglichkeit einer sofortigen Reduktion des Problems auf eines der algebraischen Invariantentheorie, ist dem nicht so im Falle der F_2; und zwar hat man für jede Differentiations-Ordnung bzgl. t mit einem neuen Problem zu tun.

[1]) Vgl. etwa R. WEITZENBÖCK, Invariantentheorie S. 236 (5), wo man $n = 4$ zu setzen hat. Die dortige homogenisierende Variable ist hier fortgelassen.

Den Grund für dieses Verhalten bilden die zur Gruppe $\mathfrak{G}_2$ gehörigen Transformationsformeln der Differentiationen:

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x_i} &= e_{i1}\frac{\partial}{\partial \bar{x}_1} + e_{i2}\frac{\partial}{\partial \bar{x}_2} + e_{i3}\frac{\partial}{\partial \bar{x}_3} \quad (i=1,2,3) \\ \frac{\partial}{\partial t} &= \frac{\partial}{\partial \bar{t}} - \eta_1\frac{\partial}{\partial \bar{x}_1} - \eta_2\frac{\partial}{\partial \bar{x}_2} - \eta_3\frac{\partial}{\partial \bar{x}_3} \end{aligned}\right\} \quad \ldots \quad (11)$$

wo die neuen Parameter η_i bestimmt werden durch:

$$\left.\begin{aligned} \eta_i &= e_{1i}\,\zeta_1 + e_{2i}\,\zeta_2 + e_{3i}\,\zeta_3 \\ \zeta_i &= \dot{e}_i + \dot{e}_{i1}\,\bar{x}_1 + \dot{e}_{i2}\,\bar{x}_2 + \dot{e}_{i3}\,\bar{x}_3 \end{aligned}\right\} (i=1,2,3) \quad \ldots \quad (12)$$

Die Transformationsformel der $\frac{\partial}{\partial x_i}$ enthält nur Gröszen e_{ik}, welche von den Parametern ε_i (s. o.) abhängig sind. Das gleiche gilt für die höheren Ableitungen:

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial^{\lambda+\mu+\nu}}{\partial x_1^\lambda\,\partial x_2^\mu\,\partial x_3^\nu} &= \left(e_{11}\frac{\partial}{\partial \bar{x}_1} + e_{12}\frac{\partial}{\partial \bar{x}_2} + e_{13}\frac{\partial}{\partial \bar{x}_3}\right)^\lambda \cdot \\ &\left(e_{21}\frac{\partial}{\partial \bar{x}_1} + e_{22}\frac{\partial}{\partial \bar{x}_2} + e_{23}\frac{\partial}{\partial \bar{x}_3}\right)^\mu \cdot \left(e_{31}\frac{\partial}{\partial \bar{x}_1} + e_{32}\frac{\partial}{\partial \bar{x}_2} + e_{33}\frac{\partial}{\partial \bar{x}_3}\right)^\nu \end{aligned}\right\} \ldots (13)$$

Es ist also:

$$D_{\lambda\mu\nu} = \Phi(\varepsilon_i\,,\ \bar{D}_{\alpha\beta\gamma}) \quad \ldots\ldots\ldots \quad (14)$$

wo Φ eine Linearform der verschiedenen $\bar{D}_{\alpha\beta\gamma}$ ist mit $\alpha+\beta+\gamma=\lambda+\mu+\nu$.

Aus (11), (14) ergibt sich:

$$\dot{D}_{\lambda\mu\nu} = \frac{\partial\Phi}{\partial \bar{t}} - \eta_1\frac{\partial\Phi}{\partial \bar{x}_1} - \eta_2\frac{\partial\Phi}{\partial \bar{x}_2} - \eta_3\frac{\partial\Phi}{\partial \bar{x}_3} \quad \ldots \quad (15)$$

Diese Gleichung enthält neben den ε_i die weiteren 6 Parameter $\dot{\varepsilon}_i$ und η_i:

$$\dot{D}_{\lambda\mu\nu} = \Phi_1\,(\varepsilon_i\ ;\ \dot{\varepsilon}_i\ ;\ \eta_i\ ;\ \bar{D}_{\alpha\beta\gamma}\ ;\ \dot{\bar{D}}_{\alpha\beta\gamma}) \quad \ldots \quad (15')$$

Weiterführung dieses Verfahrens ergibt:

$$\ddot{D}_{\lambda\mu\nu} = \Phi_2\,(\varepsilon_i\ ;\ \dot{\varepsilon}_i\ ;\ \ddot{\varepsilon}_i\ ;\ \eta_i\ ;\ \dot{\eta}_i\ ;\ \bar{D}_{\alpha\beta\gamma}\ ;\ \dot{\bar{D}}_{\alpha\beta\gamma}\ ;\ \ddot{\bar{D}}_{\alpha\beta\gamma}) \quad \text{u.s.f.} \ . \quad (16)$$

Im Allgemeinen enthält also die Transformationsgleichung der $\frac{\partial^m D_{\lambda\mu\nu}}{\partial t^m}$ die $6m+3$ unabhängigen Parameter $\varepsilon_i \ldots \varepsilon_i^{(m)} = \frac{\partial^m \varepsilon_i}{\partial t^m}$, $\eta_i \ldots \eta_i^{(m-1)} = \frac{\partial^{m-1}\eta_i}{\partial t^{m-1}}$; und ebensoviele Parameter treten in der Gleichung (4) auf, falls sie m-ter Ordnung in den Ableitungen nach t ist. Zur Aufstellung der Differentialinvarianten F_2 hat man alsdann den $6m+3$ notwendigen Bedingungen zu genügen, die das Wegfallen dieser Parameter aus (4) ausdrücken.

§ 4. *Die Invarianten nullter Ordnung in t.*

Wir beschränken uns jetzt auf Invarianten F_2 der Ordnungen 0 und 1 in den Ableitungen nach t; die ersteren seien mit I, die letzteren mit K bezeichnet. Für eventuelle physikalische Anwendungen würden diese Ordnungen genügen.

Satz 2. Die Differentialinvarianten I sind mit den Invarianten nullter Ordnung in t der Gruppe $\mathfrak{G}_1$ identisch.

Beweis. Der Satz ist ohne weiteres klar, denn die Transformationsformeln der Derivierten nach den (x_i) sind für beide Gruppen identisch.

Die einfachsten Vertreter der Invarianten I sind, symbolisch und nichtsymbolisch geschrieben:

$$\left.\begin{aligned} I_1 &= (a|a) = \sum_{i=1}^{3} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x_i}\right)^2; \\ I_2 &= (b|b) = \sum_i \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_i^2}; \\ I_3 &= (a|b)^2 = \sum_{i,k} \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial x_k} \cdot \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_i\, \partial x_k}; \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots \quad (17)$$

u. s. f.

§ 5. *Die Invarianten erster Ordnung in den Ableitungen nach t.*

Die Gleichung (4) bekommt jetzt die Gestalt:

$$K(\dot{D}_{\lambda_p \mu_p \nu_p}\ ;\ D_{\alpha_q \beta_q \gamma_q}) = K(\dot{\overline{D}}_{\lambda_p \mu_p \nu_p}\ ;\ \overline{D}_{\alpha_q \beta_q \gamma_q}) \quad \begin{pmatrix} p = 1 \ldots m \\ q = 1 \ldots m' \end{pmatrix}. \quad (18)$$

Schreiben wir dies in der Form:

$$K = \overline{K} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (18')$$

so enthält das zweite Glied keine Transformationsparameter, während durch den Übergang $(x_i; t) \rightarrow (\overline{x}_i; \overline{t})$ im ersten Glied die neun Gröszen $(\varepsilon_i, \dot{\varepsilon}_i, \eta_i)$ auftreten, die sich wegheben müssen.

Man erhält so 6 Bedingungen, n.l. $\frac{\partial K}{\partial \eta_i} = 0$, $\frac{\partial K}{\partial \dot{\varepsilon}_i} = 0$ in der Form homogener linearer partieller Differentialgleichungen mit konstanten Koeffizienten. Ihre Integration ergibt K in einer Gestalt, die noch 3 Parameter ε_i enthält und die eine Reduktion der K auf Drehungsinvarianten ermöglicht. An die Stelle der Formenkoeffizienten, die jene Drehungsinvarianten bilden, treten hier 1°. die verschiedenen Gröszen $D_{\lambda\mu\nu}$, 2°. gewisse Determinanten 7ten Grades aus den verschiedenen $D_{\lambda\mu\nu}$ und $\dot{D}_{\lambda\mu\nu}$ gebildet.

Es ist auch von vornherein klar, dasz eine solche Reduktion nur dann stattfinden kann, wenn das Problem der Bestimmung der Differentialinvarianten in einer Form erscheint, die nur noch die 3 Parameter ε_i enthält. Für Differentialinvarianten m-ter Ordnung bzgl. t bedeutet dies, dasz die $6\,m$ Parameter $\varepsilon_i \ldots \varepsilon_i^{(m)}; \eta_i \ldots \eta_i^{(m-1)}$ in Wegfall kommen indem man den $6\,m$ Differentialgleichungen $\frac{\partial F_2}{\partial \varepsilon_i} = 0 \ldots \frac{\partial F_2}{\partial \eta_i^{(m-1)}} = 0$ genügt. Jedenfalls haben diese Differentialgleichungen für Ordnungen $m > 1$ im Allgemeinen *keine* konstante Koeffizienten, und es erscheint also fraglich ob sie eine einfache Integration erlauben.

Ob daher für jede Ordnung m eine Reduktion der F_2 auf Drehungsinvarianten möglich ist muss ich dahingestellt lassen.

§ 6. *Ein Hilfssatz.*

Hilfssatz 1. Das allgemeine Integral eines Systems linearer, homogener partieller Differentialgleichungen mit konstanten Koeffizienten:

$$\left.\begin{array}{l} a_{11}\frac{\partial\varphi}{\partial x_1} + \ldots + a_{1n}\frac{\partial\varphi}{\partial x_n} = 0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}\frac{\partial\varphi}{\partial x_1} + \ldots + a_{mn}\frac{\partial\varphi}{\partial x_n} = 0 \end{array}\right\} \quad \ldots\ldots \quad (19)$$

wo die Matrix $\|a_{ik}\|$ von Range ν ist ($\nu \leqq m, \nu < n$) und:

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} \,;\, a_{12} \ldots a_{1\nu} \\ \cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot \\ \cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot \\ a_{\nu 1} \,;\, a_{\nu 2} \ldots a_{\nu\nu} \end{vmatrix} \neq 0 \quad \ldots\ldots \quad (20)$$

hat die Gestalt:

$$\varphi = \varphi\,(z_{\nu+1}\,,\, z_{\nu+2} \ldots z_n) \quad \ldots\ldots \quad (21)$$

wobei:

$$z_\mu = \begin{vmatrix} a_{11} \,;\, a_{12} \ldots a_{1\nu} \,;\, a_{1\mu} \\ a_{21} \,;\, a_{22} \ldots a_{2\nu} \,;\, a_{2\mu} \\ \cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot \\ a_{\nu 1} \,;\, a_{\nu 2} \ldots a_{\nu\nu} \,;\, a_{\nu\mu} \\ x_1 \,;\, x_2 \ldots x_\nu \,;\, x_\mu \end{vmatrix} \;;\; (\mu = \nu + 1 \ldots n) \ldots \quad (22)$$

Beweis. Zunächst drücken sich, infolge eines Satzes über homogene lineare algebraische Gleichungen, die $m - \nu$ letzten Differentialgleichungen in (19) linear in den übrigen aus, sind also überschüssig.

Sei jetzt $z_\mu = x_\mu$ für $\mu = 1 \ldots \nu$, und sei z_μ für $\mu = \nu + 1, \ldots n$ durch

(22) bestimmt; dann ergibt die Transformation $(x_\mu) \rightarrow (z_\mu)$ auf (19) angewendet, mit Rücksicht auf (20):

$$\frac{\partial \varphi}{\partial z_1} = 0 \; ; \; \frac{\partial \varphi}{\partial z_2} = 0 \ldots \frac{\partial \varphi}{\partial z_\nu} = 0$$

Daher:

$$\varphi = \varphi\,(z_{\nu+1} \ldots z_n)$$

w. z. b. w.

§ 7. *Das Verschwinden der* $\frac{\partial K}{\partial \eta_i}$.

Wir schreiben zur Abkürzung:

$$D_{\lambda_i \mu_i \nu_i} = D_i \quad \ldots\ldots\ldots \quad (23)$$

$$\frac{\partial\,(D_{i_1}\,D_{i_2}\,D_{i_3})}{\partial\,(x_1\,x_2\,x_3)} = \nabla_{i_1 i_2 i_3} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (24)$$

$$\frac{\partial\,(D_{i_1}\,D_{i_2}\,D_{i_3}\,D_{i_4})}{\partial\,(t\,x_1\,x_2\,x_3)} = \triangle_{i_1 \ldots i_4} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (25)$$

$$\triangle_{123i} = \triangle_i \quad \ldots\ldots\ldots \quad (26)$$

Die Bedingungen $\frac{\partial K}{\partial \eta_i} = 0$ geben in Verbindung mit (11), (18):

$$\frac{\partial K}{\partial \eta_i} = \sum_{p=1}^{m} \frac{\partial K}{\partial \dot{D}_{\lambda_p \mu_p \nu_p}} \cdot \frac{\partial \dot{D}_{\lambda_p \mu_p \nu_p}}{\partial \eta_i} = \sum_{p=1}^{m} \frac{\partial K}{\partial \dot{D}_{\lambda_p \mu_p \nu_p}} \cdot \frac{\partial D_{\lambda_p \mu_p \nu_p}}{\partial x_i} = 0 \,.\, (i = 1, 2, 3)$$

Also wegen (11) und $|e_{ik}| = \pm 1$:

$$\sum_{p=1}^{m} \frac{\partial K}{\partial \dot{D}_{\lambda_p \mu_p \nu_p}} \cdot \frac{\partial D_p}{\partial x_j} = 0 \; (j = 1, 2, 3) \quad \ldots\ldots \quad (27)$$

Dies ist ein System von drei homogenen linearen Differentialgleichungen mit konstanten Koeffizienten, weil die m bzw. m' verschiedenen in K auftretenden Gröszen $\dot{D}_{\lambda\mu\nu}$ und $D_{\lambda\mu\nu}$ als unabhängig variabel zu betrachten sind.

Die Koeffizientenmatrix

$$\left\| \begin{matrix} D_{\lambda_1+1,\, \mu_1,\, \nu_1} & D_{\lambda_2+1,\, \mu_2,\, \nu_2} \ldots & D_{\lambda_m+1,\, \mu_m,\, \nu_m} \\ D_{\lambda_1,\, \mu_1+1,\, \nu_1} & D_{\lambda_2,\, \mu_2+1,\, \nu_2} \ldots & D_{\lambda_m,\, \mu_m+1,\, \nu_m} \\ D_{\lambda_1,\, \mu_1,\, \nu_1+1} & D_{\lambda_2,\, \mu_2,\, \nu_2+1} \ldots & D_{\lambda_m,\, \mu_m,\, \nu_m+1} \end{matrix} \right\| \quad \ldots\ldots \quad (28)$$

ist für $m \geqq 3$ vom Range 3. Es genügt nachzuweisen dass:

$$\nabla_{123} = \begin{vmatrix} D_{\lambda_1+1,\, \mu_1,\, \nu_1} & D_{\lambda_2+1,\, \mu_2,\, \nu_2} & D_{\lambda_3+1,\, \mu_3,\, \nu_3} \\ D_{\lambda_1,\, \mu_1+1,\, \nu_1} & D_{\lambda_2,\, \mu_2+1,\, \nu_2} & D_{\lambda_3,\, \mu_3+1,\, \nu_3} \\ D_{\lambda_1,\, \mu_1,\, \nu_1+1} & D_{\lambda_2,\, \mu_2,\, \nu_2+1} & D_{\lambda_3,\, \mu_3,\, \nu_3+1} \end{vmatrix}$$

nicht identisch verschwindet.

Die Indizestripel $(\lambda_1\mu_1\nu_1)$, $(\lambda_2\mu_2\nu_2)$, $(\lambda_3\mu_3\nu_3)$ sind voneinander verschieden, es gibt also in ∇_{123} eine Grösze $D_{h_1h_2h_3}$, die sich von allen übrigen in ∇_{123} auftretenden Gröszen $D_{k_1k_2k}$ unterscheidet durch die Existenz einer der Beziehungen:

1°. $h_1 > k_1$.
2°. $h_1 = k_1$; $h_2 > k_2$.
3°. $h_1 = k_1$; $h_2 = k_2$; $h_3 > k_3$.

Es werde $D_{h_1h_2h_3}$ als „Maximalelement" der Determinante ∇_{123} angedeutet. ∇_{123} kann nicht identisch verschwinden solange der Minor von $D_{h_1h_2h_3}$ nicht identisch verschwindet. Dieser Minor aber besitzt auch ein „Maximalelement", mit von 0 verschiedenem Variabelnkoeffizient, kann also tatsächlich nicht identisch verschwinden.

Der Forderung $\dfrac{\partial K}{\partial \dot{D}_{\lambda_1\mu_1\nu_1}} \neq 0 \ldots \dfrac{\partial K}{\partial \dot{D}_{\lambda_m\mu_m\nu_m}} \neq 0$ kann man nur genügen für $m \geqq 4$, es gibt also nur für solche Werte m Differentialinvarianten K.

Jetzt gibt der Hilfssatz 1 zusammen mit (25), (26) für das allgemeine Integral von (27):

$$K = \Phi(\triangle_4 \ldots \triangle_m;\ D_{\alpha_1\beta_1\gamma_1} \ldots D_{\alpha_{m'}\beta_{m'}\gamma_{m'}}) \quad \ldots \quad (29)$$

§ 8. *Das Verschwinden der* $\dfrac{\partial K}{\partial \dot{\varepsilon}_i}$.

Aus (29) folgert man:

$$\frac{\partial K}{\partial \dot{\varepsilon}_i} = \sum_{p=4}^{m} \frac{\partial \Phi}{\partial \triangle_p} \cdot \frac{\partial \triangle_p}{\partial \dot{\varepsilon}_i} = 0 \quad (i = 1, 2, 3) \quad \ldots \quad (30)$$

Wir schreiben zunächst $\triangle_p$ in einer Form, die keine Gröszen η_i mehr enthält:

(25):
$$\triangle_{i_1 \ldots i_4} = \frac{\partial(D_{i_1} D_{i_2} D_{i_3} D_{i_4})}{\partial(\bar{t}\, x_1\, x_2\, x_3)} \quad \ldots \quad (25')$$

also:

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial \triangle_p}{\partial \dot{\varepsilon}_i} = \nabla_{23p} \frac{\partial}{\partial \dot{\varepsilon}_i}\left(\frac{\partial D_1}{\partial \bar{t}}\right) - \nabla_{13p} \frac{\partial}{\partial \dot{\varepsilon}_i}\left(\frac{\partial D_2}{\partial \bar{t}}\right) + \\ + \nabla_{12p} \frac{\partial}{\partial \dot{\varepsilon}_i}\left(\frac{\partial D_3}{\partial \bar{t}}\right) - \nabla_{123} \frac{\partial}{\partial \dot{\varepsilon}_i}\left(\frac{\partial D_p}{\partial \bar{t}}\right) \end{aligned}\right\} . \quad (31)$$

Weiter ist:

$$\frac{\partial D}{\partial \bar{t}} = \frac{\partial D}{\partial t_{(\varepsilon)}} + \sum_{i=1}^{3} \frac{\partial D}{\partial \varepsilon_i} \dot{\varepsilon}_i \quad \ldots \quad (32)$$

also:

$$\frac{\partial}{\partial \dot{\varepsilon}_i}\left(\frac{\partial D}{\partial \bar{t}}\right) = \frac{\partial D}{\partial \varepsilon_i} \quad \ldots \quad (32')$$

(31):
$$\frac{\partial \triangle_p}{\partial \dot{\varepsilon}_i} = \nabla_{23p} \frac{\partial D_1}{\partial \varepsilon_i} - \nabla_{13p} \frac{\partial D_2}{\partial \varepsilon_i} + \nabla_{12p} \frac{\partial D_3}{\partial \varepsilon_i} - \nabla_{123} \frac{\partial D_p}{\partial \varepsilon_i} \quad . \quad (31')$$

Zur Berechnung von $\frac{\partial D_{\lambda,\mu,\nu}}{\partial \varepsilon_j}$ schreiben wir:

$$\frac{\partial D_{\lambda,\mu,\nu}}{\partial \varepsilon_j} = \sum_{(ik)} \frac{\partial D_{\lambda,\mu,\nu}}{\partial e_{ik}} \cdot \frac{\partial e_{ik}}{\partial \varepsilon_j} \quad (j = 1, 2, 3) \quad \ldots \quad (33)$$

wo im Ausdruck $\frac{\partial D}{\partial e_{ik}}$ den Abhängigkeitsbeziehungen der e_{ik} keine Rechnung getragen wird. Die Formel (13) gibt sodann:

$$\left.\begin{array}{l} \frac{\partial D_{\lambda,\mu,\nu}}{\partial e_{1k}} = \lambda \frac{\partial D_{\lambda-1,\mu,\nu}}{\partial x_k}; \quad \frac{\partial D_{\lambda,\mu,\nu}}{\partial e_{2k}} = \mu \frac{\partial D_{\lambda,\mu-1,\nu}}{\partial x_k}; \quad \frac{\partial D_{\lambda,\mu,\nu}}{\partial e_{3k}} = \nu \frac{\partial D_{\lambda,\mu,\nu-1}}{\partial x_k} \\ (k = 1, 2, 3) \end{array}\right\} . \quad (34)$$

Die Gröszen $\frac{\partial e_{ik}}{\partial \varepsilon_j}$ berechnet man leicht durch Differentiation der Orthogonalitätsbedingungen der e_{ik}, indem man beachtet dass:

$$\frac{\partial e_{ii}}{\partial \varepsilon_j} = \delta_{ij} = \begin{cases} 0 & \text{für } i \neq j \\ 1 & \text{,, } i = j \end{cases} \quad \ldots \ldots \quad (35)$$

So findet man aus (33), (34):

$$\left.\begin{array}{l} \varepsilon \frac{\partial D_{\lambda,\mu,\nu}}{\partial \varepsilon_1} = e_{12}\, e_{13}\, \Gamma_1 + e_{12}\, e_{23}\, \Gamma_2 + e_{13}\, e_{32}\, \Gamma_3 \\ \varepsilon \frac{\partial D_{\lambda,\mu,\nu}}{\partial \varepsilon_2} = e_{21}\, e_{13}\, \Gamma_1 + e_{23}\, e_{21}\, \Gamma_2 + e_{23}\, e_{31}\, \Gamma_3 \\ \varepsilon \frac{\partial D_{\lambda,\mu,\nu}}{\partial \varepsilon_3} = e_{31}\, e_{12}\, \Gamma_1 + e_{32}\, e_{21}\, \Gamma_2 + e_{31}\, e_{32}\, \Gamma_3 \end{array}\right\} \quad \ldots \quad (36)$$

wo:

$$\varepsilon = e_{32}^2 - e_{23}^2 = e_{13}^2 - e_{31}^2 = e_{21}^2 - e_{12}^2 \quad \ldots \ldots \quad (37)$$

und:

$$\left.\begin{array}{l} \Gamma_1 (D_{\lambda,\mu,\nu}) = \mu D_{\lambda,\mu-1,\nu+1} - \nu D_{\lambda,\mu+1,\nu-1} \\ \Gamma_2 (D_{\lambda,\mu,\nu}) = \nu D_{\lambda+1,\mu,\nu-1} - \lambda D_{\lambda-1,\mu,\nu+1} \\ \Gamma_3 (D_{\lambda,\mu,\nu}) = \lambda D_{\lambda-1,\mu+1,\nu} - \mu D_{\lambda+1,\mu-1,\nu} \end{array}\right\} \quad \ldots \quad (38)$$

Wegen (31'), (36) und:

$$\begin{vmatrix} e_{12}\, e_{13} & e_{12}\, e_{23} & e_{13}\, e_{32} \\ e_{21}\, e_{13} & e_{23}\, e_{21} & e_{23}\, e_{31} \\ e_{31}\, e_{12} & e_{32}\, e_{21} & e_{31}\, e_{32} \end{vmatrix} = \varepsilon^2 \neq 0 \quad \ldots \quad (39)$$

folgt nun aus (30):

$$\sum_{p=4}^{m} \frac{\partial \Phi}{\partial \triangle_p} C_i (p) = 0. \qquad (i = 1, 2, 3) \quad \ldots \ldots \quad (40)$$

wo:

$$C_i (p) = \nabla_{23p}\, \Gamma_i (1) - \nabla_{13p}\, \Gamma_i (2) + \nabla_{12p}\, \Gamma_i (3) - \nabla_{123}\, \Gamma_i (p) \quad . \quad (41)$$

wenn wir zur Abkürzung schreiben:

$$\Gamma_i(\tau) = \Gamma_i(D_\tau) = \Gamma_i(D_{\lambda_\tau \mu_\tau \nu_\tau}) \quad (i = 1, 2, 3) \quad . \quad . \quad . \quad (42)$$

Die Gleichungen (40) stellen wieder ein System dreier linearer partieller Differentialgleichungen mit konstanten Koeffizienten dar, denn die $C_i(p)$ enthalten im Gegensatz zu den $\triangle_p$ nur Variabeln $D_{\lambda\mu\nu}$, sind also als von den $\triangle_p$ unabhängige Gröszen zu betrachten.

Auch hier gibt es, wie bei den Gleichungen (27) eine zu diskutierende Koeffizientenmatrix $\|C_i(p)\|$, die aber im Gegensatz zur Matrix (28) für besondere Parameterwerte $(\lambda_1\, \mu_1\, \nu_1 \ldots . \lambda_m\, \mu_m\, \nu_m)$ und für $m \geqq 6$ vom Range 2 sein kann.

Dennoch erscheint es zweckmässiger die Erörterung der Fälle $m = 4, 5, 6$ und die Untersuchung der Matrix $\|C_i(p)\|$ für $m \geqq 7$ auf später zu verschieben, nachdem der allgemeine Fall erledigt ist. Das Ergebnis führt nämlich dahin, dass in den Ausnahmefällen tatsächlich Differentialinvarianten K existieren, dass diese sich aber ganz den allgemeinen Formeln fügen. Doch ist ein solches Verhalten nicht von vornherein zu erwarten.