Mathematics. — *Die Endlichkeit der Invarianten bei Eingliedrigen Gruppen.* Von R. WEITZENBÖCK.

(Communicated at the meeting of January 25, 1930).

Es sei $f(x)$ eine Form der n Variabeln $x_1, x_2, \ldots, x_n$ und $A = \| a_i^k \|$ eine n-dimensionale Matrix mit dem Wurzeln λ_i (= Wurzeln der Gleichung n-ten Grades $Det \, |\lambda E - A| = 0$). Die Koeffizienten von $f(x)$ und die Elemente a_i^k von A seien gewöhnliche komplexe Zahlen; etwas allgemeiner kann man diese Koeffizienten, die a_i^k und die Wurzeln λ_i als Elemente eines festen Körpers voraussetzen.

Der Matrix A ist eindeutig zugeordnet die infinitesimale Transformation

$$A(f) = \frac{\partial f}{\partial x_i} a_i^k x_k = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i} \sum_{k=1}^{n} a_i^k x_k .$$

Gilt für eine Form $f(x) \neq 0$ identisch in den x_i die Beziehung

$$A(f) = \alpha \,.\, f,$$

so nennen wir f eine *A-Invariante.* Wir werden dann folgenden Satz beweisen:

Alle A-Invarianten besitzen eine endliche Integritätsbasis $f_1, f_2, \ldots, f_s$ $(1 \leqq s \leqq n)$, *sodass also jede A-Invariante* $f(x)$ *ein Polynom dieser Basisinvarianten wird*: $f(x) = P(f_1, f_2, \ldots, f_s)$.

§ 1.

Wir suchen zuerst die linearen A-Invarianten. Ist

$$Det \mid \lambda E - A \mid = (\lambda - \lambda_1)^{\nu_1} (\lambda - \lambda_2)^{\nu_2} \ldots (\lambda - \lambda_h)^{\nu_h} = 0 \quad . \quad . \quad (1)$$

die karakteristische Gleichung der Matrix A, wobei $\lambda_i \neq \lambda_k$ und $\nu_1 + \nu_2 + \nu_3 + \ldots + \nu_h = n$ ist, so sind $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_h$ die $h \geqq 1$ untereinander verschiedenen Wurzeln der Matrix A. Es gibt dann eine lineare, umkehrbare Transformation $y = S(x)$, bei welcher A in die Normalform $N = S^{-1} A S$ übergeht [1]), die wir, um die weiter folgende Ableitung

---

[1]) H. E. HAWKES, Amer. Journal of Math. **32** (1910), p. 101—114.

nicht allzu verwickelt zu gestalten, in der speziellen Form gebrauchen:

$$N = \left\Vert \begin{array}{ccccccc|ccc} \lambda_1 & \varepsilon_1 & & & & & & & & \\ & \lambda_1 & \varepsilon_2 & & & & & & & \\ & & \ddots & & & & & & & \\ & & & \lambda_1 & \varepsilon_{\mu_1} & & & & & \\ & & & & \lambda_1 & & & & & \\ & & & & & \ddots & & & & \\ & & & & & & \lambda_1 & & & \\ \hline & & & & & & & \lambda_2 & \eta_1 & \\ & & & & & & & & \lambda_2 & \eta_2 \\ & & & & & & & & & \ddots \end{array} \right\Vert = \Vert n_i^k \Vert\,; \qquad \begin{array}{l} \bar{y}_i = n_i^k\, y_k \\ \varepsilon_i = \eta_k = \ldots = 1 \\ 0 \leqq \mu_i \leqq \nu_i - 1 \end{array} \quad \ldots\ldots \quad (2)$$

N setzt sich längs der Hauptdiagonale zusammen aus h quadratischen Matrizen N_{ν_i} der Seitenlänge ν_i; alle nicht angeschriebenen Elemente sind Null, λ_1 kann ebenfalls Null sein [1]).

Die A-Invarianten $f(x)$ gehen jetzt über in N-Invarianten $g(y)$ und es genügt obigen Satz für die N-Invarianten zu beweisen.

Soll $m^i y_i = \sum_{i=1}^{n} m^i y_i$ eine lineare Invariante sein, so müssen identisch in allen y_i die Gleichungen

$$m^i \bar{y}_i = \varphi(n_i^k) \,.\, m^i y_i$$

gelten. Dies gibt nach (2):

$$\left.\begin{array}{r} m^1 \lambda_1 = \varphi \,.\, m^1 \\ m^1 + m^2 \lambda_1 = \varphi \,.\, m^2 \\ m^2 + m^3 \lambda_1 = \varphi \,.\, m^3 \\ \ldots\ldots\ldots \end{array}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (3)$$

Hieraus findet man, dass nur diejenigen m^i nicht Null sein müssen, wofür in der i-ten Zeile von (2) nur λ_j und keine Eins vorhanden ist. Es sind also

$$y_{\mu_1+1},\ y_{\mu_1+2}, \ldots, y_{\nu_1} \quad ; \quad y_{\nu_1+\mu_2+1}, \ldots, y_{\nu_1+\nu_2}; \quad \ldots\ldots \quad (4)$$

lineare N-Invarianten und jede andere lineare N-Invariante ist linear und homogen durch diese ausdrückbar. Sind daher z.B. alle $\mu_i = 0$, d.h. stehen in der Normalform (2) keine Einsen, so haben wir n lineare N-Invarianten y_i und der Satz ist bewiesen.

§ 2.

Enthält die Normalform (2) auch Einsen, so kommen zu den linearen N-Invarianten (4) weitere, nicht-lineare hinzu.

---

[1]) Bei der allgemeinen Normalform stehen die Einsen ε_i, η_k, ... in den N_{ν_i} auch unmittelbar rechts der Hauptdiagonale, aber in anderer Anordnung.

Sei nämlich $g(y) = \Sigma\, g_{p_1 p_2 \ldots p_n}\, y_1^{p_1}\, y_2^{p_2} \ldots y_n^{p_n}$ eine N-Invariante; dann gibt die Forderung

$$N(g) = (p_1 \lambda_1 + \ldots + p_n \lambda_h) \cdot g$$

die Gleichung

$$\sum_{N_{\nu_i}} \left(\frac{\partial g}{\partial y_1} \cdot y_2 + \frac{\partial g}{\partial y_2} \cdot y_3 + \ldots + \frac{\partial g}{\partial y_{\mu_i}} \cdot y_{\mu_i+1} \right) = 0 \quad . \quad . \quad . \quad (5)$$

wo die Summe über alle die Teilmatrizes N_{ν_i} von N zu erstrecken ist, für die $\mu_i \neq 0$ ist. Bezeichnen wir der grösseren Deutlichkeit halber

$$y_{\nu_1+1}\,,\; y_{\nu_1+2}\,, \ldots, y_{\nu_1+\nu_2} \quad \text{mit} \quad z_1\,,\; z_2\,, \ldots, z_{\nu_2}$$

$$y_{\nu_1+\nu_2+1}\,,\; y_{\nu_1+\nu_2+2}\,, \ldots, y_{\nu_1+\nu_2+\nu_3} \quad \text{mit} \quad t_1\,,\; t_2\,, \ldots, t_{\nu_3} \quad \text{u.s.f.,}$$

so lautet (5):

$$\left(\frac{\partial g}{\partial y_1} \cdot y_2 + \ldots + \frac{\partial g}{\partial y_{\mu_1}} \cdot y_{\mu_1+1} \right) + \left(\frac{\partial g}{\partial z_1} \cdot z_2 + \ldots + \frac{\partial g}{\partial z_{\mu_2}} \cdot z_{\mu_2+1} \right) + \ldots = 0 \quad (6)$$

Wir betrachten zuerst die zur Teilmatrix N_{ν_1} gehörige Differentialgleichung, indem wir einfachheitshalber μ statt μ_1 schreiben:

$$\frac{\partial g}{\partial y_1} \cdot y_2 + \frac{\partial g}{\partial y_2} \cdot y_3 + \ldots + \frac{\partial g}{\partial y_\mu} \cdot y_{\mu+1} = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (7)$$

Ihr allgemeines, ganz-rationales Integral ist leicht anzugeben. Es ist ein Polynom der partikulären, untereinander unabhängigen Lösungen

$$\left. \begin{aligned} C_1 &= y_{\mu+1} \\ C_2 &= y_{\mu-1}\, y_{\mu+1} - \frac{1}{2}\, y_\mu^2 \\ C_3 &= y_{\mu-2}\, y_{\mu+1}^2 - y_{\mu-1}\, y_\mu\, y_{\mu+1} + \frac{1}{3}\, y_\mu^3 \\ C_4 &= y_{\mu-3}\, y_{\mu+1}^3 - y_{\mu-2}\, y_\mu\, y_{\mu+1}^2 + \frac{1}{2}\, y_{\mu-1}\, y_\mu^2\, y_{\mu+1} - \frac{1}{8}\, y_\mu^4 \\ &\text{u.s.f.} \end{aligned} \right\} \quad . \quad . \quad (8)$$

wobei C_m für $3 \leqslant m \leqslant \mu$ durch die Rekursionsformel gegeben wird:

$$\left. \begin{aligned} C_m = y_{\mu-m+1}\, y_{\mu+1}^{m-1} - y_\mu\, C_{m-1} - \frac{1}{2!}\, y_\mu^2\, C_{m-2} - \frac{1}{3!}\, y_\mu^3\, C_{m-3} - \ldots - \\ - \frac{1}{(m-2)!}\, y_\mu^{m-2}\, C_2 - \frac{1}{m!}\, y_\mu^m . \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

Analog zu (8) erhält man mit den $\mu_2 + 1$ Veränderlichen z_i die Invarianten $C_1' = z_{\mu_2+1}, C_2', \ldots, C_{\mu_2}'$ u.s.f. für jede der Teilmatrizes N_ν.

Führt man diese Formen $C_i, C_i', \ldots$ als neue Veränderliche in (6) ein, so reduziert sich diese Differentialgleichung auf:

$$\frac{\partial g}{\partial y_{\mu_1}} \cdot y_{\mu_1+1} + \frac{\partial g}{\partial z_{\mu_2}} \cdot z_{\mu_2+1} + \frac{\partial g}{\partial t_{\mu_3}} \cdot t_{\mu_3+1} + \ldots = 0 \quad . \quad . \quad . \quad (10)$$

Das allgemeine ganz-rationale Integral dieser Gleichung (10) ist ein Polynom der zweireihigen Determinanten

$$\Delta_{12} = y_{\mu_1} z_{\mu_2+1} - z_{\mu_2} y_{\mu_1+1}, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (11)$$

der Matrix:

$$\begin{Vmatrix} y_{\mu_1} & z_{\mu_2} & t_{\mu_3} & \ldots \\ y_{\mu_1+1} & z_{\mu_2+1} & t_{\mu_3+1} & \ldots \end{Vmatrix} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (12)$$

Fassen wir zusammen: Jede ganze rationale N-Invariante $g(y)$ ist ein Polynom der Basisinvarianten von dreierlei Typus:

1. die linearen Invarianten $y_{\mu_1+1}, \ldots, y_{\nu_1};\ z_{\mu_2+1}, \ldots, z_{\nu_2}; \ldots$
2. die Formen $C_i, C_i', \ldots$ (vgl. (8)) für $i \geqq 2$.
3. die quadratischen Invarianten Δ_{ik} (vgl. (12)).