Mathematics. — *„Die Hardy-Littlewoodsche Umkehrung des Abelschen Stetigkeitssatzes in der intuitionistischen Mathematik".* By M. J. BELINFANTE. (Communicated by Prof. L. E. J. BROUWER).

(Communicated at the meeting of March 28, 1931.)

In diesem Artikel gebe ich einen ausführlichen intuitionistischen Beweis für die Hardy-Littlewoodsche Umkehrung des Abelschen Stetigkeitssatzes. Dieser Beweis schliesst sich ganz dem von KARAMATA vereinfachten Landauschen Beweis an, welcher nur an einer Stelle einer kleinen Abänderung bedarf, damit er auch in der intuitionistischen Theorie gültig bleibt. Die Anwendung des Mittelwertsatzes aus der Differentialrechnung ist nämlich, wie aus einfachen Beispielen ersichtlich, in der intuitionistischen Mathematik nicht ohne weiteres gestattet.

Neben diesem „positiven" Hardy-Littlewoodschen Satz werden die analogen Theoreme entwickelt für die in der klassischen Theorie nicht existierenden Begriffe der negativ-konvergenten Reihen und negativ-limitierten Folgen. Diese Nebensätze folgen den positiven Vorbildern. Die Erweiterung auf mehrfache negative Konvergenz ist nur angedeutet.

Für die intuitionistische Theorie der unendlichen Reihen vergleiche man folgende Arbeiten:

1. L. E. J. BROUWER. Ueber die Bedeutung des Satzes vom ausgeschlossenen Dritten in der Mathematik, insbesondere in der Funktionentheorie. Journal für die reine und angewandte Mathematik, Bd. 154, S. 1—7.

2. M. J. BELINFANTE. Zur intuitionistischen Theorie der unendlichen Reihen. Sitzungsberichte der Preuss. Ak. der Wissensch. 1929, S. 639—660.

3. M. J. BELINFANTE. Absolute Konvergenz in der intuitionistischen Mathematik. Proceedings Amsterdam. Vol. XXXIII, S. 1180—1184.

4. M. J. BELINFANTE. Ueber eine besondere Klasse von non-oszillierenden Reihen. Vol. XXXIII, S. 1170—1179.

§ 1.

Satz I. Es sei $a_n \geqq 0$ *und* $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ *für* $0 < x < 1$ *positiv konvergent.*

a. *Aus* $^{+}\lim_{x=1} (1-x) f(x) = s$ *folgt* $^{+}\lim_{n=\infty} \frac{1}{n}(a_1 + a_2 + \ldots + a_n) = s$.

b. *Aus* $^{-}\lim_{x=1} (1-x) f(x) = s$ *folgt* $^{-}\lim_{n=\infty} \frac{1}{n}(a_1 + a_2 + \ldots + a_n) = s$.

c. *Aus* $^{-}\lim_{x=1} (1-x) f(x) = (s', s'', \ldots s^{(p)})$ *folgt* $^{-}\lim_{n=\infty} \frac{1}{n}(a_1 + a_2 + \ldots + a_n) =$

$$= (s', s'', \ldots s^{(p)}).$$

Satz II. Es sei $na_n < c$ *und* $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ *für* $0 < x < 1$ *positiv konvergent.*

a. *Aus* ${}^{+}\lim f(x) = s$ *folgt dass* Σa_n *positiv konvergiert zu* s.

b. *Aus* ${}^{-}\lim f(x) = s$ *folgt dass* Σa_n *negativ konvergiert zu* s.

c. *Aus* ${}^{-}\lim f(x) = (s', s'', \ldots s^{(p)})$ *folgt dass* Σa_n *p-fach negativ konvergent ist.*

In der klassischen Theorie ist der Wortlaut dieser Sätze ganz ähnlich, nur wird die Unterscheidung positiv bzw. negativ fortgelassen, wodurch a. und *b.* in einen einzigen Satz übergehen. Für den Beweis von Satz I folgen wir der Darstellung von KARAMATA [1]), für Satz II der Beweisanordnung von LANDAU [2]).

Wir brauchen den Hilfssatz, dass man jeder reellen, im Intervall (0—1) gleichmässig stetigen Funktion $f(x)$ für jedes $\varepsilon > 0$ ein Polynom $P(x)$ derart zuordnen kann, dass $P(x) - \varepsilon < f(x) < P(x) + \varepsilon$ für jedes $0 \leqslant x \leqslant 1$. Diesen Weierstraszschen Approximationssatz kann man nach LEBESGUE [3]) wie folgt beweisen.

Zu einem gegeben $\varepsilon > 0$ bestimme man die ganze Zahl n, so dass:

$$|f(x+h) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{3} \qquad \text{für } |h| \leqslant \frac{1}{n}.$$

Man berechne dann die Koeffizienten $a_0, a_1, a_2, \ldots a_n$ aus den Gleichungen:

$$f\left(\frac{k}{n}\right) = a_0 + 2 \sum_{i=0}^{k} a_{i+1} \left(\frac{k}{n} - \frac{i}{n}\right); \ (k = 0, 1, \ldots n) \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

und bestimme μ derart dass $\mu > |a_i|$ für jedes $0 \leqslant i \leqslant n$.

Ist nun $p(x)$ ein Polynom derart dass

$$\Big| p(x) - |x| \Big| < \frac{\varepsilon}{3\mu n} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2)$$

für jedes $-1 \leqslant x \leqslant 1$, so ist $P(x) = a_0 + \sum_{i=0}^{n-1} a_{i+1} \left\{ p\left(x - \frac{i}{n}\right) + \left(x - \frac{i}{n}\right) \right\}$ das verlangte Polynom. Setzen wir nämlich

$$Q(x) = a_0 + \sum_{i=0}^{n-1} a_{i+1} \left\{ \left| x - \frac{i}{n} \right| + \left(x - \frac{i}{n}\right) \right\} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (a)$$

so gilt:

$$Q\left(\frac{k}{n}\right) = f\left(\frac{k}{n}\right) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (b)$$

---

[1] J. KARAMATA. Ueber die Hardy-Littlewoodschen Umkehrungen des Abelschen Stetigkeitssatzes. Mathematische Zeitschrift, Bd. 32, S. 319—320.

[2]) E. LANDAU. Darstellung und Begründung einiger neuerer Ergebnisse der Funktionentheorie. Berlin 1916, S. 45—56.

[3]) C. DE LA VALLÉE POUSSIN. Leçons sur l'approximation des fonctions d'une variable réelle. Paris 1919, S. 2—5.

Aus (2) folgt leicht dass:

$$|P(x) - Q(x)| < \frac{\varepsilon}{3} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (c)$$

für jedes $0 \leqslant x \leqslant 1$. Offenbar haben wir für $\frac{k}{n} \leqslant x \leqslant \frac{k+1}{n}$:

$\left| Q(x) - Q\left(\frac{k}{n}\right) \right| \leqslant \left| Q\left(\frac{k}{n}\right) - Q\left(\frac{k+1}{n}\right) \right|$, also auch:

$$\left| Q(x) - f\left(\frac{k}{n}\right) \right| = \left| Q(x) - Q\left(\frac{k}{n}\right) \right| \leqslant \left| f\left(\frac{k}{n}\right) - f\left(\frac{k+1}{n}\right) \right| < \frac{\varepsilon}{3} \quad . \quad (d)$$

Aus (c) und (d) folgern wir: $\left| P(x) - f\left(\frac{k}{n}\right) \right| < \frac{2\varepsilon}{3}$ für $\frac{k}{n} \leqslant x \leqslant \frac{k+1}{n}$, und hieraus: $|P(x) - f(x)| < \varepsilon$ für $\frac{k}{n} \leqslant x \leqslant \frac{k+1}{n}$, also, da $k < n$ willkürlich ist, auch für jedes x in dem Intervall $(0 - 1)$.

Das Hilfspolynom $p(x)$ findet man sofort aus der für $-1 \leqslant x \leqslant 1$ gleichmässig konvergenten Reihe

$$|x| = 1 - \frac{1}{2}(1 - x^2) - \frac{1}{2.4}(1 - x^2)^2 - \frac{1.3}{2.4.6}(1 - x^2)^3 - \ldots .$$

welche die Binomialentwicklung von $\{1 - (1 - x^2)\}^{\frac{1}{2}}$ nach Potenzen von $(1 - x^2)$ darstellt.

Beweis des Satzes I^a.

Substituieren wir $f(x^{1+p})\ (p \geqslant 0)$ für $f(x)$ in die Voraussetzung von Satz I^a, so finden wir:

$$^{+}\lim_{x=1} (1 - x) \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n (x^n)^p = {}^{+}\lim \frac{1 - x}{1 - x^{1+p}} s = \frac{s}{1 + p} = s \int_0^1 x^p \, dx,$$

und durch wiederholte Anwendung, für ein willkürliches Polynom $P(x)$:

$$^{+}\lim_{x=1} (1 - x) \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n P(x^n) = s \int_0^1 P(x) \, dx \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (3)$$

Für den Beweis von Satz I^a bestimmen wir bei gegebenem $\varepsilon > 0$ (das < 1 vorausgesetzt wird) zuerst ξ_1 derart, dass:

$$\left| \frac{\log \frac{1}{x}}{1 - x} - 1 \right| < \frac{\varepsilon}{8(s + 1)} \text{ für jedes } \xi_1 \leqslant x < 1 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (4)$$

Sodann definieren wir die beiden im Intervall (0—1) gleichmässig stetigen Funktionen $\varphi(x)$ und $\Phi(x)$ durch:

$$\left.\begin{array}{ll}
\varphi(x)=0 & \text{für } 0 \leqslant x \leqslant \frac{1}{e} \\
\varphi(x)=\frac{ex-1}{(e\eta+1)\eta} & \text{,,}\ \frac{1}{e} \leqslant x \leqslant \frac{1}{e}+\eta \\
\varphi(x)=\frac{1}{x} & \text{,,}\ \frac{1}{e}+\eta \leqslant x \leqslant 1 \\
\Phi(x)=0 & \text{,,}\ 0 \leqslant x \leqslant \frac{1}{e}-\eta \\
\Phi(x)=\frac{ex+e\eta-1}{\eta} & \text{,,}\ \frac{1}{e}-\eta \leqslant x \leqslant \frac{1}{e} \\
\Phi(x)=\frac{1}{x} & \text{,,}\ \frac{1}{e} \leqslant x \leqslant 1
\end{array}\right\} \quad \ldots\ldots \quad (5)$$

wo η für $\frac{\varepsilon}{4(s+1)e}$ gesetzt ist.

Bestimmen wir nun die Polynome $P(x)$ und $p(x)$ derart, dass:

$$\left.\begin{array}{l}
|P(x)-\Phi(x)| < \frac{\varepsilon}{12(s+1)} \\
\text{und:} \\
|p(x)-\varphi(x)| < \frac{\varepsilon}{12(s+1)}
\end{array}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (6)$$

für jedes $0 \leqslant x \leqslant 1$, so finden wir leicht:

$$\left.\begin{array}{l}
\left|\int_0^1 P(x)\,dx-1\right| < \frac{\varepsilon}{3(s+1)} \\
\text{und:} \\
\left|\int_0^1 p(x)\,dx-1\right| < \frac{\varepsilon}{3(s+1)}
\end{array}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (7)$$

Nach (3) kann man ξ_2 zwischen ξ_1 und 1 derart bestimmen, dass für $\xi_2 \leqslant x < 1$ sowohl:

$$\left.\begin{array}{l}
\left|(1-x)\sum_{n=0}^{\infty} a_n P(x^n)\,x^n - s\int_0^1 P(x)\,dx\right| < \frac{\varepsilon}{4} \\
\text{als:} \\
\left|(1-x)\sum_{n=0}^{\infty} a_n p(x^n)\,x^n - s\int_0^1 p(x)\,dx\right| < \frac{\varepsilon}{4}
\end{array}\right\} \quad \ldots\ldots \quad (8)$$

Wir bestimmen nun noch ξ_3 zwischen ξ_2 und 1 derart, dass:

$$(1-x)\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n < 2(s+1) \quad \ldots\ldots\ldots \quad (9)$$

fur $\xi_3 < x < 1$. Sei schliesslich M eine ganze Zahl $> \dfrac{1}{\log \frac{1}{\xi_3}}$; dann gilt für jedes $m > M$:

$$\left| \frac{1}{m} \sum_{n=0}^{m} a_n - s \right| < \varepsilon \quad \ldots \ldots \ldots \quad (10)$$

Denn setzen wir:

$$\left.\begin{aligned} \chi(x) &= 0 \quad \text{für } 0 \leqslant x < \frac{1}{e} \\ \chi(x) &= \frac{1}{x} \quad \text{,,} \quad \frac{1}{e} \leqslant x \leqslant 1 \end{aligned}\right\} \quad \ldots \ldots \quad (11)$$

(wobei $\chi(x)$ nur für von $\frac{1}{e}$ positiv verschiedene Werte aus dem Intervall $\left(0, \frac{1}{e}\right)$ definiert ist), und substituieren wir für x den Wert $x_1 = e^{-\frac{1}{m}}$, so gilt offenbar:

$$\frac{1}{m} \sum_{0}^{m} a_n = \frac{\log \frac{1}{x_1}}{1 - x_1} \cdot (1 - x_1) \sum_{n=0}^{\infty} a_n \, \chi(x_1^n) \, x_1^n \quad \ldots \ldots \quad (12)$$

Aus $m > M$ folgt dass $\xi_3 < x_1 < 1$. Da sowohl für jedes von $\frac{1}{e}$ positiv verschiedene x aus dem Intervall (0—1) als für $x = \frac{1}{e}$ die Relation $\varphi(x) \leqslant \chi(x) \leqslant \Phi(x)$ erfüllt ist, so findet man aus (6) und) (9):

$$(1 - x_1) \sum_{n=0}^{\infty} a_n \, \chi(x_1^n) \, x_1^n \leqslant (1 - x_1) \sum_{n=0}^{\infty} a_n \, P(x_1^n) \, x_1^n + \frac{\varepsilon}{6}$$

und

$$(1 - x_1) \sum_{n=0}^{\infty} a_n \, \chi(x_1^n) \, x_1^n \geqslant (1 - x_1) \sum_{n=0}^{\infty} a_n \, p(x_1^n) \, x_1^n - \frac{\varepsilon}{6}$$

und hieraus nach (8) und (7):

$$\left| (1 - x_1) \sum_{n=0}^{\infty} a_n \, \chi(x_1^n) \, x_1^n - s \right| < \frac{3}{4} \varepsilon \quad \ldots \ldots \quad (13)$$

Aus (13). (12) und (4) folgt unmittelbar (10).

Beweis des Satzes I^b.

Wir beweisen für jedes $\varepsilon > 0$ (das < 1 vorausgesetzt wird) die Unmöglichkeit des Bestehens einer steigenden Fundamentalreihe Indizes

$$n_1 < n_2 < n_3 < \quad \ldots \ldots \ldots \quad (14)$$

derart, dass für jedes i:

$$\left| \frac{1}{n_i} (a_0 + a_1 + \ldots + a_{n_i}) - s \right| > \varepsilon \quad \ldots \ldots \quad (15)$$

Hierzu bestimmen wir mit Hilfe der Reihe (14) zu jeder vorgelegten natürlichen Zahl M_ν eine Zahl $\xi_\nu < 1$ so, dass:

$$\xi_\nu > 1 - \frac{1}{M_\nu} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (16)$$

und:

$$\left| (1-\xi_\nu) \sum_0^\infty a_n \xi_\nu^n - s \right| > \theta \quad \ldots\ldots\ldots \quad (17)$$

wo θ eine bestimmte, nur von ε und s abhängige, positive Konstante ist, und wiederholen dies mit $M_{\nu+1} > \frac{1}{1-\xi_\nu}$, usw.

Falls also eine Fundamentalreihe (14) existierte, so würde der Prozess eine Fundamentalreihe reeller Zahlen $\xi_1 < \xi_2 < \ldots$ erzeugen, für die (17) erfüllt wäre, während $^+lim\, \xi_n = 1$, und das ist wider die Voraussetzung des Satzes.

Um nun θ und die zu der gegebenen Zahl M_ν gehörige Zahl ξ_ν zu finden, bestimmen wir zuerst eine Zahl $\eta < \frac{\varepsilon}{7e(s+1)}$ und dann eine Zahl $a_1 > 0$, so dass:

$$\left| \frac{1-x}{\log \frac{1}{x}} - 1 \right| < \eta \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (18)$$

für jedes $a_1 \leqslant x < 1$.

Seien $\Phi(x)$ und $\varphi(x)$ die im vorigen Beweis durch (5) definierten Funktionen, $P(x) = \sum_0^{m_1} C_k x^k$ und $p(x) = \sum_0^{m_2} c_k x^k$ Polynome derart, dass für jedes $0 \leqslant x \leqslant 1$:

$$\left. \begin{aligned} |\varphi(x) - p(x)| &< \frac{\varepsilon}{7(s+\varepsilon)} \\ |\Phi(x) - P(x)| &< \frac{\varepsilon}{7(s+\varepsilon)} \end{aligned} \right\} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (19)$$

und $\mu > 1$ eine Zahl so, dass für jedes i:

$$\left. \begin{aligned} \mu &> |C_i| \\ \mu &> |c_i| \end{aligned} \right\} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (20)$$

dann ist, wenn wir $m_1 + m_2 = m$ setzen,

$$\theta = \frac{\varepsilon}{7\, m\mu} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (21)$$

die in (17) auftretende Konstante.

Wir bestimmen nun erstens a_2 zwischen a_1 und 1 derart, dass

$$a_2 > 1 - \frac{1}{M_\nu} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (22)$$

und sowohl:

als:

$$\left.\begin{aligned} \left|(1-x)\sum_{n=0}^{\infty} s\,P(x^n)\,x^n - s\right| &< \frac{3\varepsilon}{7} \\ \left|(1-x)\sum_{n=0}^{\infty} s\,p\,(x^n)\,x^n - s\right| &< \frac{3\varepsilon}{7} \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots \quad (23)$$

für $\alpha_2 < x < 1$;

zweitens aus der Fundamentalreihe (14) einen Index

$$n_i > \frac{m+1}{log\,\frac{1}{\alpha_2}} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (24)$$

Die Bestimmung von α_2 ist möglich, denn $lim\,(1-x)\sum\limits_{n=0}^{\infty} s\,P(x^n)\,x^n =$ $= s\int\limits_0^1 P(x)\,dx$ und aus (19) folgt $\left|s\int\limits_0^1 P(x)\,dx - s\int\limits_0^1 \Phi(x)\,dx\right| < \frac{\varepsilon}{7}$, während $\left|s\int\limits_0^1 \Phi(x)\,dx - s\right| < \frac{\varepsilon}{7}$.

Setzen wir nun:

$$\left.\begin{aligned} x_\nu &= e^{-\frac{1}{n_i}} \\ \xi_k &= x_\nu^{k+1} \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (25)$$

für jedes $k = 0, 1, 2, \ldots m$, dann brauchen wir nur zu beweisen, dass (16) und (17) für eine der so bestimmten Zahlen ξ_k erfüllt ist.

Offenbar folgt aus (25) und (24) dass $\alpha_1 < \alpha_2 < \xi_k \leqslant x_\nu < 1$. Hieraus folgt nach (22) dass (16) erfüllt ist. Wenn nun $\chi(x)$ die im vorigen Beweis durch (11) definierte Funktion ist, so gilt:

$$(1-x_\nu)\sum_{n=0}^{\infty} a_n\,\chi(x_\nu^n)\,x_\nu^n - s = \frac{1-x_\nu}{log\,\frac{1}{x_\nu}}\left\{\frac{1}{n_i}\sum_{0}^{n_i} a_n - s\right\} + \left(\frac{1-x_\nu}{log\,\frac{1}{x_\nu}} - 1\right)s. \quad (26)$$

Aus (26), (18) und (15) folgt leicht: $\left|(1-x_\nu)\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n\,\chi(x_\nu^n)\,x_\nu^n - s\right| > \frac{5}{7}\,\varepsilon$, also entweder:

$$(1-x_\nu)\sum_{n=0}^{\infty} a_n\,\chi(x_\nu^n)\,x_\nu^n > s + \frac{5}{7}\,\varepsilon \quad \ldots\ldots \quad (27)$$

oder:

$$(1-x)\sum_{n=0}^{\infty} a_n\,\chi(x_\nu^n)\,x_\nu^n < s - \frac{5}{7}\,\varepsilon \quad \ldots\ldots \quad (28)$$

Aus $\varphi(x) \leqslant \chi(x) \leqslant \Phi(x)$ und (19) folgt nach (27) bzw. (28):

$$(1-x_\nu)\sum_{n=0}^{\infty} a_n\, P(x_\nu^n)\, x_\nu^n + \frac{\varepsilon}{7(s+\varepsilon)}(1-x_\nu)\sum_{n=0}^{\infty} a_\nu\, x_\nu^n > s + \frac{5}{7}\varepsilon \quad . \quad (29)$$

bzw.:

$$(1-x_\nu)\sum_{n=0}^{\infty} a_n\, p(x_\nu^n)\, x_\nu^n - \frac{\varepsilon}{7(s+\varepsilon)}(1-x_\nu)\sum_{n=0}^{\infty} a_\nu\, x_\nu^n < s - \frac{5}{7}\varepsilon. \quad . \quad (30)$$

Aus (29) folgt entweder:

$$(1-x_\nu)\sum_{n=0}^{\infty} a_n\, P(x_\nu^n)\, x_\nu^n > s + \frac{4}{7}\varepsilon \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (31)$$

oder: $\frac{\varepsilon}{7(s+\varepsilon)}(1-x_\nu)\sum_{n=0}^{\infty} a_n\, x_\nu^n > \frac{\varepsilon}{7}$, mithin:

$$(1-x_\nu)\sum_{n=0}^{\infty} a_n\, x_\nu^n - s > \varepsilon \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (32)$$

Aus (30) folgt ebenso entweder:

$$(1-x_\nu)\sum_{n=0}^{\infty} a_n\, p(x_\nu^n)\, x_\nu^n < s - \frac{4}{7}\varepsilon \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (33)$$

oder: $-\frac{\varepsilon}{7(s+\varepsilon)}(1-x_\nu)\sum_{n=0}^{\infty} a_n\, x_\nu^n < -\frac{\varepsilon}{7}$, also abermals:

$$(1-x_\nu)\sum_{n=0}^{\infty} a_n\, x_\nu^n - s > \varepsilon \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (32)$$

Aus (31) und (23) folgern wir:

$$(1-x_\nu)\sum_{0}^{\infty}(a_n - s)\, P(x_\nu^n)\, x_\nu^n > \frac{\varepsilon}{7}$$

oder:

$$\sum_{k=0}^{m_1}(1-x_\nu)\sum_{n=0}^{\infty}(a_n - s)\, C_k\, (x_\nu^n)^k\, x_\nu^n > \frac{\varepsilon}{7}$$

und hieraus nach (20) für ein bestimmtes $0 \leqq k \leqq m_1$:

$$(1-x_\nu)\sum_{n=0}^{\infty}(a_n - s)\, x_\nu^{n(k+1)} > \frac{\varepsilon}{7(m_1+1)\mu} > \theta$$

also auch:

$$(1-x_\nu^{k+1})\sum_{n=0}^{\infty}(a_n - s)\, x_\nu^{n(k+1)} > \theta$$

oder:

$$(1-\xi_k)\sum_{n=0}^{\infty}(a_n - s)\, \xi_k^n > \theta \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (34)$$

Ebenso finden wir aus (33):

$$(1-\xi_k)\sum_{n=0}^{\infty}(a_n - s)\, \xi_k^n < -\theta \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (35)$$

Jedesfalls ist eine der Beziehungen (34), (35) oder (32) erfüllt. Es gibt also jedenfalls ein k derart, dass:

$$\left|(1-\xi_k) \sum_{n=0}^{\infty} (a_n - s)\, \xi_k^n\right| > \theta$$

Beweis des Satzes I^c.

Wir verfahren ganz analog wie bei dem Beweis des Satzes I^b; nur muss überall wo das Bestehen *einer* Fundamentalreihe Indizes vorausgesetzt bzw. postuliert wird, das gleichzeitige Bestehen von p Fundamentalreihen vorausgesetzt bzw. postuliert werden.

§ 2 *Satz II^a und II^b.*

Für die Beweise von den Sätzen II^a und II^b brauchen wir folgende Hilfssätze über reelle im Intervall (0—1) gleichmässig stetige Funktionen.

Hilfssatz I Aus $^+\lim\limits_{x=1} f(x) = s$ *und* $(1-x)^2 f''(x) < c$ *für jedes* $0 \leqq x < 1$ *folgt* $^+\lim\limits_{x=1} (1-x)\, f'(x) = 0$.

Hilfssatz II. Aus $^-\lim\limits_{x=1} f(x) = s$ *und* $(1-x)^2 f''(x) < c$ *für jedes* $0 \leqq x < 1$ *folgt* $^-\lim\limits_{x=1} (1-x) f'(x) = 0$.

Wir leiten zunächst aus $f''(x) < \frac{c}{(1-x)^2}$ zwei Beziehungen ab. Man folgert nämlich durch zweimalige Integration, dass für jedes $0 < x_1 < x_2 < 1$:

$$(x_2 - x_1) f'(x_1) > f(x_2) - f(x_1) - c \log \frac{1-x_1}{1-x_2} + \frac{c\,(x_2 - x_1)}{1 - x_1} \quad . \quad (1)$$

und:

$$(x_2 - x_1) f'(x_2) < f(x_2) - f(x_1) - c \log \frac{1-x_1}{1-x_2} + \frac{c\,(x_2 - x_1)}{1 - x_2} \quad . \quad (2)$$

Setzen wir $x_2 = x_1 + (1-\theta_1)(1-x_1)$ $(0 < \theta_1 < 1)$, so folgt aus (1) dass:

$$(1 - x_1) f'(x_1) > \frac{f\{x_1 + (1-\theta_1)(1-x_1)\} - f(x_1)}{1-\theta_1} + \frac{c \log \theta_1}{1-\theta_1} + c. \quad (3)$$

für jedes $0 < x_1 < 1$ und $0 < \theta_1 < 1$.

Setzen wir $x_1 = x_2 - (1-\theta_2)(1-x_2)$ $(0 < \theta_2 < 1)$, so folgt aus (2) dass:

$$(1 - x_2) f'(x_2) < \frac{f(x_2) - f\{x_2 - (1-\theta_2)(1-x_2)\}}{1-\theta_2} - \frac{c \log (2-\theta_2)}{1-\theta_2} + c \quad (4)$$

für jedes $\frac{1}{2} < x_2 < 1$ und $0 < \theta_2 < 1$.

Wir können nun zu jedem vorgelegten $\varepsilon > 0$ ϑ zwischen 0 und 1 derart bestimmen, dass $\left|\frac{c \log \vartheta}{1-\vartheta} + c\right| < \frac{\varepsilon}{2}$ und auch $\left|\frac{c}{1-\vartheta} \log (2-\vartheta) - c\right| < \frac{\varepsilon}{2}$.

Alsdan folgt für dieses ϑ und jedes $\frac{1}{2} < x < 1$:

$$(1-x)f'(x) > \frac{f\{x+(1-\vartheta)(1-x)\}-f(x)}{1-\vartheta} - \frac{\varepsilon}{2} \quad . \; . \; . \quad (I)$$

$$(1-x)f'(x) < \frac{f(x)-f\{x-(1-\vartheta)(1-x)\}}{1-\vartheta} + \frac{\varepsilon}{2} \quad . \; . \quad (II)$$

Beweis des ersten Hilfssatzes.

Wir bestimmen $\frac{1}{2} < a < 1$ derart, dass $|f(x)-s| < \frac{\varepsilon(1-\vartheta)}{4}$ für jedes $a < x < 1$. Setzen wir dann $\xi = 1 - \frac{1-a}{2-\vartheta}$, so folgt leicht aus der Beziehung (I) bzw. (II) dass für jedes $\xi < x < 1$:

$$(1-x)f'(x) > -\varepsilon \text{ bzw.: } (1-x)f'(x) < +\varepsilon,$$

also: $|(1-x)f'(x)| < \varepsilon$.

Beweis des zweiten Hilfssatzes.

Aus $|(1-x)f'(x)| > \varepsilon$ folgt entweder:

$$(1-x)f'(x) > \varepsilon \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (III)$$

oder:

$$(1-x)f'(x) < -\varepsilon \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (IV)$$

Aus (III) und (II) folgt: $\frac{f(x)-f\{x-(1-\vartheta)(1-x)\}}{1-\vartheta} > \frac{\varepsilon}{2}$, also entweder: $f(x)-s > \frac{\varepsilon}{4}(1-\vartheta)$ oder: $f\{x-(1-\vartheta)(1-x)\}-s < -\frac{\varepsilon}{4}(1-\vartheta)$.

Aus (IV) und (I) folgt: $\frac{f\{x+(1-\vartheta)(1-x)\}-f(x)}{1-\vartheta} < -\frac{\varepsilon}{2}$, also entweder: $f(x)-s > \frac{\varepsilon}{4}(1-\vartheta)$ oder: $f\{x+(1-\vartheta)(1-x)\}-s < -\frac{\varepsilon}{4}(1-\vartheta)$.

Falls nun eine Fundamentalreihe reeller Zahlen $\frac{1}{2} < \xi_1 < \xi_2 < \ldots.$ existierte mit der Eigenschaft dass $^{+}\mathit{lim}\, \xi_n = 1$ und $|(1-\xi_i)f'(\xi_i)| > \varepsilon$ für jedes i, so würde entweder: $|f(\xi_i)-s| > \frac{\varepsilon}{4}(1-\vartheta)$ oder:

$$|f\{\xi_i-(1-\vartheta)(1-\xi_i)\}-s| > \frac{\varepsilon}{4}(1-\vartheta)$$

oder aber:

$$|f\{\xi_i+(1-\vartheta)(1-\xi_i)\}-s| > \frac{\varepsilon}{4}(1-\vartheta).$$

Das ist aber wider die Voraussetzung, da aus $^{+}\mathit{lim}\, \xi_i = 1$ auch $^{+}\mathit{lim}\, \{\xi_i \pm (1-\vartheta)(1-\xi_i)\} = 1$ folgt.

Noch brauchen wir für die Beweise der Sätze II^{a} und II^{b} die beiden TAUBERschen Sätze:

Ist die Reihe $\sum_1^\infty a_n x^n$ *positiv-konvergent für* $|x| < 1$ *und gilt* ${}^+\lim_{x=1} \sum_1^\infty a_n x^n = s$ *und* ${}^+\lim \frac{1}{n}(a_1 + 2a_2 + \ldots + na_n) = 0$, *so ist die Reihe* Σa_n *positiv-konvergent und ihre Summe s.*

Ist die Reihe $\sum_1^\infty a_n x^n$ *positiv-konvergent für* $|x| < 1$ *und gilt* ${}^-\lim_{x=1} \sum^\infty a_n x^n = s$ *und* ${}^-\lim \frac{1}{n}(a_1 + 2a_2 + \ldots + na_n) = 0$, *so ist die Reihe* Σa_n *negativ-konvergent und ihre Summe s.*

Der zweite Satz geht hervor aus Theorem V § 4 S. 656 meines oben erwähnten Artikels (2), wenn man dort $k = 0$ substituiert.

Beweis der Sätze II^a *und* II^b.

a. Aus $f(x) = \sum_{n=0}^\infty a_n x^n$ und $na_n < c\ (c > 0)$ folgert man leicht: $f''(x) < \frac{c}{(1-x)^2}$, also nach Hilfssatz I: ${}^+\lim (1-x) f'(x) = 0$, daher auch: ${}^+\lim (1-x) \sum_1^\infty \frac{na_n}{c} x^n = 0$ und: ${}^+\lim (1-x) \sum_1^\infty \left(1 - \frac{na_n}{c}\right) x^n = 1$.

Nach Satz I^a gilt also:

$$ {}^+\lim \frac{1}{m} \sum_1^m \left(1 - \frac{na_n}{c}\right) = 1 $$

und hieraus folgt:

$$ {}^+\lim \frac{1}{m} \sum_1^m na_n = 0. $$

Nach dem TAUBERschen Satz ist nun Σa_n positiv-konvergent und die Summe s.

b. Aus $f''(x) < \frac{c}{(1-x)^2}$ und ${}^-\lim f(x) = s$ folgt jetzt nach Hilfssatz II: ${}^-\lim (1-x) f'(x) = 0$, also auch:

$$ {}^-\lim (1-x) \sum_1^\infty \frac{na_n}{c} x^n = 0 $$

und:

$$ {}^-\lim (1-x) \sum_1^\infty \left(1 - \frac{na_n}{c}\right) x^n = 1. $$

Nach Satz I^b gilt also

$$ {}^-\lim \frac{1}{m} \sum_1^m \left(1 - \frac{na_n}{c}\right) = 1 $$

und hieraus folgt:

$$ {}^-\lim \frac{1}{m} \sum_1^m na_n = 0. $$

Nach dem TAUBERschen Satz ist nun Σa_n negativ-konvergent und die Summe s.

Beweis des Satzes II^c.

Für diesen Beweis braucht man den

Hilfssatz. Aus $\overline{\ }\lim f(x) = (s', s'', \ldots s^{(p)})$ *und* $(1-x)^2 f''(x) < c$ *für jedes* $0 < x < 1$ *folgt* $\overline{\ }\lim f'(x) = 0$,

und den TAUBERschen Satz:

Ist die Reihe $\sum_0^\infty a_n x^n$ *positiv-konvergent für* $|x| < 1$ *und gilt*

$$\overline{\ }\lim \Sigma a_n x^n = (s', s'', \ldots s^{(p)}) \text{ und } \overline{\ }\lim \frac{1}{n} (a_1 + 2a_2 + \ldots + na_n) = 0,$$

so ist die Reihe Σa_n *p-fach negativ-konvergent. Die p-fachen Summenwerte sind* $s', s'', \ldots s^{(p)}$.

Die Beweise dieser Hilfssätze werden ganz analog wie die entsprechenden Theoreme für einfache negative Konvergenz geführt. Im übrigen ist der Beweis des Satzes II^c identisch mit dem des Satzes II^b, wenn man nur $(s', s'', \ldots, s^{(p)})$ für s substituiert.