Mathematics. — *Die Nullstellen gewisser durch Rekursionsformeln definierten Polynome.* Von O. BOTTEMA. (Communicated by Prof. J. G. VAN DER CORPUT).

(Communicated at the meeting of May 30, 1931.)

§ 1. Wir definieren die Polynome $Q_n(x)$ durch die folgenden Rekursionsformeln:

$$\left.\begin{array}{l} Q_0(x) = 1 \\ Q_1(x) - (x + b_1)\, Q_0(x) = 0 \\ Q_n(x) - (x + b_n)\, Q_{n-1}(x) + c_{n-1}^2\, Q_{n-2}(x) = 0 \quad (n = 2, 3, \dots) \end{array}\right\} \quad . \quad (1)$$

wo b_n und c_n reelle Zahlen sind und $c_n \neq 0$ ist.

Zu den auf diese Weise definierbaren Polynomfolgen gehören u. a. diejenigen der *Legendreschen*, der *Tchebycheffschen*, der *Laguerreschen* und der *Hermiteschen* Polynome.

Die Polynome, welche den anscheinend etwas allgemeinern Rekursionsformeln

$$\left.\begin{array}{l} P_0(x) = 1 \\ P_1(x) - (A_1 x + B_1)\, P_0(x) = 0 \\ P_n(x) - (A_n x + B_n)\, P_{n-1}(x) + C_{n-1}\, P_{n-2}(x) = 0 \end{array}\right\} \quad . \quad . \quad (2)$$

mit $A_n \neq 0$ und $\dfrac{c_n}{A_n A_{n+1}} > 0$, genügen, können durch Multiplikation mit einer Konstanten auf den Fall (1) zurückgeführt werden. Man wähle dazu:

$$Q_n(x) = \frac{1}{A_1 A_2 \dots A_n} P_n(x) \quad (n \geqq 1); \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (3)$$

man findet dann

$$b_n = \frac{B_n}{A_n} \quad , \quad c_n = \sqrt{\frac{C_n}{A_n A_{n+1}}} \quad (n \geqq 1).$$

§ 2. Das Polynom $Q_n(x)$ lässt sich in der Form einer *symmetrischen* Determinante schreiben, wobei nur die Elemente der Hauptdiagonale und die benachbarten von Null verschieden sind. Man hat nämlich:

$$Q_n(x) = \begin{vmatrix} x + b_1 & c_1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ c_1 & x + b_2 & c_2 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & c_2 & x + b_3 & \dots & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & x + b_{n-1} & c_{n-1} \\ 0 & 0 & 0 & \dots & c_{n-1} & x + b_n \end{vmatrix} \quad . \quad . \quad . \quad (4)$$

Entwickelt man die Determinante nach den Elementen der letzten Zeile (oder Kolonne), dann findet man, dass sie der Gleichung (1) genügt.

Die Variable x kommt in den Gliedern der Determinante nur *linear* vor; man kann diese also auffassen als die *Diskriminante eines Büschels quadratischer Formen.* Die Gleichung $Q_n(x) = 0$ hat den Charakter einer s.g. λ-, oder *säkularen Gleichung.* Stellen wir die Variablen der quadratischen Formen durch X_ν vor $(\nu = 1, 2, \ldots n)$, dann ist $Q_n(x)$ die Diskriminante von

$$F_1 + x F_2,$$

wo

$$F_1 \equiv \sum_1^n b_\nu X_\nu^2 + 2 \sum_1^{n-1} c_\nu X_\nu X_{\nu+1} \quad \ldots \ldots \quad (5)$$

und

$$F_2 \equiv \sum_1^n X_\nu^2 \quad \ldots \ldots \quad (6)$$

ist.

Einem bekannten Satze zufolge hat die Gleichung

$$|F_1 + x F_2| = 0$$

in dem Fall, dass eine der beiden quadratischen Formen *definit* ist, immer nur reelle und sämtlich verschiedene Wurzeln.

Wir haben also den folgenden

Satz I. *Die Nullstellen von $Q_n(x)$ sind reell und verschieden.*

Ein in der Schwingungstheorie sehr bekannter Satz sagt aus, dass die Nullstellen einer säkularen Determinante (eines Büschels quadratischer Formen, wovon wenigstens eine definit ist), getrennt werden durch diejenigen der Unterdeterminante des Elementes der letzten Zeile und der letzten Kolonne. Wendet man diesen Satz auf unsren Fall an, so finden wir den

Satz II. *Die Nullstellen von $Q_n(x)$ werden getrennt durch diejenigen von $Q_{n-1}(x)$.*

§ 3. Um eine obere Grenze für die Nullstellen von $Q_n(x)$ ableiten zu können, betrachten wir das Polynom

$$Q_n(x + p),$$

wo p eine konstante Zahl ist. Es ist identisch mit der Diskriminante

$$|F_1 + (x + p) F_2|.$$

Die Nullstellen von $Q_n(x + p)$ sind also die Wurzeln der säkularen Gleichung der zwei quadratischen Formen

$$F_1 + p F_2 \quad \text{und} \quad F_2.$$

Die zweite dieser Formen ist positiv definit; ist auch die erste Form positiv definit, so sind, einem bekannten Satze zufolge, die Wurzeln der säkularen Gleichung sämtlich negativ; ist sie negativ definit so sind sie sämtlich positiv. Wir haben also Folgendes:

Wenn man die Zahl p so wählt, dass die quadratische Form

$$F_1 + p F_2 \equiv \sum_{\nu=1}^{n} (p + b_\nu) X_\nu^2 + 2 \sum_{1}^{n-1} c_\nu X_\nu X_{\nu+1} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (7)$$

positiv definit ist, dann sind alle Nullstellen von $Q_n(x)$ kleiner als p; wird aber p so gewählt, dass die Form negativ definit ist, so sind die Nullstellen sämtlich grösser als p. Um also Abschätzungen für die grösste bzw. kleinste Nullstelle zu finden, genügt es hinreichende Bedingungen für p abzuleiten damit die quadratische Form (7) positiv bzw. negativ definit sei.

§ 4. Die quadratische Form (7) enthält, neben den rein quadratischen Gliedern, nur solche gemischten Glieder, deren Variablen auf einander folgende Indizes haben. Durch diesen Umstand ist es möglich, die Bedingung damit sie definit sei, durch ein System einfacher Bedingungen zu ersetzen, die denjenigen, welche bei binären Formen auftreten, entsprechen.

Wir verfahren nun folgenderweise. Die Koeffizienten der quadratischen Glieder werden jeder als die Summe von zwei Zahlen geschrieben, indem wir setzen:

$$X_\nu^2 = \left(\frac{1}{2} + \frac{k_\nu}{2}\right) X_\nu^2 + \left(\frac{1}{2} - \frac{k_\nu}{2}\right) X_\nu^2, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (8)$$

wo $k_\nu (\nu = 1, 2 \ldots n)$ zunächst unbestimmt gelassene Zahlen sind mit der Bedingung $|k_\nu| < 1$.

Die quadratische Form (7) wird dann also

$$\sum_{\nu=1}^{n-1} \left[(p+b_\nu)\left(\frac{1}{2} - \frac{k_\nu}{2}\right) X_\nu^2 + 2c_\nu X_\nu X_{\nu+1} + (p+b_{\nu+1})\left(\frac{1}{2} + \frac{k_{\nu+1}}{2}\right) X_{\nu+1}^2 \right] \quad (9)$$

Eine hinreichende Bedingung damit diese Form definit sei, ist

$$(1 - k_\nu)(1 + k_{\nu+1})(p + b_\nu)(p + b_{\nu+1}) \geqq 4c_\nu^2 \quad (\nu = 1, 2, \ldots n-1). \quad (10)$$

Damit haben wir das Resultat erreicht, das als Hauptergebnis dieser Arbeit betrachtet werden kann, nämlich den

Satz III. *Sind k_ν beliebige Zahlen mit $|k_\nu| < 1$, $(\nu = 1, 2, \ldots, n-1)$, und setzt man*

$$\left.\begin{aligned} p_\nu &= -\tfrac{1}{2}(b_\nu + b_{\nu+1}) + \sqrt{\tfrac{1}{4}(b_\nu - b_{\nu+1})^2 + \frac{4c_\nu^2}{(1-k_\nu)(1+k_{\nu+1})}}, \\ p'_\nu &= -\tfrac{1}{2}(b_\nu + b_{\nu+1}) - \sqrt{\tfrac{1}{4}(b_\nu - b_{\nu+1})^2 + \frac{4c_\nu^2}{(1-k_\nu)(1+k_{\nu+1})}} \\ &(\nu = 1, 2, \ldots n-1), \end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad (11)$$

so liegen sämtliche Nullstellen der durch die Rekursionsformeln (1) *definierten Polynome* $Q_n(x)$ *im Intervall*:

$$\underset{1\leq\nu\leq n-1}{Min}\, p'_\nu < x < \underset{1\leq\nu\leq n-1}{Max}\, p_\nu \quad \ldots\ldots \quad (12)$$

Wählt man $k_\nu = 0$ $\nu = 1, 2, \ldots, n)$, so findet man für die Nullstellen eine obere und eine untere Grenze, welche nur von den Koeffizienten der Rekursionsformeln abhängig sind. Man leitet dann unmittelbar folgenden Satz ab:

Satz IV. *Sind die Zahlenreihen* b_ν *und* c_ν^2 *beschränkt, dann liegen die Nullstellen sämtlicher Polynome* $Q_n(x)$ *in einem endlichen Intervall.*

§ 5. Man kann auch leicht eine Bedingung für p angeben, so dass die quadratische Form (7) gewiss nicht definit ist. Hinreichend ist dafür offenbar, dass für irgendeinen Wert ν die Ungleichung

$$(p + b_\nu)(p + b_{\nu+1}) < c_\nu^2$$

besteht. Bezeichnet man also die Ausdrücke

$$-\tfrac{1}{2}(b_\nu + b_{\nu+1}) \pm \sqrt{\tfrac{1}{4}(b_\nu - b_{\nu+1})^2 + c_\nu^2} \qquad (\nu = 1, 2 \ldots n), \quad (13)$$

mit q_ν, bzw. q'_ν, dann hat man: es gibt eine Nullstelle von $Q_n(x)$, welche grösser als Max q_ν ist; es gibt eine Nullstelle, welche kleiner als Min q'_ν ist. Daraus folgert man unmittelbar den

Satz V. *Sind die Zahlen* b_ν *beschränkt, die Zahlen* c_ν^2 *dagegen unbeschränkt, so ist die Menge der Nullstellen der Polynome* $Q_n(x)$ *unbeschränkt, sowohl nach oben wie auch nach unten.*

§ 6. Die allgemeinen Resultate der vorhergehenden Paragraphen wenden wir jetzt auf Spezialfälle an. Wir betrachten zunächst den Fall, dass die Koeffizienten $b_\nu (\nu = 1, 2, \ldots, n)$ sämtlich null sind. Aus den Formeln (1) geht dann hervor, dass die Polynome $Q_n(x)$ gerade, bzw. ungerade sind, je nachdem n eine gerade, oder eine ungerade Zahl ist. Die Nullstellen von $Q_n(x)$ liegen paarweise symmetrisch in Bezug auf Null. Aus (11) folgt dann auch $p_\nu = -p'_\nu$, und Satz III lautet jetzt:

Satz III*. *Sind die Koeffizienten* $b_\nu (\nu = 1, 2, \ldots, n)$ *sämtlich Null, so liegen die Nullstellen von* $Q_n(x)$ *im Intervall*

$$-\underset{1\leq\nu\leq n-1}{Max} \frac{2\,c_\nu}{\sqrt{(1-k_\nu)(1+k_{\nu+1})}} < x < \underset{1\leq\nu\leq n-1}{Max} \frac{2\,c_\nu}{\sqrt{(1-k_\nu)(1+k_{\nu+1})}}, \quad (14)$$

wo $k_\nu (\nu = 1, 2, \ldots, n)$ *beliebige Zahlen sind mit der Bedingung* $|k_\nu| < 1$.

Ich werde die grösste Nullstelle von $Q_n(x)$ mit x_n bezeichnen. Wählt man $k_\nu = 0$, so findet man

$$x_n < 2 \underset{1\leq\nu\leq n-1}{Max}\, c_\nu \quad \ldots\ldots \quad (15)$$

Durch geeignetere Wahl der Zahlen k_ν kann man diese Abschätzung verschärfen.

Wir setzen dabei vorerst den Fall voraus, dass die Zahlen c_ν^2 eine unbeschränkte Folge bilden. Nach Satz IV sind dann auch die Nullstellen von $Q_n(x)$ unbeschränkt. Wir nehmen an, dass die Zahlen c_ν^2 höchstens der Grössenordnung ν^d sind, d.h. wir setzen

$$c_\nu^2 \leqslant C\nu^d \quad (d > 0), \qquad \ldots \ldots \ldots \quad (16)$$

wo C eine geeignet gewählte konstante Zahl ist. Die Abschätzung (15) gibt dann

$$x_n^2 < 4\,Cn^d \qquad \ldots \ldots \ldots \quad (17)$$

Wir gelangen aber zu einem besseren Resultat, wenn wir für k_ν folgende Wahl treffen:

$$k_\nu = \frac{1}{2(n-\nu)+1} \qquad (\nu = 1, 2, \ldots n) \quad \ldots \ldots \quad (18)$$

Man hat dann:

$$\frac{4}{(1-k_\nu)(1+k_{\nu+1})} = 4 - \frac{1}{(n-\nu)^2} \qquad (\nu = 1, 2, \ldots n-1)$$

Aus dem Satz III* geht dann hervor:

$$x_n^2 < \underset{1 \leqslant \nu \leqslant n-1}{Max} \; C\left(4 - \frac{1}{(n-\nu)^2}\right)\nu^d \quad \ldots \ldots \quad (19)$$

Betrachten wir die Funktion

$$\varphi(y) = \left(4 - \frac{1}{y^2}\right)(n-y)^d, \quad \text{wo} \quad 1 \leqslant y \leqslant n-1.$$

Man hat

$$\varphi'(y) = \frac{(n-y)^{d-1}}{y^3}\left[-4\,dy^3 + (d-2)\,y + 2n\right]$$

Der letzte Faktor ist immer positiv für

$$y = \left(\frac{n}{2d+3}\right)^{1/3},$$

wie aus Substitution hervorgeht. Für diesen Wert von y ist die Funktion $\varphi(y)$ also wachsend; das Maximum von $\varphi(y)$ liegt also bei einem Wert y, der grösser ist als $\left(\frac{n}{2d+3}\right)^{1/3}$. Das Maximum ist also kleiner als

$$4\left[n - \left(\frac{n}{2d+3}\right)^{1/3}\right]^d.$$

Wir haben also folgenden

Satz VI. *Wenn die Koeffizienten der Rekursionsformeln* (1) *folgenden Bedingungen genügen:*

$$b_\nu = 0 \text{ und } c_\nu^2 \leqq C\nu^d \qquad (\nu = 1, 2, \ldots n),$$

wo $d > 0$ und C eine geeignet gewählte konstante Zahl ist, so gilt für die grösste Nullstelle x_n von $Q_n(x)$ die Ungleichung

$$x_n^2 < 4\,C\,(n - C_1\,n^{1/3})^d, \qquad (20)$$

wo die Zahl C_1 nur von d abhängt.

§ 7. Die obige Methode zur Bestimmung einer oberen Grenze für x_n haben wir schon früher angewandt für den Spezialfall der *Hermiteschen Polynome*. Die Polynome $H_n(x) = (-\tfrac{1}{2})^n e^{x^2} \dfrac{d^n}{dx^n}(e^{-x^2})$ genügen den Rekursionsformeln:

$$\left.\begin{aligned} &H_0(x) = 1 \\ &H_1(x) - x\,H_0(x) = 0 \\ &H_\nu(x) - xH_{\nu-1}(x) + \frac{\nu-1}{2} H_{\nu-2}(x) = 0, \end{aligned}\right\} \qquad (21)$$

sodass

$$b_\nu = 0, \quad c_\nu^2 = \frac{\nu}{2},$$

d.h. $C = \tfrac{1}{2}$, $d = 1$ ist.

Für die grösste Nullstelle x_n des *Hermiteschen Polynoms* $H_n(x)$ finden wir also die Ungleichung [1])

$$x_n^2 < 2\,(n - C_1\,n^{1/3}) \qquad (22)$$

Wir bemerken noch, dass inzwischen durch VAN VEEN [2]) eine untere Grenze für x_n abgeleitet worden ist, nämlich

$$x_n^2 > 2\,(n - C_2\,n^{1/3}), \qquad (23)$$

sodass wenigstens für die Nullstellen der *Hermiteschen Polynome* eine sehr scharfe Abschätzung vorliegt.

§ 8. Indem wir uns noch immer auf den Fall $b_\nu = 0$ beschränken, setzen wir jetzt voraus, dass die Zahlenfolge c_ν^2 beschränkt ist. Unsrem Satz IV zufolge gehören die Nullstellen x_n einem endlichen Intervall an.

---

[1]) O. BOTTEMA, Die Nullstellen der Hermiteschen Polynome. Proc. Amsterdam. Vol. XXXIII (1930), p. 495-503.

[2]) S. C. VAN VEEN, Asymptotische Entwicklung und Nullstellenabschätzung der Hermiteschen Funktionen. Proc. Amsterdam. Vol. XXXIV (1931) p. 257.

Die Abschätzung (15) kann man jetzt verbessern, indem man für die Zahlen k_ν z.B. folgende Wahl trifft:

$$k_\nu = \frac{\nu - n}{(2\nu-1)n} \qquad (\nu = 1, 2, \ldots n) \quad \ldots \ldots \quad (24)$$

Man findet dann

$$\frac{4}{(1-k_\nu)(1+k_{\nu+1})}\left(4-\frac{1}{\nu^2}\right) \cdot \frac{1}{\left(1-\frac{1}{2n}\right)\left(1+\frac{\nu+1}{\nu}\cdot\frac{1}{2n}\right)}$$

Der Ausdruck $\left(1-\frac{1}{2n}\right)\left(1+\frac{\nu+1}{\nu}\cdot\frac{1}{2n}\right)$ hat seinen kleinsten Wert für $\nu = n-1$, sodass man hat

$$\frac{4}{(1-k_\nu)(1+k_{\nu+1})} \leqq \left(4-\frac{1}{\nu^2}\right)\left(1-\frac{1}{(2n-1)^2}\right)$$

Hieraus geht hervor die Abschätzung:

$$x_n^2 < \underset{1 \leqq \nu \leqq n-1}{Max}\, c_\nu^2 \left(4-\frac{1}{\nu^2}\right)\left(1-\frac{1}{(2n-1)^2}\right) \quad \ldots \ldots \quad (25)$$

§ 9. Wir wenden dieses Resultat auf die *Legendreschen Polynome* $P_n(x)$ an. Setzt man $Q_n(x) = \frac{n!}{1, 3, 5, \ldots, (2n-1)} P_n(x)$, so haben die Rekursionsformeln folgende Form:

$$\left.\begin{array}{l} Q_0(x) = 1,\ Q_1(x) - x\, Q_0(x)_2 = 0, \\ Q_\nu(x) - x\, Q_{\nu-1}(x) + \dfrac{(\nu-1)^2}{(2\nu-3)(2\nu-1)} Q_{\nu-2}(x) = 0 \end{array}\right\} \quad \ldots \quad (26)$$

so dass

$$b_\nu = 0,\ c_\nu^2 = \frac{\nu^2}{(2\nu-1)(2\nu+1)}$$

ist. Die Abschätzung (25) gibt somit das Resultat: *für die grösste Nullstelle x_n des Legendreschen Polynoms $P_n(x)$* gilt:

$$x_n^2 < 1 - \frac{1}{(2n-1)^2} \quad \ldots \ldots \ldots \quad (27)$$

Die Genauigkeit dieser Ungleichung ist ungefähr dieselbe wie in der von BRUNS [1]) herrührenden, übrigens etwas besseren Abschätzung.

$$x_n^2 < \cos^2 \frac{\pi}{2n+1} \quad \ldots \ldots \ldots \quad (28)$$

---

[1]) BRUNS, Zur Theorie der Kugelfunktionen. Journ. f. d. reine und angewandte Mathem. **90**, (1881) p. 322.

Die *Tschebycheffschen* Polynome

$$T_0(x) = 1, \quad T_n(x) = \frac{1}{2^{n-1}} \cos(n \arc \cos x)$$

genügen den Formeln

$$\left.\begin{aligned} & T_1(x) - x\,T_0(x) = 0 \\ & T_2(x) - x\,T_1(x) + \tfrac{1}{2}\,T_0(x) = 0 \\ & T_\nu(x) - x T_{\nu-1}(x) + \tfrac{1}{4}\,T_{\nu-2}(x) = 0. \quad (\nu = 3, 4, \ldots) \end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad (29)$$

Man hat dann

$$b_\nu = 0, \quad c_1^2 = \tfrac{1}{2}, \quad c_\nu^2 = \tfrac{1}{4} \quad (\nu \geqq 2)$$

Für die grösste Nullstelle x_n Polynoms $T_n(x)$ gibt unsre Methode also das Resultat

$$x_n^2 < \left(1 - \frac{1}{4n^2}\right)\left(1 - \frac{1}{(2n-1)^2}\right). \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (30)$$

§ 10. Im Folgenden lassen wir die Bedingung $b_\nu = 0$ fort, fassen aber eine ganz bestimmte Polynomfolge ins Auge, diejenige nämlich der *Laguerreschen Polynome.*

Setzt man

$$L_n(x) = (-1)^n e^x \frac{d^n}{dx^n}(x^n e^{-x}),$$

so sind sie Rekursionsformeln die folgenden:

$$\left.\begin{aligned} & L_0(x) = 1 \\ & L_1(x) - (x-1)\,L_0(x) = 0 \\ & L_n(x) - (x - 2n + 1)\,L_{n-1}(x) + (n-1)^2\,L_{n-2}(x) = 0. \end{aligned}\right\} \quad . \quad (31)$$

Man hat also

$$b_\nu = -(2\nu - 1) \quad , \quad c_\nu^2 = \nu^2.$$

Die Zahlen p_ν und p'_ν (11) unsres Hauptsatzes III werden also

$$p_\nu = 2\nu + \sqrt{1 + \frac{4\nu^2}{(1-k_\nu)(1+k_{\nu+1})}}\,; \; p'_\nu = 2\nu - \sqrt{1 + \frac{4\nu^2}{(1-k_\nu)(1+k_{\nu+1})}}. \quad (32)$$

Wählt man

$$k_\nu = \frac{-1}{2\nu - 1},$$

so wird

$$(1-k_\nu)(1+k_{\nu+1}) = \frac{4\nu^2}{4\nu^2 - 1}$$

sodass

$$p'_\nu = 0,$$

woraus hervorgeht, dass alle Nullstellen der *Laguerreschen Polynome* positiv sind, ein triviales Resultat. Es ist uns aber nicht gelungen durch eine andre Wahl für die Zahlen k_ν eine bessere Abschätzung nach unten abzuleiten. Wir bemerken hier, dass NEUMANN [1]) nachgewiesen hat, dass sämtliche Nullstellen von $L_n(x)$ grösser sind als $\frac{1}{n}$.

Umso bessere Resultate gibt aber unsre Methode für die Abschätzung einer oberen Grenze für die Nullstellen der *Laguerreschen Polynome.*

Wir setzen dafür, wie in (18)

$$k_\nu = \frac{1}{2(n-\nu)+1} \quad \ldots \ldots \ldots \quad (33)$$

Man bekommt dann

$$p_\nu = 2\nu + \sqrt{1 + 4\nu^2 - \frac{\nu^2}{(n-\nu)^2}},$$

sodass

$$p_\nu < 2\nu + \frac{1}{2\nu} + \sqrt{4\nu^2 - \frac{\nu^2}{(n-\nu)^2}}$$

$$< 4\nu + \frac{1}{2} - \frac{\nu}{4(n-\nu)^2}$$

Setzt man

$$\varphi(y) = 4y - \frac{y}{(n-y)^2}, \quad (1 \leqq y \leqq n-1),$$

so ist

$$\varphi'(y) = \frac{16(n-y)^3 + (n-y) - 2n}{4(n-y)^3}$$

Setzt man $n - y = \frac{1}{3} n^{1/3}$ dann wird, wie aus Substitution hervorgeht, $\varphi' < 0$. Das Maximum von $\varphi(y)$ liegt also bei einem Wert von y, welcher kleiner ist als $n - \frac{1}{3} n^{1/3}$.

Man hat also

$$\varphi(y) < 4n - \frac{4}{3} n^{1/3},$$

sodass wir für die obere Grenze der Nullstellen der *Laguerreschen Polynome* den Wert

$$4n + \frac{1}{2} - \frac{4}{3} n^{1/3} \quad \ldots \ldots \ldots \quad (34)$$

bekommen.

---

[1]) E. R. NEUMANN, Beiträge zur Kenntnis der Laguerreschen Polynome. Jahresber. D. M. V. **30**, (1921) p. 15.

§ 11. Zum Schluss leiten wir für die grösste Nullstelle von $L_n(x)$ noch *eine untere Grenze* ab; wir folgen dabei einer Methode, welche auch allgemein auf durch Rekursionsformeln (1) definierte Polynome anwendbar ist[1]).

In § 4 war von der quadratischen Form

$$\sum_{\nu=1}^{n-1}\left\{\left[(p+b_\nu)\left(\frac{1}{2}-\frac{k_\nu}{2}\right)X_\nu^2+2c_\nu X_\nu X_{\nu+1}+\right.\right.\\ \left.\left.+(p+b_{\nu+1})\left(\frac{1}{2}+\frac{k_{\nu+1}}{2}\right)X_{\nu+1}^2\right]\right\} \quad . \quad . \quad . \quad (35)$$

die Rede; k_ν $(\nu=1, 2, \ldots, n)$ sind dabei beliebige Zahlen mit der Bedingung $|k_\nu|<1$. Die Form ist gewiss definit wenn

$$(1-k_\nu)(1+k_{\nu+1})(p+b_\nu)(p+b_{\nu+1}) \geqq 4c_\nu^2$$

ist. Wir wählen jetzt für p eine feste von n abhängige Zahl und bestimmen die Zahlen k_ν mittels der Gleichungen:

$$k_1=-1 \quad , \quad (1-k_\nu)(1+k_{\nu+1})=\frac{4\,c_\nu^2}{(p+b_\nu)(p+b_{\nu+1})} \quad . \quad . \quad (36)$$

Wenn nun der Fall eintritt, dass in der auf diese Weise definierten Zahlenfolge k_ν eine Zahl k_μ vorkommt mit der Eigenschaft

$$|k_\mu|>1 \quad , \quad \mu \leqq n,$$

so ist die quadratische Form nicht definit und es gibt also einen Nullpunkt von $Q_n(x)$, welcher grösser als p ist.

Die Gleichungen (36) werden im Falle der *Laguerreschen Polynome*:

$$k_1=-1 \quad , \quad (1-k_\nu)(1+k_{\nu+1})=\frac{4\,\nu^2}{p^2-4\,\nu p+4\,\nu^2-1} \quad . \quad . \quad (37)$$

Hieraus geht hervor

$$k_{\nu+1}-k_\nu=\frac{k_\nu^2+l_\nu}{1-k_\nu} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (38)$$

wo

$$l_\nu=\frac{4\,\nu p-p^2+1}{4\,\nu^2-4\,\nu p+p^2-1}$$

Wir nehmen jetzt $p=4n-16\sqrt{2}\,.\,n^{1/2}$ und legen die ganze Zahl ν_1 fest durch

$$\nu_1-1 \leqq n-2\sqrt{2}\,.\,n^{1/2}<\nu_1 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (39)$$

---

[1]) In der S. 686 zitierten Arbeit wandten wir die Methode an auf die Hermiteschen Polynome. Das Resultat wurde aber durch VAN VEEN erheblich verschärft. Vgl. (23).

Für jedes $n \geqq 8$ ist also $\nu \geqq 1$. *Man hat nun für jedes* $\nu \geqq \nu_1$

$$4\nu - p \geqq 4\nu_1 - p > 4(n - 2\sqrt{2} \, . \, n^{1/2}) - (4n - 16\sqrt{2} \, . \, n^{1/2}) = 8\sqrt{2} \, . \, n^{1/2}.$$

also

$$l_\nu = \frac{4\nu p - p^2 + 1}{4\nu^2 - 4\nu p + p^2 - 1} > \frac{p(4\nu - p)}{(p - 2\nu)^2} > \frac{4\nu - p}{p} > \frac{8\sqrt{2} \, . \, n^{1/2}}{4n} = 2\sqrt{2} \cdot n^{-1/2} \, . \quad (40)$$

Aus (38) geht hervor

$$k_{\nu+1} - k_\nu = \frac{k_\nu^2 + l_\nu}{1 - k_\nu} > \tfrac{1}{2} \, l_\nu,$$

also für jedes $\nu \geqq \nu_1$

$$k_{\nu+1} - k_\nu > \sqrt{2} \, . \, n^{-1/2}$$

Man findet dann:

$$k_n = \sum_{\nu=\nu_1}^{n-1} (k_{\nu+1} - k_\nu) + k_{\nu_1} > \sqrt{2} \, . \, n^{-1/2} (n - \nu_1) - 1 >$$

$$> \sqrt{2} \, . \, n^{-1/2} (2\sqrt{2} \, . \, n^{1/2} - 1) - 1 > 4 - \sqrt{2} \, . \, n^{-1/2} - 1 > 1.$$

Die grösste Nullstelle von $L_n(x)$ übertrifft also jedenfalls für $n \geqq 8$ den Wert $4n - 16\sqrt{2} \, . \, n^{1/2}$. Da übrigens diese Ungleichung auch für $n < 8$ gilt, haben wir zusammenfassend den folgenden

Satz VII. *Ist x_n die grösste Nullstelle des Laguerreschen Polynoms $L_n(x)$, so hat man die Ungleichungen*

$$4n - C_1 n^{1/2} < x_n < 4n - C_2 n^{1/3},$$

wo C_1 und C_2 geeignet gewählte konstante Zahlen sind.

Zum Vergleich folgen hier die von NEUMANN [1]) abgeleiteten Ungleichungen:

$$3n - 4 < x_n < 4n + 2.$$

[1]) NEUMANN, l. c. p. 23.