Mathematics. — *Ueber Differentialinvarianten einer verallgemeinerten* GALILEI-NEWTON-*Gruppe* II. Von C. G. G. VAN HERK. (Communicated by Prof. R. WEITZENBÖCK).

(Communicated at the meeting of January 25, 1930).

§ 9. *Hilfsfunktionen.*

Zunächst wenden wir uns dem allgemeinen Fall des § 8 zu. Es sei also $m \geqslant 7$ und $\| C_i(p) \|$ eine Matrix dritten Ranges.

Die folgenden Hilfsfunktionen werden eingeführt:

$$E_{456} = \begin{vmatrix} C_1(4) & C_1(5) & C_1(6) \\ C_2(4) & C_2(5) & C_2(6) \\ C_3(4) & C_3(5) & C_3(6) \end{vmatrix} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (43)$$

$$\Gamma_{456} = \begin{vmatrix} \Gamma_1(4) & \Gamma_1(5) & \Gamma_1(6) \\ \Gamma_2(4) & \Gamma_2(5) & \Gamma_2(6) \\ \Gamma_3(4) & \Gamma_3(5) & \Gamma_3(6) \end{vmatrix} \quad . \quad . \quad . \quad , \quad (44)$$

$$H_7 = \begin{vmatrix} \triangle_4 & \triangle_5 & \triangle_6 & \triangle_7 \\ C_1(4) & C_1(5) & C_1(6) & C_1(7) \\ C_2(4) & C_2(5) & C_2(6) & C_2(7) \\ C_3(4) & C_3(5) & C_3(6) & C_3(7) \end{vmatrix} \quad . \quad . \quad . \quad (45)$$

$$G_{1\ldots 6} = \begin{vmatrix} \mu_1 D_{\lambda_1, \mu_1-1, \nu_1+1} - \nu_1 D_{\lambda_1, \mu_1+1, \nu_1-1} & \ldots & \mu_6 D_{\lambda_6, \mu_6-1, \nu_6+1} - \nu_6 D_{\lambda_6, \mu_6+1, \nu_6-1} \\ \nu_1 D_{\lambda_1+1, \mu_1, \nu_1-1} - \lambda_1 D_{\lambda_1-1, \mu_1, \nu_1+1} & \ldots & \nu_6 D_{\lambda_6+1, \mu_6, \nu_6-1} - \lambda_6 D_{\lambda_6-1, \mu_6, \nu_6+1} \\ \lambda_1 D_{\lambda_1-1, \mu_1+1, \nu_1} - \mu_1 D_{\lambda_1+1, \mu_1-1, \nu_1} & \ldots & \lambda_6 D_{\lambda_6-1, \mu_6+1, \nu_6} - \mu_6 D_{\lambda_6+1, \mu_6-1, \nu_6} \\ D_{\lambda_1+1, \mu_1, \nu_1} & \cdots\cdots & D_{\lambda_6+1, \mu_6, \nu_6} \\ D_{\lambda_1, \mu_1+1, \nu_1} & \cdots\cdots & D_{\lambda_6, \mu_6+1, \nu_6} \\ D_{\lambda_1, \mu_1, \nu_1+1} & \cdots\cdots & D_{\lambda_6, \mu_6, \nu_6+1} \end{vmatrix} \quad (46)$$

$$R_{1\ldots 7} = \begin{vmatrix} \mu_1 D_{\lambda_1, \mu_1-1, \nu_1+1} - \nu_1 D_{\lambda_1, \mu_1+1, \nu_1-1} & \ldots & \mu_7 D_{\lambda_7, \mu_7-1, \nu_7+1} - \nu_7 D_{\lambda_7, \mu_7+1, \nu_7-1} \\ \nu_1 D_{\lambda_1+1, \mu_1, \nu_1-1} - \lambda_1 D_{\lambda_1-1, \mu_1, \nu_1+1} & \ldots & \nu_7 D_{\lambda_7+1, \mu_7, \nu_7-1} - \lambda_7 D_{\lambda_7-1, \mu_7, \nu_7+1} \\ \lambda_1 D_{\lambda_1-1, \mu_1+1, \nu_1} - \mu_1 D_{\lambda_1+1, \mu_1-1, \nu_1} & \ldots & \lambda_7 D_{\lambda_7-1, \mu_7+1, \nu_7} - \mu_7 D_{\lambda_7+1, \mu_7-1, \nu_7} \\ D_{\lambda_1+1, \mu_1, \nu_1} & \cdots\cdots & D_{\lambda_7+1, \mu_7, \nu_7} \\ D_{\lambda_1, \mu_1+1, \nu_1} & \cdots\cdots & D_{\lambda_7, \mu_7+1, \nu_7} \\ D_{\lambda_1, \mu_1, \nu_1+1} & \cdots\cdots & D_{\lambda_7, \mu_7, \nu_7+1} \\ \dot{D}_{\lambda_1, \mu_1, \nu_1} & \cdots\cdots & \dot{D}_{\lambda_7, \mu_7, \nu_7} \end{vmatrix} \quad (47)$$

Hier sollen die Indizes 1—7 in den Funktionen E, Γ, H, G und R Parametertripel $(\lambda_1 \mu_1 \nu_1) \ldots (\lambda_7 \mu_7 \nu_7)$ andeuten. Die Parameter λ, μ, ν sind wie zuvor ganze, nicht-negative Zahlen. Der einzige Index der H-Funktion soll andeuten, dass in diese Funktion 6 *unveränderliche* Tripel $(\lambda_1 \mu_1 \nu_1) \ldots (\lambda_6 \mu_6 \nu_6)$ eingehen, während z.B. in der Definition der R-Funktion jeder Tripelindex i $(i = 1 \ldots 7)$ durch jede beliebige andere Zahl zu ersetzen wäre.

Die Funktionen G und R, mit denen in der Folge hauptsächlich gearbeitet wird, sind keine algebraisch-unabhängigen Gröszen. Es ist:

$$G_{12\ldots 6} = -G_{213\ldots 6} \quad ; \quad R_{12\ldots 7} = -R_{213\ldots 7} \quad \text{u.s.f.}$$

Also wird insbesondere G oder R identisch Null, sobald zwei ihrer Parametertripel einander gleich sind. Im allgemeinen sind daher alle betrachteten Tripel als durchweg verschieden vorauszusetzen.

Ausserdem bestehen zwischen den verschiedenen Funktionen G bzw. R die sogenannten quadratischen p-Relationen [1]).

Hilfssatz 2. Es gilt die Identität:

$$E_{ikl} = \nabla_{123}^2 \, G_{123\,ikl} \quad \ldots \ldots \ldots \quad (48)$$

Beweis. Wir dürfen die Indizes (ikl) einfachheitshalber durch (456) ersetzen. Wegen (41) ist sodann:

$$E_{456} = \begin{vmatrix} \nabla_{234} \Gamma_1(1) - \nabla_{134} \Gamma_1(2) + \nabla_{124} \Gamma_1(3) - \nabla_{123} \Gamma_1(4) \quad \ldots \\ \ldots \quad \nabla_{236} \Gamma_1(1) - \nabla_{136} \Gamma_1(2) + \nabla_{126} \Gamma_1(3) - \nabla_{123} \Gamma_1(6) \\ \nabla_{234} \Gamma_2(1) - \nabla_{134} \Gamma_2(2) + \nabla_{124} \Gamma_2(3) - \nabla_{123} \Gamma_2(4) \quad \ldots \\ \ldots \quad \nabla_{236} \Gamma_2(1) - \nabla_{136} \Gamma_2(2) + \nabla_{126} \Gamma_2(3) - \nabla_{123} \Gamma_2(6) \\ \nabla_{234} \Gamma_3(1) - \nabla_{134} \Gamma_3(2) + \nabla_{124} \Gamma_3(3) - \nabla_{123} \Gamma_3(4) \quad \ldots \\ \ldots \quad \nabla_{236} \Gamma_3(1) - \nabla_{136} \Gamma_3(2) + \nabla_{126} \Gamma_3(3) - \nabla_{123} \Gamma_3(6) \end{vmatrix}$$

Zerfällt man die Elemente dieser Determinante in ihre Summanden $\nabla_{\alpha\beta\gamma} \Gamma_j(\delta)$, so erscheint E_{ikl} als Form $3+1$-ten Grades der Determinantenreihen $\nabla_{\alpha\beta\gamma}$ bzw. $\Gamma_{\alpha\beta\gamma}$, und einiges Umrechnen der Determinanten $\nabla_{\alpha\beta\gamma}$ mittels quadratischer p-Relationen gibt:

$$E_{456} = \nabla_{123}^2 \cdot \left\{ \begin{array}{l} \nabla_{456} \Gamma_{123} - \nabla_{156} \Gamma_{234} + \nabla_{256} \Gamma_{134} - \nabla_{356} \Gamma_{124} + \nabla_{146} \Gamma_{235} - \\ - \nabla_{246} \Gamma_{135} + \nabla_{346} \Gamma_{125} - \nabla_{145} \Gamma_{236} + \nabla_{245} \Gamma_{136} - \nabla_{345} \Gamma_{126} + \\ + \nabla_{234} \Gamma_{156} - \nabla_{134} \Gamma_{256} + \nabla_{124} \Gamma_{356} - \nabla_{235} \Gamma_{146} + \nabla_{135} \Gamma_{246} - \\ - \nabla_{125} \Gamma_{346} + \nabla_{236} \Gamma_{145} - \nabla_{136} \Gamma_{245} + \nabla_{126} \Gamma_{345} - \nabla_{123} \Gamma_{456} \end{array} \right\}$$

Alsdann gibt der Satz von LAPLACE die erwünschte Beziehung (48).

[1]) Vgl. R. WEITZENBÖCK, Invariantentheorie, Groningen (1923), S. 114 ff.

Hilfssatz 3. Es gilt die Identität:

$$H_q = \nabla^3_{123} R_{1\dots 6q} \quad \dots\dots\dots \quad (49)$$

Beweis. Beide Glieder der Gleichung (49) sind Linearformen der Ableitungen $\dot{D}_{\lambda\mu\nu}$ mit Koeffizienten, gebildet aus den verschiedenen Gröszen $D_{\lambda\mu\nu}$. Es genügt also die Gleichheit dieser Koeffizienten zu beweisen.

Ersetzt man wieder der Einfachheit halber q durch 7 so gilt:

$$(45) \quad \dots \quad H_7 = \Delta_4 E_{567} - \Delta_5 E_{467} + \Delta_6 E_{457} - \Delta_7 E_{456}$$

$$(25)\ (26) \quad . \quad \Delta_p = \nabla_{23p} \dot{D}_1 - \nabla_{13p} \dot{D}_2 + \nabla_{12p} \dot{D}_3 - \nabla_{123} \dot{D}_p$$

Somit ist wegen (48):

$$H_7 = \nabla^2_{123} \cdot \left\{ \begin{array}{l} (\dot{D}_1 \nabla_{234} - \dot{D}_2 \nabla_{134} + \dot{D}_3 \nabla_{124} - \dot{D}_4 \nabla_{123})\, G_{123567} - \\ - (\dot{D}_1 \nabla_{235} - \dot{D}_2 \nabla_{135} + \dot{D}_3 \nabla_{125} - \dot{D}_5 \nabla_{123})\, G_{123467} + \\ + (\dot{D}_1 \nabla_{236} - \dot{D}_2 \nabla_{136} + \dot{D}_3 \nabla_{126} - \dot{D}_6 \nabla_{123})\, G_{123457} - \\ - (\dot{D}_1 \nabla_{237} - \dot{D}_2 \nabla_{137} + \dot{D}_3 \nabla_{127} - \dot{D}_7 \nabla_{123})\, G_{123456} \end{array} \right\}$$

Also ergibt sich (49) sofort als richtig was die Koeffizienten von $\dot{D}_4 \dots \dot{D}_q$ betrifft; es genügt wegen der symmetrischen Anordnung der Indizes (123) dies auch noch für die Koeffizienten von $\dot{D}_3$ nachzuweisen, d.h. es soll die Beziehung:

$$\left. \begin{array}{l} \nabla_{123} G_{124567} - \nabla_{124} G_{123567} + \nabla_{125} G_{123467} - \nabla_{126} G_{123457} + \\ \qquad\qquad + \nabla_{127} G_{123456} = 0 \end{array} \right\} \quad (50)$$

identisch befriedigt werden.

Entwicklung nach LAPLACE gibt die Funktionen G als Linearformen der Gröszen $\Gamma_{\alpha\beta\gamma}$; die Koeffizienten dieser Gröszen in (50) sind quadratische Formen der Determinanten ∇, und müssen verschwinden. Die Symmetrieverhältnisse erlauben, die Betrachtung auf die Koeffizienten von Γ_{123}, Γ_{134} und Γ_{345} zu beschränken. Es soll also gelten:

$$- \nabla_{124} \nabla_{567} + \nabla_{125} \nabla_{467} - \nabla_{126} \nabla_{457} + \nabla_{127} \nabla_{456} = 0$$

bzw.:

$$\nabla_{125} \nabla_{267} - \nabla_{126} \nabla_{257} + \nabla_{127} \nabla_{256} = 0$$

und:

$$- \nabla_{126} \nabla_{127} + \nabla_{127} \nabla_{126} = 0.$$

Die letzte Gleichung ist trivial, die beiden ersten sind quadratische p-Relationen. Somit ist (49) bewiesen.

Es kann jetzt das allgemeine Integral K der Gleichungen (40) in einfacherer Gestalt dargestellt werden. Wegen der Voraussetzung über die Matrix $\| C_i\,(p) \|$ dürfen wir

$$E_{456} \not\equiv 0 \quad \dots\dots\dots \quad (51)$$

annehmen.

Der Hilfssatz 1 ergibt sodann:

$$K = \Phi \{(\triangle_p) \; ; \; (D_{\alpha,\beta\gamma})\} = \Psi \{(H_q) \; ; \; (D_{\alpha,\beta\gamma})\} \; (7 \leqq q \leqq m) \quad . \quad . \quad (52)$$

wo $(\triangle_p)$, (H_q), $(D_{\alpha,\beta\gamma})$ die Mengen der verschiedenen in Φ bzw. Ψ auftretenden Gröszen $\triangle$, H, D bezeichnen mögen.

Die Formel (52) lässt sich mittels (49) umformen. Es enthält ∇_{123} nur Gröszen $D_{\alpha,\beta\gamma}$, d.h. es ist:

$$K = K \{(R_{1 \ldots 6.\, q}) \; ; \; (D_{\alpha,\beta\gamma})\} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (53)$$

die *notwendige Gestalt* einer Differentialinvariante K.

Es ist darauf hinzuweisen dass man in (53) die ersten 6 Parametertripel $(\lambda_i \, \mu_i \, \nu_i)$ $(i = 1 \ldots 6)$ der verschiedenen in K auftretenden Gröszen R einen festen (willkürlichen) Wert geben kann. Diese 6 Tripel brauchen *nicht* explizite in der Darstellung (18) von K aufzutreten.

Man folgert dies sofort aus der, den quadratischen p-Relationen ähnlichen, Identität:

$$\left.\begin{aligned} & G_{1..6} \, R_{7890\,\alpha,\beta\gamma} - G_{1..57} \, R_{6890\,\alpha,\beta\gamma} + G_{1..58} \, R_{6790\,\alpha,\beta\gamma} - \\ - & G_{1..59} \, R_{6780\,\alpha,\beta\gamma} + G_{1..50} \, R_{6789\,\alpha,\beta\gamma} - G_{1..5\alpha} \, R_{67890,\beta\gamma} + \\ + & G_{1..5,\beta} \, R_{67890\,\alpha\gamma} - G_{1..5\gamma} \, R_{67890\,\alpha,\beta} = 0 \end{aligned}\right\} \quad . \quad (54)$$

wo einige der 13 Tripel $(\lambda_i \, \mu_i \, \nu_i)$ $(i = 1 \ldots 90 \, \alpha \, \beta \, \gamma)$ einander gleich sein können. Notwendig ist nur, wie aus (54) folgt, *dass die aus den Tripeln* $1 \ldots 6$ *gebildete Funktion* $G_{1 \ldots 6}$ *nicht identisch verschwindet.*

Diese Eigenschaft der ersten 6 Parametertripel der Funktionen R wird später eine wesentliche Vereinfachung des Problems herbeiführen.

§ 10. *Transformationsgleichungen.*

Die Gröszen G und R sind ziemlich verwickelte Funktionen der Ableitungen $D_{\lambda\mu\nu}$ und $\dot{D}_{\lambda\mu\nu}$, und es fragt sich jetzt:

„Bestehen für die Gröszen G und R Gleichungen der Gestalt:

$$G = G \{(\varepsilon_i), (\overline{G})\} \; ; \; R = R \{(\varepsilon_i), (\overline{R})\} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (55)$$

wenn die unabhängig Veränderlichen (x_i, t) einer Transformation der Gruppe $\mathfrak{G}_2$ unterworfen werden?" [Die Mengen (ε_i), $(\overline{G})$, $(\overline{R})$ sollen wieder die verschiedenen in G bezw. R auftretenden Gröszen ε_i, $\overline{G}$ und $\overline{R}$ andeuten].

Ein solches Verhalten ist nicht ohne weiteres ersichtlich. Zwar wissen wir aus dem Vorhergehenden:

$$G = G \{(\varepsilon_i), (\overline{D}_{\lambda\mu\nu})\} \; ; \; R = R \{(\varepsilon_i), (\overline{D}_{\lambda\mu\nu}), (\dot{\overline{D}}_{\lambda\mu\nu})\} \quad . \quad . \quad (56)$$

was für die Funktion G trivial ist, für die Funktion R aus dem Wegfallen der Transformationsparameter η_i und $\dot{\varepsilon}_i$ folgt; aber die Gleichung (55) besagt weit mehr als (56).

Die gestellte Frage ist zu bejahen. Zwecks ihrer Beantwortung seien erst einige Hilfssätze über eine Klasse von Funktionen bewiesen, Funktionen, die ich kurzweg als P-Funktionen andeuten will.

Definition. Es seien n Tripel $(u_i v_i w_i)$ $(i = 1 \ldots n;\ n$ willkürlich) von algebraisch-unabhängigen Variabeln $(u\, v\, w)$ gegeben. Eine Transformation T_2 der verallgemeinerten GALILEI-NEWTON-Gruppe $\mathfrak{G}_2$ (vgl. § 1) induziere eine orthogonale Transformation $(u_i v_i w_i) \rightarrow (\overline{u_i v_i w_i})$ mit Koeffizienten e_{ik}:

$$\left.\begin{aligned} u_i &= e_{11}\,\overline{u}_i + e_{12}\,\overline{v}_i + e_{13}\,\overline{w}_i \\ v_i &= e_{21}\,\overline{u}_i + e_{22}\,\overline{v}_i + e_{23}\,\overline{w}_i \\ w_i &= e_{31}\,\overline{u}_i + e_{32}\,\overline{v}_i + e_{33}\,\overline{w}_i \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots \quad (2')$$

Ferner seien die $3n$ Parameter $\lambda_i \mu_i \nu_i$ $(i = 1 \ldots n)$ ganze, nicht-negative Zahlen. Es soll sodann eine beliebige ganze und rationale Funktion F irgendwelcher Veränderlichen zur Klasse der P-Funktionen gehören, falls F durch eine Transformation T_2 der Veränderlichen $(x_i t)$ kogredient zum Produkt:

$$u_1^{\lambda_1} v_1^{\mu_1} w_1^{\nu_1} u_2^{\lambda_2} \ldots u_n^{\lambda_n} v_n^{\mu_n} w_n^{\nu_n}$$

transformiert wird.

Es wird also die Transformationsgleichung einer P-Funktion durch die n Parametertripel $(\lambda_i \mu_i \nu_i)$ genau bestimmt. Diese Tripel sind willkürlich, können also insbesondere einander gleich sein. Wird die Kogredienz bzgl. der Gruppe $\mathfrak{G}_0$ (vgl. § 1) durch das Symbol $\sim$ angedeutet, so kann man schreiben:

$$P\begin{bmatrix} \lambda_1 \ldots \lambda_n \\ \mu_1 \ldots \mu_n \\ \nu_1 \ldots \nu_n \end{bmatrix} \sim u_1^{\lambda_1} v_1^{\mu_1} w_1^{\nu_1} u_2^{\lambda_2} \ldots u_n^{\lambda_n} v_n^{\mu_n} w_n^{\nu_n} \quad \ldots \quad (57)$$

und die Transformationsgleichung lautet:

$$P\begin{bmatrix} \lambda_1 \ldots \lambda_n \\ \mu_1 \ldots \mu_n \\ \nu_1 \ldots \nu_n \end{bmatrix} = \sum_{(\alpha_1\beta_1\gamma_1)} \ldots \sum_{(\alpha_n\beta_n\gamma_n)} \pi\begin{pmatrix} \lambda_1\, \mu_1\, \nu_1 \\ \alpha_1\, \beta_1\, \gamma_1 \end{pmatrix} \ldots \pi\begin{pmatrix} \lambda_n\, \mu_n\, \nu_n \\ \alpha_n\, \beta_n\, \gamma_n \end{pmatrix} \overline{P}\begin{bmatrix} \alpha_1 \ldots \alpha_n \\ \beta_1 \ldots \beta_n \\ \gamma_1 \ldots \gamma_n \end{bmatrix} \quad (58)$$

wo die Summation zu erstrecken ist über alle Zahlentripel $(\alpha_i \beta_i \gamma_i)$ welche den Gleichungen:

$$\alpha_i \geqq 0;\ \beta_i \geqq 0;\ \gamma_i \geqq 0;\ \alpha_i + \beta_i + \gamma_i = \lambda_i + \mu_i + \nu_i = \sigma_i \geqq 0 \quad (58')$$

genügen.

Die Funktion π ist wegen (2′) (57) bestimmt durch die Gleichungen:

$$\pi\begin{pmatrix} \lambda\, \mu\, \nu \\ \alpha\, \beta\, \gamma \end{pmatrix} = \sum_{(\eta_{11} \ldots \eta_{33})} \frac{\lambda!\, \mu!\, \nu!}{\eta_{11}!\, \eta_{12}! \ldots \eta_{33}!}\, e_{11}^{\eta_{11}} e_{12}^{\eta_{12}} \ldots e_{33}^{\eta_{33}} \quad \ldots \quad (59)$$

$$\left.\begin{gathered} \eta_{ik} \geqq 0 \\ \eta_{11} + \eta_{12} + \eta_{13} = \lambda \qquad \eta_{21} + \eta_{22} + \eta_{23} = \mu \qquad \eta_{31} + \eta_{32} + \eta_{33} = \nu \\ \eta_{11} + \eta_{21} + \eta_{31} = \alpha \qquad \eta_{12} + \eta_{22} + \eta_{32} = \beta \qquad \eta_{13} + \eta_{23} + \eta_{33} = \gamma \end{gathered}\right\} \quad (59')$$

Ein einfachstes Beispiel einer P-Funktion bietet die Grösze:

$$D_{\lambda\mu\nu}=\frac{\partial^{\lambda+\mu+\nu}\varphi}{\partial x_1^{\lambda}\,\partial x_2^{\mu}\,\partial x_3^{\nu}}.$$

Sie besitzt wegen (13) die Transformationsgleichung:

$$D_{\lambda\mu\nu}=\sum_{(\alpha\beta\gamma)}\pi\begin{pmatrix}\lambda\,\mu\,\nu\\ \alpha\,\beta\,\gamma\end{pmatrix}\overline{D}_{\alpha\beta\gamma}\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\quad(60)$$

und ist zu $u^{\lambda}\,v^{\mu}\,w^{\nu}$ kogredient.

Hilfssatz 4. Die Summe zweier, von denselben Parametertripeln abhängigen P-Funktionen ist wieder eine P-Funktion:

$$P_1\begin{bmatrix}\lambda_1\ldots\lambda_n\\ \mu_1\ldots\mu_n\\ \nu_1\ldots\nu_n\end{bmatrix}+P_2\begin{bmatrix}\lambda_1\ldots\lambda_n\\ \mu_1\ldots\mu_n\\ \nu_1\ldots\nu_n\end{bmatrix}=P_3\begin{bmatrix}\lambda_1\ldots\lambda_n\\ \mu_1\ldots\mu_n\\ \nu_1\ldots\nu_n\end{bmatrix}.$$

Beweis. Ist wegen (58) trivial.

Hilfssatz 5. Das Produkt zweier P-Funktionen ist eine P-Funktion:

$$P_1\begin{bmatrix}\lambda_1\ldots\lambda_n\\ \mu_1\ldots\mu_n\\ \nu_1\ldots\nu_n\end{bmatrix}.\;P_2\begin{bmatrix}\lambda_{n+1}\ldots\lambda_m\\ \mu_{n+1}\ldots\mu_m\\ \nu_{n+1}\ldots\nu_m\end{bmatrix}=P_3\begin{bmatrix}\lambda_1\ldots\lambda_m\\ \mu_1\ldots\mu_m\\ \nu_1\ldots\nu_m\end{bmatrix}.$$

Beweis. Ist wegen (58) trivial.

Das nächste Ziel ist jetzt, zu beweisen, dass die Funktionen G und R P-Funktionen sind; alsdann wird auch die Gleichung (55) erfüllt, wie aus dem Obigem ersichtlich.

§ 11. *Spezielle P-Funktionen.*

Hilfssatz 6. Die Funktion ∇ ist eine P-Funktion: [1])

$$\nabla_{123}=\nabla\begin{bmatrix}\lambda_1\;\lambda_2\;\lambda_3\\ \mu_1\;\mu_2\;\mu_3\\ \nu_1\;\nu_2\;\nu_3\end{bmatrix}\sim u_1^{\lambda_1}\,v_1^{\mu_1}\ldots w_3^{\nu_3}.$$

[1]) Anmerkung: für uneigentlich orthogonale Transformationen (2′) kommt noch ein Zeichenwechsel in der Transformationsgleichung der Funktion ∇ hinzu; dasselbe gilt für die Transformationsgleichung der Funktion r_{ikl}; in der G-Funktion heben sich diese Zeichenwechsel gegenseitig auf. Es werden hier nur eigentlich orthogonale Transformationen (2′) betrachtet.

Beweis. Es ist wegen (11), (24):

$$\nabla_{123} = \frac{\partial (D_1\, D_2\, D_3)}{\partial (x_1\, x_2\, x_3)} =$$

$$= \begin{vmatrix} e_{11}\frac{\partial D_1}{\partial \bar{x}_1} + e_{12}\frac{\partial D_1}{\partial \bar{x}_2} + e_{13}\frac{\partial D_1}{\partial \bar{x}_3} & \ldots & e_{11}\frac{\partial D_3}{\partial \bar{x}_1} + e_{12}\frac{\partial D_3}{\partial \bar{x}_2} + e_{13}\frac{\partial D_3}{\partial \bar{x}_3} \\ e_{21}\frac{\partial D_1}{\partial \bar{x}_1} + e_{22}\frac{\partial D_1}{\partial \bar{x}_2} + e_{23}\frac{\partial D_1}{\partial \bar{x}_3} & \ldots & e_{21}\frac{\partial D_3}{\partial \bar{x}_1} + e_{22}\frac{\partial D_3}{\partial \bar{x}_2} + e_{23}\frac{\partial D_3}{\partial \bar{x}_3} \\ e_{31}\frac{\partial D_1}{\partial \bar{x}_1} + e_{32}\frac{\partial D_1}{\partial \bar{x}_2} + e_{33}\frac{\partial D_1}{\partial \bar{x}_3} & \ldots & e_{31}\frac{\partial D_3}{\partial \bar{x}_1} + e_{32}\frac{\partial D_3}{\partial \bar{x}_2} + e_{33}\frac{\partial D_3}{\partial \bar{x}_3} \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} e_{11} & e_{12} & e_{13} \\ e_{21} & e_{22} & e_{23} \\ e_{31} & e_{32} & e_{33} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} \frac{\partial D_1}{\partial \bar{x}_1} & \frac{\partial D_2}{\partial \bar{x}_1} & \frac{\partial D_3}{\partial \bar{x}_1} \\ \frac{\partial D_1}{\partial \bar{x}_2} & \frac{\partial D_2}{\partial \bar{x}_2} & \frac{\partial D_3}{\partial \bar{x}_2} \\ \frac{\partial D_1}{\partial \bar{x}_3} & \frac{\partial D_2}{\partial \bar{x}_3} & \frac{\partial D_3}{\partial \bar{x}_3} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{\partial D_1}{\partial \bar{x}_1} & \frac{\partial D_2}{\partial \bar{x}_1} & \frac{\partial D_3}{\partial \bar{x}_1} \\ \frac{\partial D_1}{\partial \bar{x}_2} & \frac{\partial D_2}{\partial \bar{x}_2} & \frac{\partial D_3}{\partial \bar{x}_3} \\ \frac{\partial D_1}{\partial \bar{x}_3} & \frac{\partial D_2}{\partial \bar{x}_3} & \frac{\partial D_3}{\partial \bar{x}_3} \end{vmatrix}$$

Wendet man hierauf die Formel (60) an, so bekommt man:

$$\nabla \begin{bmatrix} \lambda_1\, \lambda_2\, \lambda_3 \\ \mu_1\, \mu_2\, \mu_3 \\ \nu_1\, \nu_2\, \nu_3 \end{bmatrix} = \begin{vmatrix} \sum\limits_{(\alpha_1\beta_1\gamma_1)} \pi\begin{pmatrix} \lambda_1\, \mu_1\, \nu_1 \\ \alpha_1\, \beta_1\, \gamma_1 \end{pmatrix} \frac{\partial \bar{D}_{\alpha_1\beta_1\gamma_1}}{\partial \bar{x}_1} & \ldots & \sum\limits_{(\alpha_3\beta_3\gamma_3)} \pi\begin{pmatrix} \lambda_3\, \mu_3\, \nu_3 \\ \alpha_3\, \beta_3\, \gamma_3 \end{pmatrix} \frac{\partial \bar{D}_{\alpha_3\beta_3\gamma_3}}{\partial \bar{x}_1} \\ \sum\limits_{(\alpha_1\beta_1\gamma_1)} \pi\begin{pmatrix} \lambda_1\, \mu_1\, \nu_1 \\ \alpha_1\, \beta_1\, \gamma_1 \end{pmatrix} \frac{\partial \bar{D}_{\alpha_1\beta_1\gamma_1}}{\partial \bar{x}_2} & \ldots & \sum\limits_{(\alpha_3\beta_3\gamma_3)} \pi\begin{pmatrix} \lambda_3\, \mu_3\, \nu_3 \\ \alpha_3\, \beta_3\, \gamma_3 \end{pmatrix} \frac{\partial \bar{D}_{\alpha_3\beta_3\gamma_3}}{\partial \bar{x}_2} \\ \sum\limits_{(\alpha_1\beta_1\gamma_1)} \pi\begin{pmatrix} \lambda_1\, \mu_1\, \nu_1 \\ \alpha_1\, \beta_1\, \gamma_1 \end{pmatrix} \frac{\partial \bar{D}_{\alpha_1\beta_1\gamma_1}}{\partial \bar{x}_3} & \ldots & \sum\limits_{(\alpha_3\beta_3\gamma_3)} \pi\begin{pmatrix} \lambda_3\, \mu_3\, \nu_3 \\ \alpha_3\, \beta_3\, \gamma_3 \end{pmatrix} \frac{\partial \bar{D}_{\alpha_3\beta_3\gamma_3}}{\partial \bar{x}_3} \end{vmatrix} =$$

$$= \sum_{(\alpha_1\beta_1\gamma_1)} \ldots \sum_{(\alpha_3\beta_3\gamma_3)} \pi\begin{pmatrix} \lambda_1\, \mu_1\, \nu_1 \\ \alpha_1\, \beta_1\, \gamma_1 \end{pmatrix} \ldots \pi\begin{pmatrix} \lambda_3\, \mu_3\, \nu_3 \\ \alpha_3\, \beta_3\, \gamma_3 \end{pmatrix} \frac{\partial (\bar{D}_{\alpha_1\beta_1\gamma_1}\, \bar{D}_{\alpha_2\beta_2\gamma_2}\, \bar{D}_{\alpha_3\beta_3\gamma_3})}{\partial (\bar{x}_1\, \bar{x}_2\, \bar{x}_3)} =$$

$$= \sum_{(\alpha_1\beta_1\gamma_1)} \ldots \sum_{(\alpha_3\beta_3\gamma_3)} \pi\begin{pmatrix} \lambda_1\, \mu_1\, \nu_1 \\ \alpha_1\, \beta_1\, \gamma_1 \end{pmatrix} \ldots \pi\begin{pmatrix} \lambda_3\, \mu_3\, \nu_3 \\ \alpha_3\, \beta_3\, \gamma_3 \end{pmatrix} \bar{\nabla} \begin{bmatrix} \alpha_1\, \alpha_2\, \alpha_3 \\ \beta_1\, \beta_2\, \beta_3 \\ \gamma_1\, \gamma_2\, \gamma_3 \end{bmatrix}$$

q.e.d.

Hilfssatz 7. Die Funktion Γ_{ikl} ist eine P-Funktion:

$$\Gamma_{123} = \Gamma \begin{bmatrix} \lambda_1\, \lambda_2\, \lambda_3 \\ \mu_1\, \mu_2\, \mu_3 \\ \nu_1\, \nu_2\, \nu_3 \end{bmatrix} \sim u_1^{\lambda_1}\, v_1^{\mu_1} \ldots w_3^{\nu_3}.$$

Beweis. Die zu beweisende Formel lautet:

$$\Gamma\begin{bmatrix}\lambda_1 & \lambda_2 & \lambda_3\\ \mu_1 & \mu_2 & \mu_3\\ \nu_1 & \nu_2 & \nu_3\end{bmatrix} = \sum_{(\alpha_1\beta_1\lambda_1)} \cdots \sum_{(\alpha_3\beta_3\gamma_3)} \pi\begin{pmatrix}\lambda_1 & \mu_1 & \nu_1\\ \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1\end{pmatrix} \cdots \pi\begin{pmatrix}\lambda_3 & \mu_3 & \nu_3\\ \alpha_3 & \beta_3 & \gamma_3\end{pmatrix} \overline{\Gamma}\begin{bmatrix}\alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3\\ \beta_1 & \beta_2 & \beta_3\\ \gamma_1 & \gamma_2 & \gamma_3\end{bmatrix} \qquad (61)$$

wo wegen (38), (42), (44):

$$\Gamma\begin{bmatrix}\lambda_1 & \lambda_2 & \lambda_3\\ \mu_1 & \mu_2 & \mu_3\\ \nu_1 & \nu_2 & \nu_3\end{bmatrix} =$$

$$\begin{vmatrix} \mu_1 D_{\lambda_1,\mu_1-1,\nu_1+1} - \nu_1 D_{\lambda_1,\mu_1+1,\nu_1-1} & \cdots & \mu_3 D_{\lambda_3,\mu_3-1,\nu_3+1} - \nu_3 D_{\lambda_3,\mu_3+1,\nu_3-1}\\ \nu_1 D_{\lambda_1+1,\mu_1,\nu_1-1} - \lambda_1 D_{\lambda_1-1,\mu_1,\nu_1+1} & \cdots & \nu_3 D_{\lambda_3+1,\mu_3,\nu_3-1} - \lambda_3 D_{\lambda_3-1,\mu_3,\nu_3+1}\\ \lambda_1 D_{\lambda_1-1,\mu_1+1,\nu_1} - \mu_1 D_{\lambda_1+1,\mu_1-1,\nu_1} & \cdots & \lambda_3 D_{\lambda_3-1,\mu_3+1,\nu_3} - \mu_3 D_{\lambda_3+1,\mu_3-1,\nu_3} \end{vmatrix} \;. \qquad (62)$$

und wegen (58′):

$$\alpha_i + \beta_i + \gamma_i = \lambda_i + \mu_i + \nu_i = \sigma_i \geqq 0 \qquad (i = 1, 2, 3) \quad . \quad (62')$$

ist. Es ist gleichgültig ob die Zahlen σ_i von einander verschieden sind oder nicht.

Wendet man die Transformation (60) an, so erscheinen beide Glieder in (61) als kubische Formen von Gröszen $\overline{D}_{\lambda\mu\nu}$. Es ist daher für das erste bzw. zweite Glied von (61) zu schreiben:

$$\left.\begin{aligned} &\sum_{(p_1q_1r_1)} \cdots \sum_{(p_3q_3r_3)} c\begin{bmatrix}p_1 & p_2 & p_3\\ q_1 & q_2 & q_3\\ r_1 & r_2 & r_3\end{bmatrix} \overline{D}_{p_1q_1r_1}\overline{D}_{p_2q_2r_2}\overline{D}_{p_3q_3r_3}\\ \text{und:}\quad &\\ &\sum_{(p_1q_1r_1)} \cdots \sum_{(p_3q_3r_3)} c'\begin{bmatrix}p_1 & p_2 & p_3\\ q_1 & q_2 & q_3\\ r_1 & r_2 & r_3\end{bmatrix} \overline{D}_{p_1q_1r_1}\overline{D}_{p_2q_2r_2}\overline{D}_{p_3q_3r_3} \end{aligned}\right\} \quad . \; . \; . \quad (63)$$

wo die Summation über alle (pqr), für welche:

$$p_i \geqq 0\,; \quad q_i \geqq 0\,; \quad r_i \geqq 0\,; \quad p_i + q_i + r_i = \sigma_i \qquad (i = 1, 2, 3) \quad (63')$$

zu erstrecken ist. Man hat dann nur zu beweisen:

$$c\begin{bmatrix}p_1 & p_2 & p_3\\ q_1 & q_2 & q_3\\ r_1 & r_2 & r_3\end{bmatrix} = c'\begin{bmatrix}p_1 & p_2 & p_3\\ q_1 & q_2 & q_3\\ r_1 & r_2 & r_3\end{bmatrix} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (64)$$

Aus (60), (62), (63) erhält man die Darstellung:

$$
\begin{aligned}
c\begin{bmatrix} p_1\,p_2\,p_3 \\ q_1\,q_2\,q_3 \\ r_1\;r_2\;r_3 \end{bmatrix} &= \\
&= \begin{vmatrix}
\dfrac{\partial(\mu_1 D_{\lambda_1,\mu_1-1,\nu_1+1}-\nu_1 D_{\lambda_1,\mu_1+1,\nu_1-1})}{\partial\overline{D}_{p_1q_1r_1}} \cdot\cdot \dfrac{\partial(\mu_3 D_{\lambda_3,\mu_3-1,\nu_3+1}-\nu_3 D_{\lambda_3,\mu_3+1,\nu_3-1})}{\partial\overline{D}_{p_3q_3r_3}} \\
\dfrac{\partial(\nu_1 D_{\lambda_1+1,\mu_1,\nu_1-1}-\lambda_1 D_{\lambda_1-1,\mu_1,\nu_1+1})}{\partial\overline{D}_{p_1q_1r_1}} \cdot\cdot \dfrac{\partial(\nu_3 D_{\lambda_3+1,\mu_3,\nu_3-1}-\lambda_3 D_{\lambda_3-1,\mu_3,\nu_3+1})}{\partial\overline{D}_{p_3q_3r_3}} \\
\dfrac{\partial(\lambda_1 D_{\lambda_1-1,\mu_1+1,\nu_1}-\mu_1 D_{\lambda_1+1,\mu_1-1,\nu_1})}{\partial\overline{D}_{p_1q_1r_1}} \cdot\cdot \dfrac{\partial(\lambda_3 D_{\lambda_3-1,\mu_3+1,\nu_3}-\mu_3 D_{\lambda_3+1,\mu_3-1,\nu_3})}{\partial\overline{D}_{p_3q_3r_3}}
\end{vmatrix} = \\
&= \begin{vmatrix}
\mu_1\,\pi\begin{pmatrix}\lambda_1 & \mu_1-1 & \nu_1+1 \\ p_1 & q_1 & r_1\end{pmatrix} - \nu_1\,\pi\begin{pmatrix}\lambda_1 & \mu_1+1 & \nu_1-1 \\ p_1 & q_1 & r_1\end{pmatrix} \cdots\cdot \\
\cdots\cdot\ \mu_3\,\pi\begin{pmatrix}\lambda_3 & \mu_3-1 & \nu_3+1 \\ p_3 & q_3 & r_3\end{pmatrix} - \nu_3\,\pi\begin{pmatrix}\lambda_3 & \mu_3+1 & \nu_3-1 \\ p_3 & q_3 & r_3\end{pmatrix} \\
\nu_1\,\pi\begin{pmatrix}\lambda_1+1 & \mu_1 & \nu_1-1 \\ p_1 & q_1 & r_1\end{pmatrix} - \lambda_1\,\pi\begin{pmatrix}\lambda_1-1 & \mu_1 & \nu_1+1 \\ p_1 & q_1 & r_1\end{pmatrix} \cdots\cdot \\
\cdots\cdot\ \nu_3\,\pi\begin{pmatrix}\lambda_3+1 & \mu_3 & \nu_3-1 \\ p_3 & q_3 & r_3\end{pmatrix} - \lambda_3\,\pi\begin{pmatrix}\lambda_3-1 & \mu_3 & \nu_3+1 \\ p_3 & q_3 & r_3\end{pmatrix} \\
\lambda_1\,\pi\begin{pmatrix}\lambda_1-1 & \mu_1+1 & \nu_1 \\ p_1 & q_1 & r_1\end{pmatrix} - \mu_1\,\pi\begin{pmatrix}\lambda_1+1 & \mu_1-1 & \nu_1 \\ p_1 & q_1 & r_1\end{pmatrix} \cdots\cdot \\
\cdots\cdot\ \lambda_3\,\pi\begin{pmatrix}\lambda_3-1 & \mu_3+1 & \nu_3 \\ p_3 & q_3 & r_3\end{pmatrix} - \mu_3\,\pi\begin{pmatrix}\lambda_3+1 & \mu_3-1 & \nu_3 \\ p_3 & q_3 & r_3\end{pmatrix}
\end{vmatrix}
\end{aligned}
\qquad (65)
$$

Eine ähnliche Darstellung läszt sich für c' gewinnen. Man bekommt:

$$
\begin{aligned}
c'\begin{bmatrix} p_1\,p_2\,p_3 \\ q_1\,q_2\,q_3 \\ r_1\;r_2\;r_3 \end{bmatrix} &= \sum_{(\alpha_1\beta_1\gamma_1)} \cdots \sum_{(\alpha_3\beta_3\gamma_3)} \pi\begin{pmatrix}\lambda_1 & \mu_1 & \nu_1 \\ \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1\end{pmatrix} \cdots \pi\begin{pmatrix}\lambda_3 & \mu_3 & \nu_3 \\ \alpha_3 & \beta_3 & \gamma_3\end{pmatrix} \times \\
&\times \begin{vmatrix}
\dfrac{\partial(\beta_1 \overline{D}_{\alpha_1,\beta_1-1,\gamma_1+1}-\gamma_1 \overline{D}_{\alpha_1,\beta_1+1,\gamma_1-1})}{\partial\overline{D}_{p_1q_1r_1}} \cdot\cdot \dfrac{\partial(\beta_3 \overline{D}_{\alpha_3,\beta_3-1,\gamma_3+1}-\gamma_3 \overline{D}_{\alpha_3,\beta_3+1,\gamma_3-1})}{\partial\overline{D}_{p_3q_3r_3}} \\
\dfrac{\partial(\gamma_1 \overline{D}_{\alpha_1+1,\beta_1,\gamma_1-1}-\alpha_1 \overline{D}_{\alpha_1-1,\beta_1,\gamma_1+1})}{\partial\overline{D}_{p_1q_1r_1}} \cdot\cdot \dfrac{\partial(\gamma_3 \overline{D}_{\alpha_3+1,\beta_3,\gamma_3-1}-\alpha_3 \overline{D}_{\alpha_3-1,\beta_3,\gamma_3+1})}{\partial\overline{D}_{p_3q_3r_3}} \\
\dfrac{\partial(\alpha_1 \overline{D}_{\alpha_1-1,\beta_1+1,\gamma_1}-\beta_1 \overline{D}_{\alpha_1+1,\beta_1-1,\gamma_1}}{\partial\overline{D}_{p_1q_1r_1}} \cdot\cdot \dfrac{\partial(\alpha_3 \overline{D}_{\alpha_3-1,\beta_3+1,\gamma_3}-\beta_3 \overline{D}_{\alpha_3+1,\beta_3-1,\gamma_3})}{\partial\overline{D}_{p_3q_3r_3}}
\end{vmatrix} = \\
&= \sum_{(\alpha_1\beta_1\gamma_1)} \cdots \sum_{(\alpha_3\beta_3\gamma_3)} \pi\begin{pmatrix}\lambda_1 & \mu_1 & \nu_1 \\ \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1\end{pmatrix} \cdots \pi\begin{pmatrix}\lambda_3 & \mu_3 & \nu_3 \\ \alpha_3 & \beta_3 & \gamma_3\end{pmatrix} \times
\end{aligned}
\qquad (66)
$$

$$\left.\begin{array}{l}\times\begin{vmatrix}\beta_1\,\delta_{p_1,\alpha_1}\,\delta_{q_1,\beta_1-1}\,\delta_{r_1,\gamma_1+1}-\gamma_1\,\delta_{p_1,\alpha_1}\,\delta_{q_1,\beta_1+1}\,\delta_{r_1,\gamma_1-1}\ldots\\ \qquad\ldots\beta_3\,\delta_{p_3,\alpha_3}\,\delta_{q_3,\beta_3-1}\,\delta_{r_3,\gamma_3+1}-\gamma_3\,\delta_{p_3,\alpha_3}\,\delta_{q_3,\beta_3+1}\,\delta_{r_3,\gamma_3-1}\\ \gamma_1\,\delta_{p_1,\alpha_1+1}\,\delta_{q_1,\beta_1}\,\delta_{r_1,\gamma_1-1}-\alpha_1\,\delta_{p_1,\alpha_1-1}\,\delta_{q_1,\beta_1}\,\delta_{r_1,\gamma_1+1}\ldots\\ \qquad\ldots\gamma_3\,\delta_{p_3,\alpha_3+1}\,\delta_{q_3,\beta_3}\,\delta_{r_3,\gamma_3-1}-\alpha_3\,\delta_{p_3,\alpha_3-1}\,\delta_{q_3,\beta_3}\,\delta_{r_3,\gamma_3+1}\\ \alpha_1\,\delta_{p_1,\alpha_1-1}\,\delta_{q_1,\beta_1+1}\,\delta_{r_1,\gamma_1}-\beta_1\,\delta_{p_1,\alpha_1+1}\,\delta_{q_1,\beta_1-1}\,\delta_{r_1,\gamma_1}\ldots\\ \qquad\ldots\alpha_3\,\delta_{p_3,\alpha_3-1}\,\delta_{q_3,\beta_3+1}\,\delta_{r_3,\nu_3}-\beta_3\,\delta_{p_3,\alpha_3+1}\,\delta_{q_3,\beta_3-1}\,\delta_{r_3,\gamma_3}\end{vmatrix}=\\[2ex] =\begin{vmatrix}(q_1+1)\,\pi\begin{pmatrix}\lambda_1 & \mu_1 & \nu_1\\ p_1 & q_1+1 & r_1-1\end{pmatrix}-(r_1+1)\,\pi\begin{pmatrix}\lambda_1 & \mu_1 & \nu_1\\ p_1 & q_1-1 & r_1+1\end{pmatrix}\ldots\\ \ldots(q_3+1)\,\pi\begin{pmatrix}\lambda_3 & \mu_3 & \nu_3\\ p_3 & q_3+1 & r_3-1\end{pmatrix}-(r_3+1)\,\pi\begin{pmatrix}\lambda_3 & \mu_3 & \nu_3\\ p_3 & q_3-1 & r_3+1\end{pmatrix}\\ (r_1+1)\,\pi\begin{pmatrix}\lambda_1 & \mu_1 & \nu_1\\ p_1-1 & q_1 & r_1+1\end{pmatrix}-(p_1+1)\,\pi\begin{pmatrix}\lambda_1 & \mu_1 & \nu_1\\ p_1+1 & q_1 & r_1-1\end{pmatrix}\ldots\\ \ldots(r_3+1)\,\pi\begin{pmatrix}\lambda_3 & \mu_3 & \nu_3\\ p_3-1 & q_3 & r_3+1\end{pmatrix}-(p_3+1)\,\pi\begin{pmatrix}\lambda_3 & \mu_3 & \nu_3\\ p_3+1 & q_3 & r_3-1\end{pmatrix}\\ (p_1+1)\,\pi\begin{pmatrix}\lambda_1 & \mu_1 & \nu_1\\ p_1+1 & q_1-1 & r_1\end{pmatrix}-(q_1+1)\,\pi\begin{pmatrix}\lambda_1 & \mu_1 & \nu_1\\ p_1-1 & q_1+1 & r_1\end{pmatrix}\ldots\\ \ldots(p_3+1)\,\pi\begin{pmatrix}\lambda_3 & \mu_3 & \nu_3\\ p_3+1 & q_3-1 & r_3\end{pmatrix}-(q_3+1)\,\pi\begin{pmatrix}\lambda_3 & \mu_3 & \nu_3\\ p_3-1 & q_3+1 & r_3\end{pmatrix}\end{vmatrix}\end{array}\right\}\quad(66)$$

Hier ist wieder

$$\delta_{ik}=\begin{cases}0 \text{ für } i\neq k\\ 1 \quad „ \quad i=k.\end{cases}$$

Für negative Argumentwerte ist die Funktion π in (66) gleich Null zu setzen.

Es genügt jetzt die Gleichheit der Determinanten (65), (66) zu beweisen. Gemäss (59), (59′) war die Funktion π für nicht-negative Argumentwerte bestimmt durch die Gleichung:

$$\pi\begin{pmatrix}\lambda\,\mu\,\nu\\ \alpha\,\beta\,\gamma\end{pmatrix}=\frac{\partial\,(u^\lambda\,v^\mu\,w^\nu)}{\partial\,(\bar{u}^\alpha\,\bar{v}^\beta\,\bar{w}^\gamma)};\ \alpha+\beta+\gamma=\lambda+\mu+\nu=\sigma\geqq 0\,.\quad .\quad (67)$$

wenn die Veränderlichen $(u\,v\,w)$ durch eine Gleichung (2′) mit den Veränderlichen $(\bar{u}\,\bar{v}\,\bar{w})$ zusammenhängen.

Es sei für *willkürliche* nicht-negative ganze Zahlen $(\alpha,\,\beta\ldots\nu)$:

$$\Pi^{\lambda\mu\nu}_{\alpha\beta\gamma}=\frac{\partial^{\alpha+\beta+\gamma}\,(u^\lambda\,v^\mu\,w^\nu)}{\partial\bar{u}^\alpha\,\partial\bar{v}^\beta\,\partial\bar{w}^\gamma}.\quad .\quad .\quad .\quad .\quad .\quad .\quad (68)$$

also für $\alpha+\beta+\gamma=\lambda+\mu+\nu$:

$$(67)\quad .\quad .\quad .\quad .\quad .\quad .\quad .\quad .\quad \pi\begin{pmatrix}\lambda\,\mu\,\nu\\ \alpha\,\beta\,\gamma\end{pmatrix}=\frac{1}{\alpha!\,\beta!\,\gamma!}\,\Pi^{\lambda\mu\nu}_{\alpha\beta\gamma}\,.\quad .\quad .\quad .\quad .\quad .\quad .\quad (67')$$

Dies eingetragen in (65), (66) gibt für die zu beweisende Relation die Gestalt:

$$\left.\begin{aligned}
&\begin{vmatrix}
\mu_1\, \Pi^{\lambda_1,\mu_1-1,\nu_1+1}_{p_1q_1r_1} - \nu_1\, \Pi^{\lambda_1,\mu_1+1,\nu_1-1}_{p_1q_1r_1} & \dots & \mu_3\, \Pi^{\lambda_3,\mu_3-1,\nu_3+1}_{p_3q_3r_3} - \nu_3\, \Pi^{\lambda_3,\mu_3+1,\nu_3-1}_{p_3q_3r_3} \\
\nu_1\, \Pi^{\lambda_1+1,\mu_1,\nu_1-1}_{p_1q_1r_1} - \lambda_1\, \Pi^{\lambda_1-1,\mu_1,\nu_1+1}_{p_1q_1r_1} & \dots & \nu_3\, \Pi^{\lambda_3+1,\mu_3,\nu_3-1}_{p_3q_3r_3} - \lambda_3\, \Pi^{\lambda_3-1,\mu_3,\nu_3+1}_{p_3q_3r_3} \\
\lambda_1\, \Pi^{\lambda_1-1,\mu_1+1,\nu_1}_{p_1q_1r_1} - \mu_1\, \Pi^{\lambda_1+1,\mu_1-1,\nu_1}_{p_1q_1r_1} & \dots & \lambda_3\, \Pi^{\lambda_3-1,\mu_3+1,\nu_3}_{p_3q_3r_3} - \mu_3\, \Pi^{\lambda_3+1,\mu_3-1,\nu_3}_{p_3q_3r_3}
\end{vmatrix} = \\
= &\begin{vmatrix}
r_1\, \Pi^{\lambda_1\mu_1\nu_1}_{p_1,q_1+1,r_1-1} - q_1\, \Pi^{\lambda_1\mu_1\nu_1}_{p_1,q_1-1,r_1+1} & \dots & r_3\, \Pi^{\lambda_3\mu_3\nu_3}_{p_3,q_3+1,r_3-1} - q_3\, \Pi^{\lambda_3\mu_3\nu_3}_{p_3,q_3-1,r_3+1} \\
p_1\, \Pi^{\lambda_1\mu_1\nu_1}_{p_1-1,q_1,r_1+1} - r_1\, \Pi^{\lambda_1\mu_1\nu_1}_{p_1+1,q_1,r_1-1} & \dots & p_3\, \Pi^{\lambda_3\mu_3\nu_3}_{p_3-1,q_3,r_3+1} - r_3\, \Pi^{\lambda_3\mu_3\nu_3}_{p_3+1,q_3,r_3-1} \\
q_1\, \Pi^{\lambda_1\mu_1\nu_1}_{p_1+1,q_1-1,r_1} - p_1\, \Pi^{\lambda_1\mu_1\nu_1}_{p_1-1,q_1+1,r_1} & \dots & q_3\, \Pi^{\lambda_3\mu_3\nu_3}_{p_3+1,q_3-1,r_3} - p_3\, \Pi^{\lambda_3\mu_3\nu_3}_{p_3-1,q_3+1,r_3}
\end{vmatrix}
\end{aligned}\right\} \quad (69)$$

Mittels einiger Rekursionsformeln für Π bzgl. der oberen bzw. unteren Indizes beweist man leicht die für $\lambda + \mu + \nu = p + q + r$ gültigen Beziehungen:

$$\left.\begin{aligned}
r\, \Pi^{\lambda\mu\nu}_{p,q+1,r-1} - q\, \Pi^{\lambda\mu\nu}_{p,q-1,r+1} &= e_{11}\, \Omega_1 + e_{21}\, \Omega_2 + e_{31}\, \Omega_3 \\
p\, \Pi^{\lambda\mu\nu}_{p-1,q,r+1} - r\, \Pi^{\lambda\mu\nu}_{p+1,q,r-1} &= e_{12}\, \Omega_1 + e_{22}\, \Omega_2 + e_{32}\, \Omega_3 \\
q\, \Pi^{\lambda\mu\nu}_{p+1,q-1,r} - p\, \Pi^{\lambda\mu\nu}_{p-1,q+1,r} &= e_{13}\, \Omega_1 + e_{23}\, \Omega_2 + e_{33}\, \Omega_3
\end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad (70)$$

wo zur Abkürzung geschrieben ist:

$$\left.\begin{aligned}
\Omega_1 &= \mu\, \Pi^{\lambda,\mu-1,\nu+1}_{pqr} - \nu\, \Pi^{\lambda,\mu+1,\nu-1}_{pqr} \\
\Omega_2 &= \nu\, \Pi^{\lambda+1,\mu,\nu-1}_{pqr} - \lambda\, \Pi^{\lambda-1,\mu,\nu+1}_{pqr} \\
\Omega_3 &= \lambda\, \Pi^{\lambda-1,\mu+1,\nu}_{pqr} - \mu\, \Pi^{\lambda+1,\mu-1,\nu}_{pqr}
\end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (70')$$

Sodann ergeben (70), der Produktsatz der Determinanten und die Orthogonalität der e_{ik} die Richtigkeit von (69), w.z.b.w.

Satz 3. Die Funktion G ist eine P-Funktion:

$$G_{1\dots 6} = G \begin{bmatrix} \lambda_1 \dots \lambda_6 \\ \mu_1 \dots \mu_6 \\ \nu_1 \dots \nu_6 \end{bmatrix} \sim u_1^{\lambda_1}\, v_1^{\mu_1} \dots w_6^{\nu_6} \,.$$

Beweis. Der Satz ist eine unmittelbare Folge der Hilfssätze 4, 5, 6, 7 und der LAPLACE-Zerlegung der Determinante (46).

Satz. 4. Die Funktion R ist eine P-Funktion:

$$R_{1\ldots 7} = R\begin{bmatrix} \lambda_1 \ldots \lambda_7 \\ \mu_1 \ldots \mu_7 \\ \nu_1 \ldots \nu_7 \end{bmatrix} \sim u_1^{\lambda_1} v_1^{\mu_1} \ldots w_7^{\nu_7}.$$

Beweis. Zunächst ändert man den Wert der Determinante (47) nicht, wenn in der 7^{ten} Reihe die Gröszen $\dot{D}_{\lambda\mu\nu}$ durch $\frac{\partial D_{\lambda\mu\nu}}{\partial \bar{t}_{(\epsilon)}}$ ersetzt werden. [vgl.: (11), (32), (36), (38)].

Sodann gilt für die letztere Grösze die Transformationsformel:

$$(60) \quad \ldots\ldots \quad \frac{\partial D_{\lambda\mu\nu}}{\partial \bar{t}_{(\epsilon)}} = \sum_{(\alpha\beta\gamma)} \pi\begin{pmatrix} \lambda\ \mu\ \nu \\ \alpha\ \beta\ \gamma \end{pmatrix} \bar{\dot{D}}_{\alpha\beta\gamma} \quad \ldots\ldots \quad (71)$$

Alsdann folgt Satz 4 aus (71), den Hilfssätzen 4, 5 und Satz 3.