

Mathematics. — *Essentieel-negatieve eigenschappen.* By L. E. J. BROUWER.

(Communicated at the meeting of September 25, 1948.)

Met het oog op de aan een eventueele affirmatieve, respectievelijk negatielooze wiskunde ¹⁾ toe te kennen draagwijdte is wellicht de publicatie van nut van een sinds 1927 in mijn colleges en voordrachten nu en dan aangevoerd eenvoudig en aanschouwelijk voorbeeld van realisatie eener enkelvoudig-negatieve eigenschap (d.w.z. absurditeit eener constructieve eigenschap) op een wijze die zeer zeker geen hoop op vervorming tot corollarium eener constructieve eigenschap rechtvaardigt. Het bestaat in twee reële getallen, die verschillend zijn zonder dat een van beide als grooter of kleiner dan het andere, laat staan als van het andere verwijderd, kan worden aangewezen.

Zij α een wiskundige assertie, die *niet kan worden getoetst*, d.w.z. dat geen methode bekend is, om hetzij haar absurditeit, hetzij de absurditeit harer absurditeit af te leiden ²⁾.

Dan kan het scheppende subject in verband met deze assertie α naar het volgende voorschrift een onbepaald voortschrijdende sequentie van rationale getallen a_1, a_2, a_3, \dots creëren: Zoolang bij de keuze der a_n aan het scheppende subject nòch de juistheid, nòch de absurditeit van α is gebleken, wordt iedere a_n gelijk aan 0 gekozen. Zoodra echter tusschen de keuze van a_{r-1} en die van a_r aan het scheppende subject de juistheid van α is gebleken, wordt zoowel a_r , als voor iedere natuurlijk getal ν ook $a_{r+\nu}$, gelijk aan 2^{-r} gekozen. En zoodra tusschen de keuze van a_{s-1} en die van a_s aan het scheppende subject de absurditeit van α is gebleken, wordt zoowel a_s , als voor ieder natuurlijk getal ν ook $a_{s+\nu}$, gelijk aan -2^{-s} gekozen.

Deze onbepaald voortschrijdende sequentie a_1, a_2, a_3, \dots is positief convergent, bepaalt dus een reëel getal ϱ .

Gold voor dit reële getal ϱ de relatie $\varrho > 0$, dan zou ϱ niet < 0 kunnen zijn, dus zou vaststaan dat nimmer de absurditeit van α kan blijken, dus ware de absurditeit der absurditeit van α bekend, dus ware α getoetst, hetgeen niet het geval is. *De relatie $\varrho > 0$ geldt dus niet.*

Gold verder voor het reële getal ϱ de relatie $\varrho < 0$, dan zou ϱ niet > 0

¹⁾ Vgl. G. F. C. GRISS, Negatielooze intuïtionistische wiskunde, Verslagen dezer Akademie, **53**, p. 261 (1944); Negationless intuitionistic mathematics, deze Proceedings, **49**, p. 1127 (1946); D. VAN DANTZIG, On the principles of intuitionistic and affirmative mathematics, deze Proceedings, **50**, p. 918 en p. 1092 (1947).

²⁾ Bijvoorbeeld de assertie, dat een viertal natuurlijke getallen $n > 2$, a , b en c bestaat, waarvoor de betrekking $a^n + b^n = c^n$ geldt, of de assertie, dat in de decimale ontwikkeling van π tien op elkaar volgende cijfers voorkomen, die een sequentie 0123456789 vormen.

kunnen zijn, dus zou vaststaan dat nimmer de juistheid van α kan blijken, dus ware de absurditeit van α bekend, dus ware wederom α getoetst, hetgeen niet het geval is. *De relatie $\varrho < 0$ geldt dus evenmin.*

Onderstellen we ten slotte de geldigheid der relatie $\varrho = 0$. In dat geval zou ϱ nòch < 0 , nòch > 0 kunnen zijn, dus nòch de absurditeit, nòch de juistheid van α ooit kunnen blijken, dus ware zoowel de absurditeit der absurditeit, als de absurditeit van α bekend, een contradictie. *De relatie $\varrho = 0$ is dus contradictoor. D.w.z. de reële getallen ϱ en 0 zijn verschillend.*

Zoodat voor de reële getallen ϱ en 0 de enkelvoudig-negatieve eigenschap $\varrho \neq 0$ bestaat zonder aanwezigheid van een der eigenschappen $\varrho > 0$ en $\varrho < 0$, laat staan van een der constructieve eigenschappen $\varrho \circ > 0$ en $\varrho \circ < 0$. Voor reële getallen is dus de relatie \neq een essentieel-negatieve relatie.

Op analoge wijze ontstaat, indien aan het einde der derde alinea -2^{-s} vervangen wordt door 2^{-s} , voor de reële getallen ϱ en 0 de enkelvoudig-negatieve eigenschap $\varrho > 0$ zonder aanwezigheid der constructieve eigenschap $\varrho \circ > 0$. Ook de relatie $>$ der virtueele ordening van het continuum is derhalve een essentieel-negatieve relatie.