

Astrophysics. — *Die Totalintensitäten der Fraunhoferschen Linien.* Von M. MINNAERT und C. SLOB. (Mitteilung aus der Heliophysikalischen Abteilung des Physikalischen Institutes, Utrecht). (Communicated by Prof. L. S. ORNSTEIN).

(Communicated at the meeting of April 25, 1931.)

Die Untersuchungen, welche während der letzten Jahre im hiesigen Laboratorium ausgeführt wurden, haben bewiesen, dass die Bestimmung der Totalintensitäten der Fraunhoferschen Linien eine sehr fruchtbare Methode ist um das Sonnenspektrum kennen zu lernen. Vor allem schien es wichtig zu untersuchen, wie die gesammte Lichtmenge die innerhalb einer Fraunhoferschen Linie verschwunden ist, mit zunehmender Konzentration der absorbierenden Teilchen allmählich wächst; unsere diesbezügliche Bestimmungen und ihre theoretische Erklärung findet man schon an anderer Stelle publiziert ¹⁾. Es scheint uns wahrscheinlich, dass die Messung der Totalintensitäten eine besondere Bedeutung bekommen wird für die Bearbeitung der Sternspektren, deren Spektrallinien meistens mit einer so kleinen Dispersion aufgenommen sind, dass die wirkliche Kontur kaum bestimmt werden kann.

Wir haben uns darum entschlossen, für alle praktisch vorkommenden Fälle eine Berechnung der Totalintensitäten auszuführen, und die Resultate in Kurvenform darzustellen; aus unseren Daten ist es umgekehrt auch möglich die Schlüsse welche man aus einer Messung der Totalintensität einer Linie ziehen kann sofort zu übersehen. Ähnliche Berechnungen waren schon früher von uns ausgeführt; während wir aber anfänglich verschiedene mögliche Annahmen über den Ursprung der Fraunhoferschen Linien untersucht hatten, und gezeigt hatten dass die Resultate nicht viel von der Wahl der Hypothesen abhängig sind, werden wir jetzt versuchen eine grössere Genauigkeit zu erreichen, und unseren Rechnungen die vollständigste Theorie der Fraunhoferschen Linien zu Grunde legen, welche jetzt zur Verfügung steht: diese, welche Professor A. PANNEKOEK vor kurzem publiziert hat ²⁾. Professor A. PANNEKOEK, der selbst die Absicht hatte diese Totalintensitäten aus seiner Theorie zu berechnen, war so liebenswürdig uns diesen Teil der Untersuchung zu überlassen, sobald er hörte, dass wir uns dafür besonders interessierten.

Die Berechnung der Totalintensität einer Fraunhoferschen Linie hat in drei sukzessiven Operationen zu geschehen :

¹⁾ M. MINNAERT und B. VAN ASSENBERGH, Zs. f. Phys. 53, 248, 1929.

M. MINNAERT und G. F. W. MULDER, Zs. f. Astrophysik, 1, 192, 1930 und 2, 165, 1931.

²⁾ M. N. R. A. S. 91, 139, 1930.

1. die Berechnung der Zerstreungskoeffizienten für eine Anzahl Punkte in wachsendem Abstände vom Zentrum der Linie; 2. die Berechnung der Lichtstärke welche der irdische Beobachter für jede dieser Wellenlängen beobachtet, und das Zeichnen des Linienkonturs; 3. die Bestimmung der totalen Lichtmenge welche in der Linie verschwunden ist, durch Integration über das ganze Areal.

1. *Die Bestimmung des Zerstreungskoeffizienten.*

Die Grundlage der Theorie ist, dass die Breite einer Fraunhoferschen Linie hauptsächlich durch den Dopplereffekt der thermischen Bewegung und durch die Dämpfung (entweder infolge der Strahlung oder der Stösse) bestimmt wird. In diesem Falle ist der Zerstreungskoeffizient s_0 pro Masseneinheit durch die Formel VOIGTS gegeben:

$$s_0 = \frac{4\sqrt{\pi} \varepsilon^2 N}{mcb_0} \int_0^{\infty} ye^{-y^2} dy \cdot \operatorname{arc\,tg} \frac{\nu' by}{\mu^2 + \frac{\nu'^2}{4} - b^2 y^2}$$

ε, m = Ladung und Masse des Elektrons; c = Lichtgeschwindigkeit; N = Anzahl Atome pro cm^3 , welche diese bestimmte Linie absorbieren; m_a = Masse von einem dieser Atome; $\mu = \omega - \omega_0$; $\omega = \frac{2\pi c}{\lambda}$; ν' = Dämpfungskonstante; $b = \frac{2\pi}{\lambda} \sqrt{\frac{2kT}{m_a}}$. Um dem Lesenden die Arbeit zu erleichtern, sind in der Tabelle I die Werte von b für die astrophysikalisch wichtigsten Elemente bei einer Temperatur von 5000° und verschiedenen Wellenlängen übersichtlich zusammengestellt.

Die Berechnung des VOIGTSchen Integrals in geschlossener Form ist nicht möglich. Herr VAN DER HELD hat Reihenentwicklungen und numerische Integrationen ausgeführt, mit deren Hilfe man die Werte des Integrals für jeden besonderen Fall mühelos angeben kann¹⁾.

Für die numerische Rechnung ist es wichtig, das Integral in eine Funktion von zwei Veränderlichen anstatt drei (μ, ν', b) umzuformen. Dazu schreiben wir es in der Form

$$\int ye^{-y^2} \operatorname{arc\,tg} \frac{ay}{r^2 - y^2} dy, \text{ mit } a = \frac{\nu'}{b} \text{ und } r^2 = \frac{\mu^2}{b^2} + \frac{a^2}{4}.$$

Das Integral hängt jetzt nur von r und a ab; sein Wert findet sich in der Abhandlung des Herrn VAN DER HELD.

2. *Die Berechnung der Lichtstärke in einem Punkt des Linienkonturs.*

Nennen wir i_0 die Lichtstärke im benachbarten kontinuierlichen Spektrum, i die Lichtstärke innerhalb der Linie. Nach der Theorie PANNEKOEKS ist die relative Lichtstärke i/i_0 fast vollständig durch die Grösse

¹⁾ Diese Arbeit wird demnächst in der Zs. f. Phys. publiziert.

TABELLE I.
Werte von $b \cdot 10^{-10}$ für $T = 5000^\circ$.

	$\lambda = 3500$	4000	4500	5000	5500	6000	6500 AE
H	16.3	14.2	12.7	11.4	10.4	9.52	8.80
He	8.20	7.16	6.37	5.73	5.21	4.78	4.41
C	4.73	4.13	3.68	3.31	3.01	2.76	2.55
N	4.38	3.82	3.40	3.06	2.78	2.55	2.36
O	4.09	3.57	3.18	2.86	2.60	2.39	2.20
Na	3.42	2.99	2.66	2.39	2.17	1.99	1.84
Mg	3.32	2.90	2.58	2.32	2.11	1.94	1.79
Al	3.16	2.76	2.47	2.21	2.01	1.84	1.70
Si	3.07	2.69	2.39	2.15	1.96	1.79	1.66
K	2.62	2.29	2.03	1.83	1.66	1.52	1.41
Ca	2.59	2.26	2.00	1.81	1.65	1.51	1.40
Sc	2.46	2.16	1.91	1.72	1.57	1.44	1.33
Ti	2.36	2.06	1.83	1.65	1.50	1.38	1.27
V	2.30	2.01	1.78	1.61	1.46	1.34	1.24
Cr	2.27	1.98	1.80	1.59	1.44	1.32	1.22
Mn	2.21	1.93	1.75	1.55	1.41	1.29	1.19
Fe	2.19	1.19	1.73	1.53	1.39	1.27	1.18
Co	2.13	1.86	1.69	1.49	1.43	1.31	1.15
Ni	2.13	1.86	1.69	1.49	1.43	1.31	1.15
Sr	1.75	1.53	1.36	1.22	1.11	1.04	0.94
Zr	1.72	1.50	1.33	1.20	1.09	1.00	0.92
Nb	1.69	1.47	1.31	1.18	1.08	0.99	0.91
Ba	1.40	1.22	1.09	0.98	0.89	0.81	0.75
La	1.39	1.21	1.08	0.97	0.88	0.81	0.74
Ce	1.39	1.21	1.08	0.97	0.88	0.81	0.74

$\frac{1}{\sqrt{\alpha}} = \sqrt{\frac{p}{g\kappa_0}}$ s_0 bestimmt. Hier bedeuten: g die Gravitationsbeschleunigung an der Oberfläche des Sterns, p den totalen Druck, κ_0 den Koeffizienten der allgemeinen Absorption (proportional p). Die Stöße zweiter Art zwischen Atome und Elektronen haben nur einen überraschend geringen Einfluss auf die Intensität des austretenden Lichtes, sodass wir

nur den Fall $aq^2 = 10^6$ betrachtet haben (in der Notation PANNEKOEKS).

Die Tabellen, welche angeben, wie die beobachtete Lichtstärke i/i_0 von a abhängt, findet man auf S. 148 der Publikation PANNEKOEKS angegeben; sie wurden ergänzt durch eine ausführliche Tabelle, welche er zu unserer Verfügung stellte.

Substituiert man den Wert von s_0 aus § I in den Ausdruck für a , so findet man:

$$\frac{1}{\sqrt{a}} = \sqrt{\frac{p}{g\kappa_0}} \frac{4\sqrt{\pi}\varepsilon^2 N}{mcbq} \int_0^\infty ye^{-y^2} dy \cdot \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{ay}{r^2 - y^2} = C \int ye^{-y^2} dy \cdot \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{ay}{r^2 - y^2}.$$

Die Zahlen C sind also der Konzentration der Atome proportional, welche die gegebene Spektrallinie absorbieren; die Proportionalitätskonstante hängt ab vom Druck, von der Temperatur, von der Zusammensetzung der Atmosphäre, u.s.w.

Die Berechnung fängt an mit der Wahl eines bestimmten Wertes für das Verhältnis $a = \frac{\nu'}{b}$ und für C ; es wird dann sukzessive $\frac{1}{\sqrt{a}}$ berechnet

für wachsende Werte von r . Bei jedem r gehört ein Wert von $\frac{\mu}{b}$ (der sich nur wenig von r unterscheidet), und bei jedem Werte von $\frac{1}{\sqrt{a}}$ gehört ein Verhältniss i/i_0 , sodass wir jetzt das Linienkontur zeichnen können mit $\frac{\mu}{b}$ als Abszissen. Diese Berechnung wurde für eine Anzahl Werte von C wiederholt, um zu untersuchen, wie die Linienkontur sich allmählich vertieft, wenn die Anzahl der wirksamen Atome wächst.

Schliesslich geschah die ganze Rechnung aufs neue für andere Werte des Verhältnisses $a = \frac{\nu'}{b}$.

3. Die Berechnung der Totalintensität einer Fraunhoferschen Linie. Wir haben jetzt die Totalintensität (= "Gesamtabsorption")

$$A = \int_{-\infty}^{+\infty} \left[1 - i\left(\frac{\mu}{b}\right) \right] d\mu$$

zu bestimmen. Die Rechnung wird wieder so eingerichtet, dass alle numerischen Resultate nur von der Grösse $a = \frac{\nu'}{b}$ abhängen, und dass nur am Schluss der Wert von b selbst eingeführt zu werden braucht. Wir berechnen darum nicht A , sondern

$$\frac{A}{b} = \int_{-\infty}^{+\infty} \left[1 - i\left(\frac{\mu}{b}\right) \right] d\left(\frac{\mu}{b}\right),$$

also das Areal der Linienkontur, wie sie in der oben beschriebenen Weise gezeichnet wurde.

Diese Integration geschah mit Hilfe eines Planimeters. Die genaue Bestimmung der Beiträge, welche die weitgedehnte Flügel der Linie liefern, war sehr schwierig, besonders wenn die Linien sehr stark waren, sodass die Dämpfung ganz über den Dopplereffekt vorherrschte. In diesen Teilen der Linie kann man dann aber immer mit genügender Annäherung $\frac{1}{\sqrt{a}}$ proportional $\frac{1}{\mu^2}$ setzen, während die beobachtete Lichtstärke fast linear mit $\frac{1}{\sqrt{a}}$ abnimmt, sodass $\frac{i}{i_0} = 1 - \frac{\text{const.}}{(a/b)^2}$. Es ist dann ein Leichtes, das Areal der Flügelspitzen analytisch zu berechnen, und es zu dem Areal der zentralen Teile, das mit dem Planimeter erhalten war, zu addieren.

Diese Areale müssen nun noch in praktisch brauchbare Grössen umgerechnet werden. 1. Sie müssen mit b multipliziert werden. 2. Bis jetzt war unsere Einheit die Energiemenge innerhalb eines Intervalls $\Delta\omega = 1$ des benachbarten kontinuierlichen Spektrums; will man die Intensitäten umrechnen in eine Einheit, welche mit 1 A.E. des benachbarten Spektrums übereinkommt, so hat man alle Zahlen noch durch $\frac{2\pi c}{\lambda^2} \cdot 10^{-8}$ zu teilen. (Z.B. für $\lambda = 4500$ A.E. teilt man durch $0.932 \cdot 10^{12}$).

Die Ergebnisse.

Die Ergebnisse der Rechnungen sind in Tabelle II vereinigt und in Fig. 1 graphisch dargestellt. Vorläufig achten wir nur auf die vollauszogenen

TABELLE II.
Werte von $\log A$ (in Energie pro AE des benachbarten Spektrums) für
4500 AE und $b = 1.70 \cdot 10^{10}$.

$\log a$	$\log C = 2.602$	-1	0	1	2	3	4	5	6
0	3.128	3.505	2.398	1.003	1.490	1.996			
-1	3.124	3.504	2.323	2.768	1.077	1.498	1.993		
-2	3.125	3.504	2.313	2.722	2.902	1.111	1.502		
-3			2.307	2.709	2.878	2.986	1.151	1.510	
-4					2.875	2.969	1.053	1.186	1.515

Linien. Fünf Kurven sind berechnet, die in ihrem linken Teil übereinstimmen, aber sich weiter voneinander trennen, je nach dem Werte von $a = \frac{v'}{b}$ (variierend von 10^{-4} bis 1).

Um die Grössenordnung der Resultate gleich mit den Beobachtungen vergleichen zu können, sind die Totalintensitäten schon in Energie pro Ängström umgerechnet (sie bedeuten also gleich Aequivalentbreiten in

AE); diese Umrechnung ist geschehen für $\lambda = 4500$ AE, $b = 1,70 \cdot 10^{10}$.

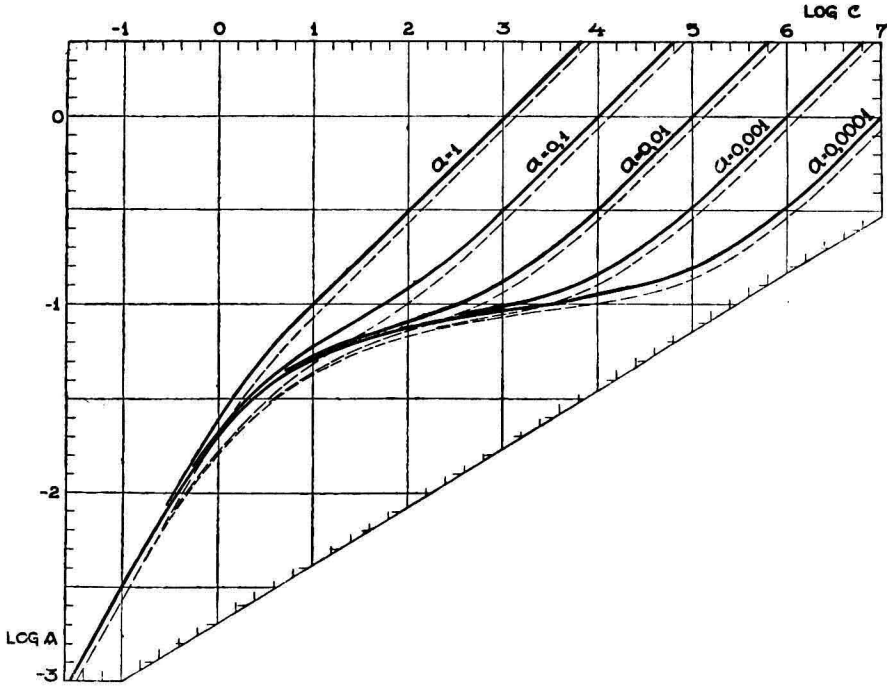


Fig. 1.

Totalintensität A der Fraunhoferschen Linien als Funktion der Anzahl absorbierende Atome. Parametrisch in $a = \frac{v'}{b}$. Die Grössen a sind Äquivalenzbreiten in A.E. wenn $\lambda = 4500$ und $b = 1,70 \cdot 10^{10}$.

Für andere Wellenlängen und andere Werte der Dopplerkonstante ist dann eine einfache Umrechnung auszuführen:

$$\text{Totalintensität} = \text{abgelesene Totalintensität} \times \frac{b}{1,70 \cdot 10^{10}} \times \frac{\lambda_{\text{AE}}^2}{(4500)^2}.$$

Als Abszisse ist $\log C$ gewählt, mit $C = \sqrt{\frac{p}{g x_0}} \cdot \frac{4\sqrt{\pi} \varepsilon^2}{mcq} \cdot \frac{N}{b}$, also proportional der Konzentration der betreffenden Atome.

Man sieht, dass die Resultate welche schon früher von SCHÜTZ¹⁾ und von uns gefunden waren, in grossen Zügen bestätigt werden; nur im Zwischengebiet hat sich die Form der Kurven ein wenig geändert. Bei einer kleinen Anzahl Atome ist die Totalintensität noch immer proportional N , dann kommt ein Stück, wo die Intensität sich nur langsam ändert, schliesslich wächst die Intensität wieder mit \sqrt{N} .

Wie man sieht, gelten diese Kurvenformen für alle Spektrallinien von allen Sternen; denn der Einfluss von Temperatur, Druck, Gravitation, Molekulargewicht oder Wellenlänge äussert sich nur in einer Parallelverschiebung, entweder in horizontaler oder vertikaler Richtung.

¹⁾ Zs. f. Phys. 64, 662, 1930; Zs. f. Astroph. 1, 300, 1930.

In Figur 2 sind dieselben Ergebnisse in einer anderen Weise dargestellt. Die Abszisse ist dieselbe wie in der ersten Figur, als Ordinate

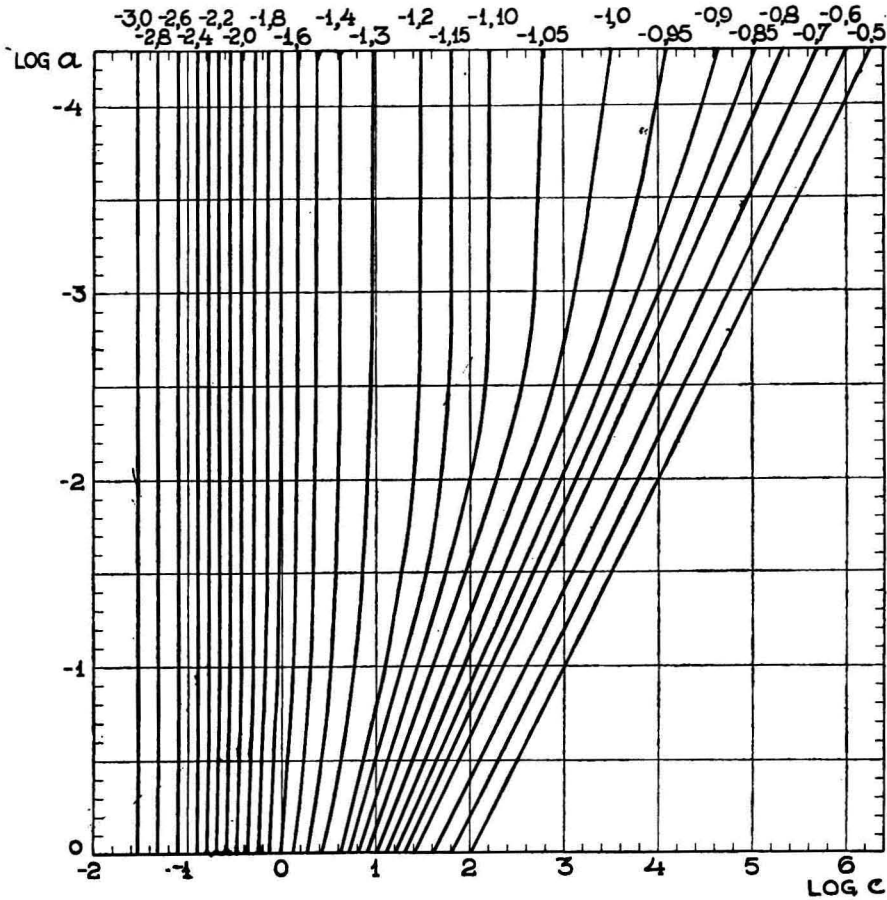


Fig. 2.

Werte von a und c bei welchen eine bestimmte Totalintensität auftreten kann.
Parametrisch in $\log A$.

aber haben wir die Grösse $a = \frac{\nu'}{b}$ genommen. Für jede gegebene Totalintensität ist eine Kurve gezogen, welche angibt, bei welchen Kombinationen von C und a diese Totalintensität auftreten kann. Man sieht, dass für sehr schwache Linien jede Bestimmung der Totalintensität sofort den Wert von C ergibt, aber nichts über a lehrt; während bei starken Linien nicht ohne weiteres zu sagen ist ob die grosse Intensität durch ein grosses C oder durch ein grosses a zu erklären ist; nur mit Hilfe anderer Messungen oder theoretischer Betrachtungen können dann die Werte von C und a getrennt werden.

Während in Fig. 1 die Interpolation für a ziemlich unsicher ist, ist diese Interpolation in Fig. 2 sehr leicht ausführbar.

Wir geben jetzt noch ein paar Beispiele für den praktischen Gebrauch.

Frage. Welche ist die Totalintensität einer Eisenlinie, für welche $\lambda = 5167$; $\nu' = 11.10^8$; $T = 5000^\circ$; $\log C = 2.0$? — *Antwort.* In der Tabelle I findet man: $b = 1.48 \cdot 10^{10}$, also $a = \frac{\nu'}{b} = 0.074$. Von Fig. 2 liest man ab: $\log A = \bar{1}.037$. Hieraus folgt das abgelesene $A = 0.109$ und das wahre $A = 0.109 \times \frac{1.48}{1.70} \times \left(\frac{5167}{4500}\right)^2 = 0.126$ (Äquivalentbreite in AE).

Frage. Wenn ich für die Totalintensität einer Fraunhoferschen Linie des Titans, $\lambda = 5210$, eine Zahl 0.089 gemessen habe (in A.E.), was kann ich dann daraus schliessen? — *Antwort.* Wir nehmen an, dass die Temperatur 5000° beträgt. Aus der Tabelle folgt $b = 1.58 \cdot 10^{10}$; für $\lambda = 4500$ und $b = 1.70 \cdot 10^{10}$ würde die gemessene Intensität $0.089 \times \frac{1.70}{1.58} \times \left(\frac{4500}{5210}\right)^2 = 0.071$ sein. Betrachten wir jetzt Fig. 2 so sehen wir, dass diese Totalintensität z. B. bei folgenden Kombinationen von C und a gefunden wird.

$\log C$	$\log a \rightarrow$	$a \rightarrow$	ν'
1.80	-4.00	0.0001	0.016 · 10 ⁸
1.80	-2.80	0.0016	0.25
1.60	-1.72	0.019	3.0
1.40	-1.24	0.057	9.0
1.20	-0.87	0.135	21
1.00	-0.51	0.31	49
0.80	-0.15	0.71	118 u.s.w.

Abgeänderte Intensitäten für den Fall, dass die Konzentration der absorbierenden Atome proportional dem Elektronendruck zunimmt.

In unseren Rechnungen war bis jetzt angenommen, dass die relative Konzentration der absorbierenden Atome in allen Schichten der Atmosphäre konstant ist. Professor PANNEKOEK hat jetzt auch den Fall berechnet in welchem die Konzentration proportional dem Elektronendruck zunimmt, was z.B. für Atomsorten welche grösstenteils ionisiert sind zutrifft. Die Beziehung zwischen $\frac{1}{\sqrt{\alpha}}$ und die beobachtete Intensität ist dann etwas anders als in § 2 angenommen wurde.

Die abgeänderten Kurven für die Totalintensitäten sind in Figur 1 punktiert dargestellt. Es stellt sich heraus, dass der Unterschied gegenüber dem vorigen Fall nur geringfügig ist.

Den Dank, den wir Herrn Prof. A. PANNEKOEK schulden, wurde schon erwähnt. Herrn Prof. L. ORNSTEIN danken wir für sein Interesse an dieser Untersuchung.