Mathematics. — *Über eine besondere Klasse von non-oszillierenden Reihen.* By M. J. BELINFANTE. (Communicated by Prof. L. E. J. BROUWER).

(Communicated at the meeting of December 20, 1930.)

In der intuitionistischen Theorie der unendlichen Reihen nennt man eine unendliche Reihe Σu_n, für welche die Summe der ersten n Glieder mit s_n bezeichnet wird, *non-oszillierend*, wenn für jedes $\varepsilon > 0$ die Unmöglichkeit des gleichzeitigen Bestehens feststeht von einer unendlichen Reihe unbeschränkt wachsender positiver ganzer Zahlen $n_1, n_2, n_3, \ldots$ und einer unendlichen Reihe positiver ganzer Zahlen $m_1, m_2, m_3, \ldots$ so dass $|s_{n_\nu+m_\nu} - s_{n_\nu}| > \varepsilon$ für jedes ν. [1])

Eine Reihe Σu_n heisst *positiv-konvergent* falls eine Zahl s existiert mit der Eigenschaft, dass für jedes $\varepsilon > 0$ eine solche ganze positive Zahl n_ε besteht, dass $|s - s_n| < \varepsilon$ für jedes $n > n_\varepsilon$.

Eine Reihe Σu_n heisst *negativ-konvergent*, wenn eine Zahl s existiert mit der Eigenschaft, dass für jedes $\varepsilon > 0$ die Unmöglichkeit des Bestehens feststeht von einer unendlichen Reihe unbeschränkt wachsender positiver ganzer Zahlen $n_1, n_2, n_3, \ldots$ so dass $|s - s_{n_\nu}| > \varepsilon$ für jedes ν.

Offenbar sind sowohl positiv-konvergente als negativ-konvergente Reihen non-oszillierend, aber nicht umgekehrt. (Für Beispiele von non-oszillierenden nicht negativ-konvergenten und negativ-konvergenten, nicht positiv-konvergenten Reihen vergleiche man die erste der in der Fussnote zitierten Abhandlungen).

In derselben Weise kann man positiv-summierbare und negativ-summierbare Reihen definieren. Wie aus der zweiten Abhandlung hervorgeht, haben die negativ-konvergenten und negativ-summierbaren Reihen analoge Eigenschaften, wie die positiv-konvergenten und positiv-summierbaren Reihen; insbesondere folgt aus Summierbarkeit niedriger Ordnung Summierbarkeit höherer Ordnung, gilt der CESÀROsche Produktsatz und analoge Sätze und besteht auch der ABELsche Satz mit seinen Erweiterungen und Umkehrungen.

---

[1]) Man vergleiche für die intuitionistische Theorie der unendlichen Reihen:

L. E. J. BROUWER. Ueber die Bedeutung des Satzes vom ausgeschlossenen Dritten. Journal für die reine und angewandte Mathematik, Bd. **154**, S. 1—7.

M. J. BELINFANTE. Zur intuitionistischen Theorie der unendlichen Reihen. Sitzungsberichte der Preussischen Akademie der Wissenschaften, Phys-Math. Klasse 1929. XXV. S. 639—660.

In dem vorliegenden Artikel werde ich zeigen, dass ebenso eine analoge Theorie besteht für die besondere Klasse von non-oszillierenden Reihen, die ich p-fach negativ-konvergent nenne und für die auf analoge Weise definierten p-fach negativ-summierbaren Reihen.

Eine Folge $\{a_n\}$ heisst *p-fach negativ-limitiert* falls p Zahlen $a^{(1)}, a^{(2)}, \ldots, a^{(p)}$ existieren derart, dass für jedes $\varepsilon > 0$ die Unmöglichkeit des Bestehens feststeht von p Fundamentalreihen positiver ganzer Zahlen $n_1^{(r)} < n_2^{(r)} < n_3^{(r)} < \ldots$ derart, dass $|a_{n_i^{(r)}} - a^{(r)}| > \varepsilon$ für jedes i und $1 \leqq r \leqq p$. Wir nennen $a^{(1)}, a^{(2)}, \ldots, a^{(p)}$ die p-fachen Limeswerte der Folge $\{a_n\}$ und schreiben $\overline{}lim\ a_n = (a^{(1)}, a^{(2)}, \ldots, a^{(p)})$. Offenbar ist jede p-fach negativ-limitierte Folge auch eine $(p+q)$-fach negativ-limitierte Folge; die $(p+q)$-fachen Limeswerte sind die ursprünglichen p-fachen Limeswerte zusammen mit q willkürlichen Zahlen.

Eine unendliche Reihe Σu_n, für welche die Summe der ersten n Glieder mit s_n bezeichnet wird, heisst *p-fach negativ-konvergent* falls die Folge $\{s_n\}$ p-fach negativ-limitiert ist. Die p-fachen Limeswerte der Folge s_n nennt man die p-fachen Summenwerte der Reihe Σu_n.

Eine unendliche Reihe Σu_n, für welche der n^{te} Mittelwert k-ter Ordnung mit $C_n^{(k)}$ bezeichnet wird, heisst *p-fach negativ-summierbar k-ter Ordnung* falls die Folge $\{C_n^{(k)}\}$ p-fach negativ-limitiert ist. Die p-fachen Limeswerte dieser Folge nennt man wieder die p-fachen Summenwerte der Reihe Σu_n. Für $k = 0$ geht die p-fache Summierbarkeit in die p-fache Konvergenz über. Offenbar ist jede p-fach negativ-summierbare Reihe k^{ter} Ordnung auch $(p+q)$-fach negativ-summierbar k-ter Ordnung.

Eine für $x < 1$ definierte Funktion $f(x)$ nennen wir *p-fach negativ-stetig* für $x = 1$ falls p Zahlen $s^{(1)}, s^{(2)}, \ldots, s^{(p)}$ existieren derart, dass für jedes positive ε die Unmöglichkeit feststeht von p zu der Zahl Eins positiv konvergierenden Fundamentalreihen $\xi_1^{(i)} < \xi_2^{(i)} < \ldots$ derart dass $|f(\xi_r^{(i)}) - s^{(i)}| > \varepsilon$ für jedes r und $1 \leqq i \leqq p$.

Von den in meinem zitierten Artikel besprochenen Theoremen für negativ-summierbare Reihen werde ich im folgenden von jeder Gattung einen charakteristischen Satz verallgemeinern für p-fach negativ-summierbare Reihen. § 1 enthält zwei Beispiele von mehrfach negativ-summierbaren Reihen und den Satz, dass die Summe einer p-fach negativ-limitierten Folge $\{a_n\}$ und einer q-fach negativ-limitierten Folge $\{b_n\}$ pq-fach negativ-limitiert ist. In § 2 beweise ich, dass eine Reihe, die p-fach negativ-summierbar (C, k) ist, auch p-fach negativ-summierbar $(C, k+i)$ ist, und den Produktsatz für mehrfach negativ-summierbare Reihen. § 3 enthält den ABELschen Satz für p-fach negativ-konvergente Reihen und § 4 die Definition und ein Beispiel von ω-fach negativ-konvergenten Reihen.

§ 1.

Beispiel einer zweifach negativ-konvergenten Reihe. Wir verstehen unter k_ν die Ordinalzahl der ersten Ziffer in der Dezimalentwicklung von

π, der von wenigstens ν Sequenzen 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, hinter einander gefolgt wird. Setzen wir nun:

$$a_n = \frac{1}{2^{k_1}} \text{ für } n \leqq 2^{k_1}$$

$$a_n = 0 \quad \text{für } n > 2^{k_1}$$

so ist Σa_n zweifach negativ-konvergent und sind ihre zweifachen Summenwerte 0 und 1.

Beweis. Existierten für ein bestimmtes $\varepsilon > 0$ die Fundamentalreihen Indizes $m_1 < m_2 < \ldots$ und $n_1 < n_2 \ldots$ derart, dass $| s_{m_i} | > \varepsilon$ und $| s_{n_i} - 1 | > \varepsilon$ für jedes i, so hätten wir insbesondere $s_{m_1} > \varepsilon$, und da $s_\nu \leqq \frac{\nu}{2^{k_1}}$ für jedes ν so wäre $\frac{m_1}{2^{k_1}} \geqq s_{m_1} > \varepsilon$ also $m_1 > \varepsilon . 2^{k_1}$. Sei $N > \frac{m_1}{\varepsilon}$, so ist $N > 2^{k_1}$ also $s_n = 1$ für jedes $n > N$. Bestimmen wir nun r derart, dass $n_r > N$, so folgt aus $| s_{n_r} - 1 | > \varepsilon$ und $s_{n_r} = 1$ die verlangte Ungereimtheit.

Beispiel einer p-fach negativ-konvergenten Reihe. Setzen wir:

$$a_n = \frac{1}{2^{k_1}} \text{ für } n \leqq 2^{k_1}$$

$$a_n = \frac{1}{2^{k_2}} \text{ für } 2^{k_1} < n \leqq 2^{k_1} + 2^{k_2} \text{ und allgemein für } 1 < \nu < p-1$$

$$a_n = \frac{1}{2^{k_\nu}} \text{ für } \sum_{\iota=1}^{\nu-1} 2^{k_\iota} < n \leqq \sum_{\iota=1}^{\nu} 2^{k_\iota} \text{ und}$$

$$a_n = 0 \quad \text{für } n > \sum_{\iota=1}^{p-1} 2^{k_\iota},$$

so ist Σa_n p-fach negativ-konvergent. Ihre p-fachen Summenwerte sind $0, 1, 2, \ldots p-1$.

Beweis. Existierten für ein bestimmtes $\varepsilon > 0$ die p Fundamentalreihen Indizes $n_1^{(\nu)} < n_2^{(\nu)} < \ldots$ derart, dass $| s_{n_i^{(\nu)}} - (\nu - 1) | > \varepsilon$ für $\nu = 1, 2, \ldots p$ und jedes i, so hätten wir insbesondere $s_{n_1^{(1)}} > \varepsilon$ und da $s_\nu \leqq \frac{\nu}{2^{k_1}}$ auch $n_1^{(1)} > \varepsilon . 2^{k_1}$. Sei $n_{i_1}^{(2)} > \frac{n_1^{(1)}}{\varepsilon}$ also auch $> 2^{k_1}$. Aus $| s_{n_{i_1}^{(2)}} - 1 | > \varepsilon$ folgt, da $s_{n_{i_1}^{(2)}} \leqq 1 + \frac{n_{i_1}^{(2)} - 2^{k_1}}{2^{k_2}}$, $n_{i_1}^{(2)} > \varepsilon\, 2^{k_2} + 2^{k_1}$. Sei $n_{i_2}^{(3)} > n_{i_1}^{(2)} . \left(1 + \frac{1}{\varepsilon}\right)$ folglich $n_{i_2}^{(3)} >$ $> 2^{k_1} + 2^{k_2}$. Aus $| s_{n_{i_2}^{(3)}} - 2 | > \varepsilon$ folgt wieder, da $s_{n_{i_2}^{(3)}} \leqq 2 + \frac{n_{i_2}^{(3)} - 2^{k_1} - 2^{k_2}}{2^{k_3}}$. $n_{i_2}^{(3)} > 2^{k_1} + 2^{k_2} + \varepsilon . 2^{k_3}$. Sei $n_{i_3}^{(4)} > n_{i_2}^{(3)} \left(1 + \frac{1}{\varepsilon}\right)$, so ist $n_{i_3}^{(4)} > 2^{k_1} + 2^{k_2} + 2^{k_3}$, usw. So fortfahrend gelangen wir schliesslich zu einem $n_{i_{p-1}}^{(p)} > \sum_1^{p-1} 2^{k_\nu}$, Folglich ist $s_{n_{i_{p-1}}^{(p)}} = p - 1$ und dies ist wider die Voraussetzung $| s_{n_{i_{p-1}}^{(p)}} - (p-1) | > \varepsilon$.

Jede p-fach negativ-konvergente Reihe ist non-oszillierend.

Beweis. Sei $\overline{}\!\lim s_n = (s^{(1)}, s^{(2)}, \ldots, s^{(p)})$. Existierten für ein bestimmtes $\varepsilon > 0$ die Fundamentalreihen Indizes $n_1 < n_2 < \ldots$ und $m_1, m_2, \ldots$ so dass $| s_{n_\nu + m_\nu} - s_{n_\nu} | > \varepsilon$ für jedes ν, so hätten wir für jedes ν und $1 \leq r \leq p$ entweder $| s_{n_\nu + m_\nu} - s^{(r)} | > \frac{\varepsilon}{2}$ oder $| s_{n_\nu} - s^{(r)} | > \frac{\varepsilon}{2}$. Wir könnten also p Fundamentalreihen Indizes $\mu_1^{(p)} < \mu_2^{(p)} < \ldots$ derart bestimmen, dass $| s_{\mu_i}^{(n)} - s^{(n)} | > \frac{\varepsilon}{2}$ für jedes i und $1 \leq n \leq p$ und das ist wieder die Voraussetzung.

Sind die Folgen $\{a_n\}$ bzw. $\{b_n\}$ p-fach bzw. q-fach negativ-limitiert, so ist die Folge $\{c_n\} = \{a_n + b_n\}$ pq-fach negativ-limitiert. Die pq-fachen Limeswerte der Folge $\{c_n\}$ sind die Summen von je einem p-fachen Limeswert von $\{a_n\}$ und einem q-fachen Limeswert von $\{b_n\}$.

Beweis. Sei $\overline{}\!\lim\ a_n = (a^{(1)}, a^{(2)}, \ldots a^{(p)})$ und $\overline{}\!\lim\ b_n = (b^{(1)}, b^{(2)}, \ldots b^{(q)})$. Aus:

$$| a_{n_k^{(i,j)}} + b_{n_k^{(i,j)}} - (a^{(i)} + b^{(j)} |) > \varepsilon \ldots (i, j)$$

folgt entweder:

$$| a_{n_k^{(i,j)}} - a^{(i)} | > \frac{\varepsilon}{2} \ldots (a, i, j)$$

oder:

$$| b_{n_k^{(i,j)}} - b^{(j)} | > \frac{\varepsilon}{2} \ldots (b, i, j)$$

Man sieht leicht ein, dass jede mögliche Kombination der Glieder dieser pq Alternativen „entweder (a, i, j) oder (b, i, j)" nicht für pq Fundamentalreihen Indizes $n_1^{(i,j)} < n_2^{(i,j)} < \ldots$ erfüllt sein kann. Denn falls eine solche Kombination zum Beispiel $a^{(\rho)}$ nicht enthält, so enthält sie gewiss die $b^{(\sigma)}$, welche mit diesem $a^{(\rho)}$ in den Alternativen auftreten, also *alle* b^{σ}. Die Existenz dieser pq Fundamentalreihen ist aber wieder die Voraussetzung $\overline{}\!\lim b_n = (b^{(1)}, b^{(2)}, \ldots, b^{(q)})$. Aus der Unmöglichkeit des Bestehens von pq Fundamentalreihen Indizes, für welche eine bestimmte Kombination der Alternativen erfüllt ist, folgt aber auch die Unmöglichkeit derjenigen Fundamentalreihen, für welche abwechselnd die verschiedenen Kombinationen erfüllt sind, da man aus diesen Fundamentalreihen leicht Fundamentalreihen für die einzelnen Kombinationen herstellen könnte. Mithin ist bewiesen: die Unmöglichkeit des Bestehens von pq Fundamentalreihen Indizes $n_1^{(i,j)} < n_2^{(i,j)} < \ldots$ derart, dass (i, j) erfüllt ist für jedes k, $1 \leq i \leq p$ und $1 \leq j \leq q$. Also gilt:

$$\overline{}\!\lim \{ a_n + b_n \} = (a^{(1)} + b^{(1)}, \ldots, a^{(p)} + b^{(q)}).$$

§ 2.

Satz I. Ist Σa_n p-fach negativ-summierbar (C, k), so ist Σa_n auch p-fach summierbar (C, k + i).

Beweis. Sei $\overline{\ } lim\, C_n^{(k)}(a) = (s^{(1)}, s^{(2)}, \ldots, s^{(p)})$. Aus:

$$| C_n^{(k+i)}(a) - s^{(\nu)} | > \varepsilon \quad \ldots \ldots \ldots \quad (1)$$

folgt nach der bekannten Formel

$$C_n^{(k+i)}(a) = \frac{1}{A_n^{(k+i)}} \sum_{r=1}^{n} A_{n-r+1}^{(i-1)} A_r^{(k)} C_r^{(k)}(a)$$

entweder:

$$\left| \frac{1}{A_n^{(k+i)}} \sum_{r=1}^{N} A_{n-r+1}^{(i-1)} A_r^{(k)} \{C_r^{(k)}(a) - s^{(\nu)}\} \right| > \frac{\varepsilon}{2} \quad \ldots \quad (2)$$

oder:

$$\left| \frac{1}{A_n^{(k+i)}} \sum_{r=N+1}^{n} A_{n-r+1}^{(i-1)} A_r^{(k)} \{C_r^{(k)}(a) - s^{(\nu)}\} \right| > \frac{\varepsilon}{2} \quad \ldots \quad (3)$$

Aus (3) folgt die Existenz einer ganzen positiven Zahl $M > N$, so dass:

$$| C_M^{(k)}(a) - s^{(\nu)} | > \frac{\varepsilon}{2} \quad \ldots \ldots \ldots \quad (4)$$

Falls nun p Fundamentalreihen $n_1^{(\nu)} < n_2^{(\nu)} < \ldots$ existierten so dass (1) erfüllt ist für $n = n_1^{(\nu)}, n_2^{(\nu)}, \ldots$, so könnten wir zu jeder vorgelegten positiven ganzen Zahl $N_i^{(\nu)}$ den Index $n_i^{(\nu)}$ derart bestimmen, dass (2) *nicht* erfüllt ist für $n = n_i^{(\nu)}$, $N = N_i^{(\nu)}$. Alsdann muss (3) erfüllt sein und kann man also $M_i^{(\nu)} > N_i^{(\nu)}$ derart bestimmen, dass (4) erfüllt ist für $M = M_i^{(\nu)}$. Wiederholen wir den Prozess mit $N_{i+1}^{(\nu)} = M_i^{(\nu)}$, $N_{i+2}^{(\nu)} = M_{i+1}^{(\nu)}, \ldots$, so entstehen wider die Voraussetzung p Fundamentalreihen $M_i^{(\nu)} < M_{i+1}^{(\nu)} < \ldots$ für die $\left| C_{M_p^{(\nu)}}^{(k)}(a) - s^{(\nu)} \right| > \frac{\varepsilon}{2}$.

Satz II. Ist Σa_n p-fach negativ-summierbar (C, k) und Σb_n q-fach negativ-summierbar (C, l), so ist $\Sigma c_n = \Sigma a_n \,.\, \Sigma b_n$ pq-fach negativ-summierbar (C, k + l + 1). Die pq-fachen Summenwerte der Reihe Σc_n sind die Produkte von je einem p-fachen Summenwert von Σa_n und einem q-fachen Summenwert von Σb_n.

Erster Hilfssatz. Falls man zu den Folgen $\{\alpha_n\}$ und $\{\beta_n\}$ eine Fundamentalreihe Indizes $n_1 < n_2 < \ldots$ derart bestimmen kann, dass

$$| V_n(\alpha, \beta) | \equiv \left| \frac{1}{A_n^{(k+l+1)}} \cdot \sum_{r=1}^{n} \alpha_r \, \beta_{n-r+1} A_r^{(k)} A_{n-r+1}^{(l)} \right| > \varepsilon$$

für jedes $n = n_i$, so kann man auch eine Fundamentalreihe Indizes $M_1 < M_2 < \ldots$ derart bestimmen, dass für jedes M_i entweder $|\alpha_{M_i}| > \sqrt{\frac{\varepsilon}{3}}$ oder $|\beta_{M_i}| > \sqrt{\frac{\varepsilon}{3}}$.

(Mit $A_n^{(k)}$ bezeichnen wir bekanntlich den Ausdruck

$(k+1).(k+2).....(k+n-1):(n-1)!;\ A_1^{(k)}=1$).

Beweis. Sei N eine zunächst beliebige positive ganze Zahl zwischen 1 und n, so folgt aus $|V_n(\alpha,\beta)|>\varepsilon$:

entweder:

$$\left|\frac{1}{A_n^{(k+l+1)}}\cdot\sum_{r=1}^{N}\alpha_r\,\beta_{n-r+1}\,A_r^{(k)}\,A_{n-r+1}^{(l)}\right|>\frac{\varepsilon}{3}\quad.\ .\ .\ .\ .\ (5)$$

oder:

$$\left|\frac{1}{A_n^{(k+l+1)}}\cdot\sum_{r=n-N+1}^{n}\alpha_r\,\beta_{n-t+1}\,A_r^{(k)}\,A_{n-r+1}^{(l)}\right|>\frac{\varepsilon}{3}\cdot\ .\ .\ .\ .\ (6)$$

oder aber:

$$\left|\frac{1}{A_n^{(k+l+1)}}\cdot\sum_{r=N+1}^{n-N}\alpha_r\,\beta_{n-r+1}\,A_r^{(k)}\,A_{n-r+1}^{(l)}\right|>\frac{\varepsilon}{3}\cdot\ .\ .\ .\ .\ .\ (7)$$

Im ersten Falle setzen wir $|\alpha_1|+|\alpha_2|+\ldots+|\alpha_N|=\mu_N$. Falls nun $|\beta_\nu|\leqq\sqrt{\frac{\varepsilon}{3}}$ für jedes $n-N+1\leqq\nu\leqq n$, so würde:

$$\left|\frac{1}{A_n^{(k+l+1)}}\sum_{r=1}^{N}\alpha_r\,\beta_{n-r+1}\,A_r^{(k)}A_{n-r+1}^{(l)}\right|<\frac{\mu_N A_N^{(k)}A_n^{(l)}}{A_n^{(k+ll+1)}}\cdot\sqrt{\frac{\varepsilon}{3}}\cdot$$

Hieraus folgt nach (5):

$$\frac{\mu_N A_N^{(k)}A_n^{(l)}}{A_n^{(k+l+1)}}\sqrt{\frac{\varepsilon}{3}}>\frac{\varepsilon}{3}\ \text{also:}\ \frac{A_n^{(l)}}{A_n^{(k+l+1)}}>\frac{1}{\mu_N\,A_N^{(k)}}\sqrt{\frac{\varepsilon}{3}}\cdot\ .\ .\ .\ .\ (8)$$

Da $^{+}lim\,\frac{A_n^{(l)}}{A_n^{(k+l+1)}}=0$ kann man nun zu jeder vorgelegten ganzen positiven Zahl $N\,n_i$ derart bestimmen, dass (8) *nicht* erfüllt ist für $n=n_i$. Alsdann können wir $M_1>n_i-N$ derart bestimmen, dass $|\beta_{M_1}|>\sqrt{\frac{\varepsilon}{3}}$.

Im zweiten Falle können wir auf dieselbe Weise einen Index $M_1>n_i-N$ bestimmen, sodass $|\alpha_{M_1}|>\sqrt{\frac{\varepsilon}{3}}$.

Falls (7) erfüllt ist, kann man den Index p zwischen $N+1$ und $n-N$ derart bestimmen, dass $|\alpha_p|\,.\,|\beta_{n-p+1}|>\frac{\varepsilon}{3}$. Folglich kann man bestimmen entweder einen Index $M_1>N_1$ sodass $|\alpha_{M_1}|>\sqrt{\frac{\varepsilon}{3}}$ oder einen Index $M_1>N_1$, sodass $|\beta_{M_1}|>\sqrt{\frac{\varepsilon}{3}}$.

Wiederholen wir nun den Prozess für einen Index $n_1>n+2\,M_1$ mit $N_1=M_1$, so können wir $M_2>M_1$ derart bestimmen, dass entweder $|\alpha_{M_2}|>\sqrt{\frac{\varepsilon}{3}}$ oder $|\beta_{M_2}|>\sqrt{\frac{\varepsilon}{3}}$. Die fortgesetzte Wiederholung des Prozesses liefert also eine Fundamentalreihe Indizes $M_1 < M_2 < \ldots$, sodass für jedes i entweder $|\alpha_{M_i}| > \sqrt{\frac{\varepsilon}{3}}$ oder $|\beta_{M_i}| > \sqrt{\frac{\varepsilon}{3}}$.

In derselben Weise beweist man den

Korollar. Falls eine Fundamentalreihe Indizes $n_1 < n_2 < \ldots$ existiert, sodass

$$\left| V_n(\alpha, 1) \right| \equiv \left| \frac{1}{A_n^{(k+l+1)}} \sum_{r=1}^{n} \alpha_r A_r^{(k)} A_{n-r+1}^{(l)} \right| > \varepsilon$$

für jedes $n = n_i$, so kann man eine Fundamentalreihe Indizes $M_1 < M_2 < \ldots$ derart bestimmen, dass $|\alpha_{M_i}| > \frac{\varepsilon}{2}$ für jedes M_i.

Zweiter Hilfssatz. Sind die Folgen $\{a_n\}$ bzw. $\{b_n\}$ p-fach bzw. q-fach negativ-limitiert, so ist die Folge

$$\left\{ V_n(a, b) \right\} = \left\{ \frac{1}{A_n^{(k+l+1)}} \cdot \sum_{r=1}^{n} a_r\, b_{n-r+1}\, A_r^{(k)} A_{n-r+1}^{(l)} \right\}$$

pq-fach negativ-limitiert. Ihre Summenwerte sind die Produkte von je einem p-fachen Limeswert von Σa_n und einem q-fachen Limeswert von Σb_n.

Beweis. Sei $^{-}\lim a_n = (a^{(1)}, a^{(2)}, \ldots, a^{(p)})$ und $^{-}\lim b_n = (b^{(1)}, b^{(2)}, \ldots, b^{(q)})$. Setzen wir $a_n = a^{(i)} + \alpha_n^{(i)}$ und $b_n = b^{(j)} + \beta_n^{(j)}$ so folgt leicht: $V_n(a, b) = V_n(\alpha^{(i)}, \beta^{(j)}) + a^{(i)} V_n(1, \beta^{(j)}) + b^{(j)} V_n(\alpha^{(i)}, 1) + a^{(i)} b^{(j)}$.

Aus $|V_n(a, b) - a^{(i)} b^{(j)}| > \varepsilon$ folgt also entweder: $|V_n(\alpha^{(i)} \beta^{(j)})| > \frac{\varepsilon}{3}$. (9)

oder:

$$|a^{(i)} V_n(1, \beta^{(j)})| > \frac{\varepsilon}{3} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (10)$$

oder:

$$|b^{(j)} V_n(\alpha^{(i)}, 1)| > \frac{\varepsilon}{3} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (11)$$

Ist (9) für eine Fundamentalreihe Indizes $n_1^{(i,j)} < n_2^{(i,j)} < \ldots$ erfüllt, so können wir nach dem ersten Hilfssatz die Fundamentalreihe Indizes $m_1^{(i,j)} < m_2^{(i,j)} < \ldots$ derart bestimmen, dass für jedes $n = m_\nu^{(i,j)}$ entweder $|\alpha_n^{(i)}| > \frac{\sqrt{\varepsilon}}{3}$ oder $|\beta_n^{(j)}| > \frac{\sqrt{\varepsilon}}{3}$, also auch entweder $|a_n - a^{(i)}| > \frac{\sqrt{\varepsilon}}{3}$ oder $|b_n - b^{(j)}| > \frac{\sqrt{\varepsilon}}{3}$.

Sind (10) bzw. (11) für eine Fundamentalreihe Indizes erfüllt, so können wir nach dem Korollar die Fundamentalreihen Indizes $m_1^{(j)} < m_2^{(j)} < \ldots$ bzw. $m_1^{(i)} < m_2^{(i)} < \ldots$ derart bestimmen, dass für jedes $n = m_\nu^{(j)}$ bzw. $n = m_\nu^{(i)}$:

$$|b_n - b^{(j)}| > \frac{\varepsilon}{1 + 6\,|a^{(i)}|} \quad \text{bzw.} \quad |a_n - a^{(i)}| > \frac{\varepsilon}{1 + 6\,|b^{(j)}|}.$$

Da $\eta = \frac{\sqrt{\varepsilon}}{3} \times \frac{\varepsilon}{1+6\,|\,a^{(i)}\,|+6\,|\,b^{(j)}\,|} : \left\{ \frac{\sqrt{\varepsilon}}{3} + \frac{\varepsilon}{1+6\,|\,a^{(i)}\,|+6\,|\,b^{(j)}\,|} \right\}$ jedenfalls kleiner ist als $\frac{\sqrt{\varepsilon}}{3}$, $\frac{\varepsilon}{1+6\,|\,a^{(i)}\,|}$ oder $\frac{\varepsilon}{1+6\,|\,b^{(j)}\,|}$, können wir für die vier letzten Ungleichungen auch schreiben: $|\,a_n - a^{(i)}\,| > \eta$ bzw. $|\,b_n - b^{(j)}\,| > \eta$. Nun ist aber das Bestehen von pq Fundamentalreihen $m_1^{(i,j)} < m_2^{(i,j)} < \ldots$ derart, dass für jedes $n = m_\nu^{(i,j)}$ entweder $|\,a_n - a^{(i)}\,| > \eta$ oder $|\,b_n - b^{(j)}\,| > \eta$ wider die Voraussetzungen $^{-}lim\ a_n = (a^{(1)}, a^{(2)}, \ldots, a^{(p)})$ und $^{-}lim\ b_n = (b^{(1)}, b^{(2)}, \ldots, b^{(q)})$. Also gilt:

$$^{-}lim\ V_n\,(a, b) = (a^{(1)}\,b^{(1)}, \ldots, a^{(p)}\,b^{(q)}).$$

Beweis des Satzes II. Sei $^{-}lim\ C_n^{(k)}\,(a) = (s^{(1)}\,s^{(2)}, \ldots, s^{(p)})$ und $^{-}lim\ C_n^{(l)}\,(b) = (t^{(1)}, t^{(2)}, \ldots, t^{(q)})$.

Aus der Formel $C_n^{(k+l+1)}\,(c) = \frac{1}{A_n^{(k+l+1)}} \sum_{r=1}^{n} C_r^{(k)}\,(a)\,.\,C_{n-r+1}^{(l)}\,(b)\,.\,A_r^{(k)}\,.\,A_{n-r+1}^{(l)}$

folgt nach dem zweiten Hilfssatz sofort

$$^{-}lim\ C_n^{(k+l+1)}\,(c) = (s^{(1)}\,t^{(1)}, \ldots, s^{(p)}\,t^{(q)}).$$

§ 3.

Satz. Ist Σa_n p-fach negativ-konvergent und beschränkt, so ist $\Sigma a_n\,x^n$ p-fach negativ-stetig für $x = 1$.

Beweis. Sei $^{-}lim\ s_n = (s^{(1)}, s^{(2)}, \ldots, s^{(p)})$. Die Reihe $\Sigma a_n\,x^n$ ist positiv-konvergent für $|\,x\,| < 1$, da ihre Koeffizienten beschränkt sind. Hieraus folgt für jedes N, $|\,x\,| < 1$ und $1 \leqq i \leqq p$ die Richtigkeit der Relation:

$$\sum_1^\infty a_n\,x^n - s^{(i)} = (1-x) \sum_1^N (s_n - s^{(i)})\,x^n + (1-x) \sum_{N+1}^\infty (s_n - s^{(i)})\,x^n - s^{(i)}(1-x) \quad (1)$$

Es soll für jedes $\varepsilon > 0$ die Unmöglichkeit nachgewiesen werden von p Fundamentalreihen $\xi_1^{(i)} < \xi_2^{(i)} < \ldots.$ derart dass

$$^{+}lim\ \xi_n^{(i)} = 1 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (2)$$

$$\left|\sum_1^\infty a_n\,\{\xi_\nu^{(i)}\}^n - s^{(i)}\right| > \varepsilon \quad \ldots\ldots\ldots \quad (3)$$

Denken wir uns also p derartige Fundamentalreihen vorgelegt; aus (1) und (3) folgt dann, wenn $N_r^{(i)}$ eine zunächst willkürliche positive ganze Zahl ist, dass entweder:

$$\left|(1-\xi_\nu^{(i)}) \sum_{n=1}^{N_r^{(i)}} (s_n - s^{(i)})\,\{\xi_\nu^{(i)}\}^n\right| > \frac{\varepsilon}{3} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (4)$$

oder:

$$\left|(1-\xi_\nu^{(i)}) \sum_{N_r^{(i)}+1}^{\infty} (s_n - s^{(i)})\,\{\xi_\nu^{(i)}\}^n\right| > \frac{\varepsilon}{3} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (5)$$

oder:

$$\left| s^{(i)}(1-\xi_\nu^{(i)}) \right| > \frac{\varepsilon}{3} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (6)$$

Nach (2) können wir nun zu jeder natürlichen Zahl $N_r^{(i)}$ $\xi_\nu^{(i)}$ derart bestimmen, dass (4) und (6) *nicht* erfüllt sind. Alsdann muss (5) erfüllt sein und kann man $M_r^{(i)} > N_r^{(i)}$ derart bestimmen, das $|s_n - s^{(i)}| > \frac{\varepsilon}{3}$ für $n = M_r^{(i)}$. Wiederholen wir den Prozess mit $N_{r+1}^{(i)} = M_r^{(i)}$, $N_{r+2}^{(i)} = M_{r+1}^{(i)}$, usw., so entstehen p Fundamentalreihen $M_r^{(i)} < M_{r+1}^{(i)} < \ldots$ sodass $|s_{M_r^{(i)}} - s^{(i)}| > \frac{\varepsilon}{3}$ für jedes r und $1 \leqslant i \leqslant p$, und dies ist wider die Voraussetzung.

§ 4.

Die Reihe Σu_n heisst *ω-fach negativ-konvergent* falls eine beschränkte Fundamentalreihe Zahlen $s^{(1)}, s^{(2)}, \ldots$ existiert, sodass für jedes $\varepsilon > 0$ die Unmöglichkeit des gleichzeitigen Bestehens feststeht von einer Fundamentalreihe von Fundamentalreihen $n_1^{(i)} < n_2^{(i)} < \ldots$ derart dass $|s_{n_\nu^{(i)}} - s^{(i)}| > \varepsilon$ für jedes $\nu \geqslant 1$ und jedes $i \geqslant 1$. $s^{(1)}, s^{(2)}, \ldots$ nennt man die ω-fachen Summenwerte der Reihe Σu_n.

Beispiel. Setzen wir

$$a_n = \frac{1}{2^{k_1}} \text{ für } n \leqslant 2^{k_1-1} \text{ und}$$

$$a_n = \frac{1}{2^{k_\nu}} \text{ für } \sum_{i=1}^{\nu-1} 2^{k_i - i} < n \leqslant \sum_{i=1}^{\nu} 2^{k_i - i},$$

so ist Σa_n ω-fach negativ-konvergent. Die Fundamentalreihe $0, \frac{1}{2}, \frac{3}{4}, \frac{7}{8}, \ldots$ enthält die ω-fachen Summenwerte der Reihe Σa_n.

Beweis. Aus $\left| s_{n_\nu^{(\mu)}} - 1 + \frac{1}{2^{\mu-1}} \right| > \varepsilon$ für jedes $\nu \geqslant 1$ und $\mu \geqslant 1$ folgt insbesondere $|s_{n_1^{(1)}}| > \varepsilon$ und da $s_\nu \leqslant \frac{\nu}{2^{k_1}}$ gilt auch $n_1^{(1)} > 2^{k_1} . \varepsilon$. Sei $n_{i_1}^{(2)} > n_1^{(1)} : \varepsilon$ also auch $> 2^{k_1-1}$. Aus $\left| s_{n_{i_1}^{(2)}} - \frac{1}{2} \right| > \varepsilon$ folgt, da $s_{n_{i_1}^{(2)}} \leqslant \frac{1}{2} + \frac{n_{i_1}^{(2)} - 2^{k_1-1}}{2^{k_2}}$, $n_{i_1}^{(2)} > \varepsilon . 2^{k_2} + 2^{k_1-1}$. Sei $n_{i_2}^{(3)} > n_{i_1}^{(2)}\left(1 + \frac{1}{\varepsilon}\right)$ folglich $n_{i_2}^{(3)} > 2^{k_1-1} + 2^{k_2-2}$.

Aus $\left| s_{n_{i_2}^{(3)}} - \frac{3}{4} \right| > \varepsilon$ folgt wieder, da $s_{n_{i_2}^{(3)}} \leqslant \frac{3}{4} + \frac{n_{i_2}^{(3)} - 2^{k_1-1} - 2^{k_2-2}}{2^{k_3}}$, $n_{i_2}^{(3)} > \varepsilon\, 2^{k_3} + 2^{k_1-1} + 2^{k_2-2}$. Sei wieder $n_{i_3}^{(4)} > n_{i_2}^{(3)}\left(1 + \frac{1}{\varepsilon}\right)$ folglich $n_{i_3}^{(4)} > 2^{k_3} + 2^{k_1-1} + 2^{k_2-2}$ und a fortiori $n_{i_3}^{(4)} > 2^{k_1-1} + 2^{k_2-2} + 2^{k_3-3}$.

So fortfahrend können wir für jedes positive ganze μ die Zahl $f(\mu) = \sum_{r=1}^{\mu} 2^{k_r - r}$ bestimmen. Offenbar ist $s_{f(\mu)} = 1 - \frac{1}{2^{\mu}}$ also $s_n \geqq 1 - \frac{1}{2^{\mu}}$ falls $n > f(\mu)$.

Bestimmen wir nun p derart, dass $\varepsilon > \frac{1}{2^{p-1}}$, so folgt aus $\left| s_{n_\nu^{(p+1)}} - 1 + \frac{1}{2^p} \right| > \varepsilon$ für jedes ν, dass auch:

$$| s_{n_\nu^{(p+1)}} - 1 | > \frac{1}{2^p}. \quad \ldots \ldots \ldots \quad (a)$$

für jedes ν.

Bestimmen wir nun $n_\nu^{(p+1)} > f(p+1)$, so haben wir $s_{n_\nu^{(p+1)}} \geqq 1 - \frac{1}{2^{p+1}}$ also $| s_{n_\nu^{(p+1)}} - 1 | \leqq \frac{1}{2^{p+1}}$ was aber mit der nach (a) gültigen Relation $s_{n_\nu}^{(p+1)} - 1 | > \frac{1}{2^p}$ nicht verträglich ist.