Mathematics. — *Ueber den kleinsten Wert einiger quadratischer Formen.* III. Von J. G. VAN DER CORPUT und J. POPKEN [1]).

(Communicated at the meeting of September 26, 1931.)

Bekanntlich hat CAUCHY bewiesen [2])

$$\begin{vmatrix} \frac{1}{y_1 - x_1} & \cdots & \frac{1}{y_1 - x_n} \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \frac{1}{y_n - x_1} & \cdots & \frac{1}{y_n - x_n} \end{vmatrix} = \frac{\prod\limits_{1 \leq s < r \leq n} (y_r - y_s)(x_s - x_r)}{\prod\limits_{\substack{1 \leq r \leq n \\ 1 \leq s \leq n}} (y_r - x_s)}, \quad . \quad . \quad (79)$$

unter der Voraussetzung natürlich, dass keine der Zahlen $x_1, x_2, \ldots, x_n$ im System $y_1, y_2, \ldots, y_n$ vorkommt. J. G. VAN DER CORPUT hat dieses Ergebnis verallgemeinert [3]). Das Ziel dieser Mitteilung ist das Cauchysche Resultat und die genannten Verallgemeinerungen anzuwenden zur Bestimmung des Minimumwertes einiger quadratischer Formen.

In dieser Mitteilung bezeichnen $y_1, y_2, \ldots, y_m$ stets reelle Zahlen.

Hilfssatz 9. *Sind die Zahlen* $2y_r + a$ $(r = 1, 2, \ldots, m)$ *alle positiv oder alle negativ, sind* $y_1, \ldots, y_{m-1}$ *untereinander verschieden und wird*

$$D_0 = 1 \quad , \quad D_n = \begin{vmatrix} \frac{1}{y_1 + y_1 + a} & \cdots & \frac{1}{y_1 + y_n + a} \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \frac{1}{y_n + y_1 + a} & \cdots & \frac{1}{y_n + y_n + a} \end{vmatrix} \quad (n = 1, 2, \ldots, m)$$

gesetzt, dann ist

$$\frac{D_n}{D_{n-1}} = \frac{1}{2y_n + a} \prod_{r=1}^{n-1} \left(\frac{y_n - y_r}{y_n + y_r + a} \right)^2 (n = 1, 2, \ldots, m), \quad . \quad . \quad (80)$$

und ausserdem

$$D_n > 0 \quad \textit{oder} \quad (-1)^n D_n > 0 \;\; (n = 1, 2, \ldots, m-1), \quad . \quad . \quad (81)$$

je nachdem die Zahlen $2y_r + a$ $(r = 1, 2, \ldots, m)$ *positiv oder negativ sind.*

Beweis. Aus den Voraussetzungen folgt sofort, dass keine der Zahlen $-y_1 - a, \ldots, -y_n - a$ $(n = 1, 2, \ldots, m)$ im System $y_1, y_2, \ldots, y_n$ vor-

[1]) These Proceedings **34**, S. 615 und S. 767.

[2]) Vergl. etwa O. e. d. S. 23.

[3]) O. e. d. § 4, S. 23—38.

kommt, sodass nach der Cauchyschen Behauptung, mit $x_s = -y_s - \alpha$ $(s = 1, 2, \ldots, n)$ angewendet,

$$D_n = \frac{\prod\limits_{1 \leqq s < r \leqq n} (y_r - y_s)^2}{\prod\limits_{\substack{1 \leqq r \leqq n \\ 1 \leqq s \leqq n}} (y_r + y_s + \alpha)} \quad (n = 1, 2, \ldots, m)$$

ist. Mit Rücksicht auf $D_0 = 1$ folgt hieraus

$$\frac{D_n}{D_{n-1}} = \frac{\prod\limits_{1 \leqq s < n} (y_n - y_s)^2}{(2y_n + \alpha) \prod\limits_{r=1}^{n-1} (y_n + y_r + \alpha)^2} \quad (n = 1, 2, \ldots, m),$$

womit (80) bewiesen ist.

Aus (80) folgt, dass

$$\frac{D_n}{D_{n-1}} > \text{ oder } < 0 \qquad (n = 1, 2, \ldots, m-1)$$

ist, je nachdem die Zahlen $2\,y_n + \alpha$ $(n = 1, 2, \ldots, m)$ positiv oder negativ sind. Wegen $D_0 = 1 > 0$ gelten folglich die Ungleichungen (81).

Hilfssatz 9 ist hiermit bewiesen.

Satz 19. *Sind die Zahlen $2y_r + \alpha$ $(r = 1, 2, \ldots, m)$ alle positiv oder alle negativ, dann ist*

$$\sum_{r=1}^{m} \sum_{s=1}^{m} \frac{u_r\, u_s}{y_r + y_s + \alpha} \geqq \text{ oder } \leqq \frac{u_m^2}{2y_m + \alpha} \prod_{r=1}^{m-1} \left(\frac{y_m - y_r}{y_m + y_r + \alpha} \right)^2,$$

je nachdem die Zahlen $2y_r + \alpha$ $(r = 1, 2, \ldots, m)$ positiv oder negativ sind.

Bemerkung. Setzt man $y_r = r$ $(r = 1, 2, \ldots, m)$, so findet man

$$\sum_{r=1}^{m} \sum_{s=1}^{m} \frac{u_r\, u_s}{r+s+\alpha} - \frac{\{(m-1)!\}^2\, u_m^2}{(2\,m+\alpha) \prod\limits_{r=1}^{m-1} (\alpha+m+r)^2} \begin{cases} \geqq 0 & \text{falls } \alpha > -2, \\ \leqq 0 & \text{falls } \alpha < -2\,m, \end{cases}$$

also insbesondere

$$\sum_{r=1}^{m} \sum_{s=1}^{m} \frac{u_r\, u_s}{r+s-1} \geqq \frac{\{(m-1)!\}^4}{(2\,m-1)\,\{(2\,m-2)!\}^2}\, u_m^2.$$

Beweis. Dieser Satz folgt sofort aus dem vorangehenden Hilfssatz, Satz 1 und Satz 2 [1]).

Hilfssatz 10. *Sind die Zahlen β und $2y_r + \alpha$ $(r = 1, 2, \ldots, m)$ alle*

[1]) Sind $y_1, \ldots, y_{m-1}$ nicht untereinander verschieden, so wende man Stetigkeitsbetrachtungen an.

positiv oder alle negativ, sind $y_1, \dots, y_{m-1}$ untereinander verschieden und wird

$$D_0 = 1 \quad , \quad D_n = \begin{vmatrix} \frac{1}{y_1+y_1+\alpha}+\beta & \dots & \frac{1}{y_1+y_n+\alpha}+\beta \\ \dots & \dots & \dots \\ \frac{1}{y_n+y_1+\alpha}+\beta & \dots & \frac{1}{y_n+y_n+\alpha}+\beta \end{vmatrix} \quad (n=1,2,\dots,m)$$

gesetzt, dann ist

$$D_n = \{1+\beta \sum_{r=1}^{n} (2y_r+\alpha)\} \begin{vmatrix} \frac{1}{y_1+y_1+\alpha} & \dots & \frac{1}{y_1+y_n+\alpha} \\ \dots & \dots & \dots \\ \frac{1}{y_n+y_1+\alpha} & \dots & \frac{1}{y_n+y_n+\alpha} \end{vmatrix} \quad (n=1,2,\dots,m), \qquad (82)$$

$$\frac{D_n}{D_{n-1}} = \frac{1+\beta \sum_{r=1}^{n}(2y_r+\alpha)}{(2y_n+\alpha)(1+\beta\sum_{r=1}^{n-1}(2y_r+\alpha))} \prod_{r=1}^{n-1} \left(\frac{y_n-y_r}{y_n+y_r+\alpha}\right)^2 (n=1,2,\dots,m)\,^{1)}, \qquad (83)$$

und ausserdem

$$D_n > 0 \quad oder \quad (-1)^n D_n > 0 \quad (n=1,2,\dots,m-1), \quad . \quad . \qquad (84)$$

je nachdem die Zahlen β und $2y_r+\alpha\,(r=1,2,\dots,m)$ positiv oder negativ sind.

Beweis. Nach den Voraussetzungen verschwinden die Zahlen $y_r+y_s+\alpha\,(r=1,2,\dots,m,\ s=1,2,\dots,m)$ nicht. Wendet man deshalb O.e.d., Satz 14, Anwendung II, Seite 32, zweite Zeile mit $n=1,2,\dots,m$, $x_s=-y_s-\alpha\,(s=1,2,\dots,n)$, $A=\beta$ und $B=0$ an, so folgt

$$D_n = (1+\beta\sigma_1)\left|\frac{1}{y_r+y_s+\alpha}\right| (n=1,2,\dots,m),$$

wo

$$\sigma_1 = \sum_{h=1}^{n}(y_h-x_h) = \sum_{r=1}^{n}(2y_r+\alpha)$$

ist; folglich gilt

$$D_n = \left\{1+\beta\sum_{r=1}^{n}(2y_r+\alpha)\right\}\left|\frac{1}{y_r+y_s+\alpha}\right| (n=1,2,\dots,m).$$

Hiermit ist (82) bewiesen.

Aus (82) und Formel (80) des vorigen Hilfssatzes folgt

$$\frac{D_n}{D_{n-1}} = \frac{1+\beta\sum_{r=1}^{n}(2y_r+\alpha)}{1+\beta\sum_{r=1}^{n-1}(2y_r+\alpha)} \cdot \frac{1}{2y_n+\alpha} \prod_{r=1}^{n-1}\left(\frac{y_n-y_r}{y_n+y_r+\alpha}\right)^2 (n=1,2,\dots,m),$$

sodass (83) hiermit bewiesen ist.

[1]) Eine leere Summe wird stets gleich Null gesetzt.

Nach den Voraussetzungen sind die Zahlen

$$1 + \beta \sum_{r=1}^{n} (2y_r + a) \qquad (n = 1, 2, \ldots, m)$$

positiv. Aus (82) und Formel (81) des vorigen Hilfssatzes folgt deshalb, dass die Ungleichungen (84) erfüllt sind.

Hiermit ist Hilfssatz 10 bewiesen.

Satz 20. *Sind die Zahlen β und $2y_r + a\,(r = 1, 2, \ldots, m)$ alle positiv oder alle negativ, dann gilt*

$$\sum_{r=1}^{m} \sum_{s=1}^{m} \left(\frac{1}{y_r + y_s + a} + \beta \right) u_r\, u_s \geqq \text{oder}$$

$$\leqq \frac{1 + \beta \sum\limits_{r=1}^{m} (2y_r + a)}{(2y_m + a) \left\{ 1 + \beta \sum\limits_{r=1}^{m-1} (2y_r + a) \right\}}\, u_m^2 \prod_{r=1}^{m-1} \left(\frac{y_m - y_r}{y_m + y_r + a} \right)^2,$$

je nachdem die Zahlen β und $2y_r + a\,(r = 1, 2, \ldots, m)$ positiv oder negativ sind.

Vorbemerkung. Man beachte, dass, falls die Zahlen β und $2\,y_r + a$ positiv sind, der Minimumwert von

$$\sum_{r=1}^{m} \sum_{s=1}^{m} \left(\frac{1}{y_r + y_s + a} + \beta \right) u_r\, u_s$$

bei gegebenen $m\,(m \geqq 2), u_m, y_1, y_2, \ldots, y_m, a$ für grosses β nicht die Grössenordnung von β hat, sondern beschränkt ist. Die Erklärung dieser Tatsache ist diese, dass für grosses β die beschränkten Zahlen $u_1, u_2, \ldots, u_{m-1}$ so gewählt werden können, dass $\sum\limits_{r=1}^{m} \sum\limits_{s=1}^{m} u_r\, u_s$ die Grössenordnung von $\frac{u_m^2}{\beta}$ hat.

Beweis. Dieser Satz folgt unmittelbar aus dem vorigen Hilfssatz, Satz 1 und Satz 2 [1]).

Hilfssatz 11. *Sind die Zahlen $a_2, y_1, y_2, \ldots, y_m$ alle positiv oder alle negativ, und wird*

$$D_0 = 1\ ,\ D_n = \begin{vmatrix} \frac{1}{y_1 + y_1} + a\, y_1\, y_1 & \ldots & \frac{1}{y_1 + y_n} + a\, y_1\, y_n \\ \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot & \cdot \\ \frac{1}{y_n + y_1} + a\, y_n\, y_1 & \ldots & \frac{1}{y_n + y_n} + a\, y_n\, y_n \end{vmatrix} \quad (n = 1, 2, \ldots, m)$$

gesetzt, dann ist

[1]) Vergl. die Fussnote bei Satz 19.

$$\frac{D_n}{D_{n-1}} = \frac{3+8\alpha\left(\sum\limits_{r=1}^{n} y_r\right)^3 - 2\alpha\sum\limits_{r=1}^{n} y_r^3}{2\,y_n\left(3+8\alpha\left(\sum\limits_{r=1}^{n-1} y_r\right)^3 - 2\alpha\sum\limits_{r=1}^{n-1} y_r^3\right)} \prod_{r=1}^{n-1}\left(\frac{y_n - y_r}{y_n + y_r}\right)^2 (n=1,2,\ldots,m) \quad (85)$$

und ausserdem

$$D_n > 0 \quad \text{oder} \quad (-1)^n D_n > 0 \quad (n=1,2,\ldots,m-1) \quad (86)$$

je nachdem die Zahlen $\alpha, y_1, \ldots, y_n$ positiv oder negativ sind.

Beweis. Aus den Voraussetzungen folgt, dass keine einzige der Zahlen $y_r + y_s$ $(r=1,2,\ldots,m,\ s=1,2,\ldots,m)$ Null ist.

Nach O. e. d., Seite 37, erstes Beispiel mit $n=1,2,\ldots,m$; $x_s = -y_s$ $(s=1,2,\ldots,n)$, $A=C=E=0$, $B=1$ und $D=-\alpha$ folgt deshalb

$$D_n = \left|\frac{1}{y_r + y_s}\right| \{1 - \alpha\, T(x,y)\} \quad (n=1,2,\ldots,m),$$

wo

$$T(x,y) = \tfrac{1}{3}\sigma_3 - \tfrac{1}{3}\sigma_1^3 \text{ [1]}$$

ist, mit

$$\sigma_1 = \sum_{r=1}^{n}(y_r - x_r) = 2\sum_{r=1}^{n} y_r$$

und

$$\sigma_3 = \sum_{r=1}^{n}(y_r^3 - x_r^3) = 2\sum_{r=1}^{n} y_r^3.$$

Folglich ist

$$D_n = \left\{1 + \frac{8\alpha}{3}\left(\sum_{r=1}^{n} y_r\right)^3 - \frac{2\alpha}{3}\sum_{r=1}^{n} y_r^3\right\}\left|\frac{1}{y_r + y_s}\right| \quad (n=1,2,\ldots,m). \quad (87)$$

Da die Zahlen $\alpha, y_1, y_2, \ldots, y_m$ alle positiv oder alle negativ sind, hat man

$$1 + \frac{8\alpha}{3}\left(\sum_{r=1}^{n} y_r\right)^3 - \frac{2\alpha}{3}\sum_{r=1}^{n} y_r^3 > 0 \quad (n=1,2,\ldots,m).$$

Aus (87) und Formel (81) von Hilfssatz 9 mit $\alpha=0$ folgt deshalb, dass die Ungleichungen (86) erfüllt sind.

Nach (87) und Formel (80) von Hilfssatz 9 mit $\alpha=0$ folgt, mit Rücksicht auf $D_0=1$,

$$\frac{D_n}{D_{n-1}} = \frac{1+\frac{8\alpha}{3}\left(\sum\limits_{r=1}^{n} y_r\right)^3 - \frac{2\alpha}{3}\sum\limits_{r=1}^{n} y_r^3}{1+\frac{8\alpha}{3}\left(\sum\limits_{r=1}^{n-1} y_r\right)^3 - \frac{2\alpha}{3}\sum\limits_{r=1}^{n-1} y_r^3} \cdot \frac{1}{2y_n}\prod_{r=1}^{n-1}\left(\frac{y_n - y_r}{y_n + y_r}\right)^2 (n=1,2,\ldots,m),$$

womit (85), also Hilfssatz 11 bewiesen ist.

[1] Man vergl. in O. e. d. die Formeln (41), Seite 36.

Satz 21. *Sind die Zahlen* $a, y_1, y_2, \ldots, y_m$ *alle positiv oder alle negativ, dann ist*

$$\sum_{r=1}^{m}\sum_{s=1}^{m}\left(\frac{1}{y_r+y_s}+a\,y_r\,y_s\right)u_r\,u_s \geqq \text{ oder}$$

$$\leqq \frac{3+8a\left(\sum\limits_{r=1}^{m} y_r\right)^3-2a\sum\limits_{r=1}^{m} y_r^3}{2y_m\left\{3+8a\left(\sum\limits_{r=1}^{m-1} y_r\right)^3-2a\sum\limits_{r=1}^{m-1} y_r^3\right\}}\,u_m^2\prod_{r=1}^{m-1}\left(\frac{y_m-y_r}{y_m+y_r}\right)^2,$$

je nachdem die Zahlen $a, y_1, \ldots, y_m$ *positiv oder negativ sind.*

Vorbemerkungen. 1. Warum der Minimumwert dieser Form, falls die Zahlen $a, y_1, \ldots, y_m$ positiv sind, bei gegebenem $m \geqq 2$, und bei vorgeschriebenen $y_1, \ldots, y_m$ für grosses a nicht die Grössenordnung von a zu haben braucht, sondern beschränkt sein kann, geht aus der Vorbemerkung von Satz 20 (mit $\sum\limits_{r=1}^{m}\sum\limits_{s=1}^{m} y_r\,y_s\,u_r\,u_s$ statt $\sum\limits_{r=1}^{m}\sum\limits_{s=1}^{m} u_r\,u_s$) hervor.

2. Setzt man in Satz 21 $y_r = r\ (r = 1, 2, \ldots, m)$, so findet man für jede natürliche Zahl n

$$\sum_{r=1}^{n} y_r = \tfrac{1}{2}\,n\,(n+1) \quad \text{und} \quad \sum_{r=1}^{n} y_r^3 = \tfrac{1}{4}\,n^2\,(n+1)^2,$$

also für jedes positive a

$$\sum_{r=1}^{m}\sum_{s=1}^{m}\left(\frac{1}{r+s}+a\,rs\right)u_r\,u_s \geqq \frac{6m+a\,m^3(m+1)^2(2m^2+2m-1)}{12+2a\,(m-1)^2\,m^2\,(2m^2-2m-1)}\cdot\frac{((m-1)!)^4}{((2m-1)!)^2}\,u_m^2\,.$$

Beweis. Der obige Satz folgt unmittelbar aus dem vorigen Hilfssatz, Satz 1 und Satz 2 [1]).

Hilfssatz 12. *Sind die Zahlen* $-\beta$ *und* $2y_r+a\ (r=1, 2, \ldots, m-1)$ *alle positiv oder alle negativ, sind* $y_1, \ldots, y_{m-1}$ *untereinander verschieden und wird*

$$D_0 = 1\quad,\quad D_n = \begin{vmatrix} \dfrac{1}{y_1+y_1+a} & \cdots & \dfrac{1}{y_1+y_n+a} \\ \cdot & \cdots & \cdot \\ \dfrac{1}{y_n+y_1+a} & \cdots & \dfrac{1}{y_n+y_n+a} \end{vmatrix} \quad (n = 1, 2, \ldots, m-1),$$

und

$$D_m = \begin{vmatrix} \dfrac{1}{y_1+y_1+a} & \cdots & \dfrac{1}{y_1+y_{m-1}+a} & \beta \\ \cdot & \cdots & \cdot & \cdot \\ \dfrac{1}{y_{m-1}+y_1+a} & \cdots & \dfrac{1}{y_{m-1}+y_{m-1}+a} & \beta \\ \beta & \cdots & \beta & \beta \end{vmatrix}$$

[1]) Vergl. die Fussnote bei Satz 19.

gesetzt, dann ist

$$\frac{D_m}{D_{m-1}} = \beta - \beta^2 \sum_{r=1}^{m-1} (2\,y_r + \alpha) \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (88)$$

und ausserdem

$$D_n > 0 \quad \textit{oder} \quad (-1)^n D_n > 0 \qquad (n = 1, 2, \ldots, m-1), \quad (89)$$

je nachdem die Zahlen $-\beta, 2y_r + \alpha\ (r = 1, 2, \ldots, m-1)$ *positiv oder negativ sind.*

Beweis. Im Spezialfall mit $m = 1$ ist der Hilfssatz evident. Falls $m \geqq 2$ ist, sind die Voraussetzungen von Hilfssatz 9 mit $m-1$ statt m erfüllt, folgt also (89) sofort aus (81).

Weiter ist offenbar

$$D_m = \beta \begin{vmatrix} \dfrac{1}{y_1+y_1+\alpha} - \beta \ldots\ldots \dfrac{1}{y_1+y_{m-1}+\alpha} - \beta \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ \dfrac{1}{y_{m-1}+y_1+\alpha} - \beta \ldots\ldots \dfrac{1}{y_{m-1}+y_{m-1}+\alpha} - \beta \end{vmatrix}.$$

Da die Bedingungen von Hilfssatz 10 mit $m-1$ statt m und $-\beta$ statt β erfüllt sind, folgt also aus (82)

$$D_m = \beta \left\{ 1 - \beta \sum_{r=1}^{m-1} (2y_r + \alpha) \right\} \begin{vmatrix} \dfrac{1}{y_1 + y_1 + \alpha} \ldots\ldots \dfrac{1}{y_1 + y_{m-1} + \alpha} \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ \dfrac{1}{y_{m-1} + y_1 + \alpha} \ldots\ldots \dfrac{1}{y_{m-1} + y_{m-1} + \alpha} \end{vmatrix};$$

hieraus folgt (88), sodass Hilfssatz 12 bewiesen ist.

Satz 22. *Sind die Zahlen* $-\beta$ *und* $2y_r + \alpha\ (r = 1, 2, \ldots, m-1)$ *alle positiv oder alle negativ, dann gilt*

$$\sum_{r=1}^{m-1} \sum_{s=1}^{m-1} \frac{u_r\, u_s}{y_r + y_s + \alpha} + 2\beta\, u_m (u_1 + u_2 + \ldots + u_{m-1}) \geqq \textit{oder}$$

$$\leqq -\beta^2 u_m^2 \sum_{r=1}^{m-1} (2y_r + \alpha),$$

je nachdem die Zahlen $-\beta$ *und* $2y_r + \alpha\ (r = 1, 2, \ldots, m-1)$ *positiv oder negativ sind.*

Beweis [1]. Nach den Voraussetzungen sind die Bedingungen des vorigen Hilfssatzes erfüllt, falls $y_1, \ldots, y_{m-1}$ verschieden sind. Hieraus und aus Satz 1 und Satz 2 folgt, dass die Ungleichung

$$\sum_{r=1}^{m-1} \sum_{s=1}^{m-1} \frac{u_r\, u_s}{y_r + y_s + \alpha} + \beta\, u_m (2u_1 + 2u_2 + \ldots + 2u_{m-1} + u_m) \geqq \text{oder}$$

$$\leqq \left\{ \beta - \beta^2 \sum_{r=1}^{m-1} (2y_r + \alpha) \right\} u_m^2$$

[1]) Vergl. die Fussnote bei Satz 19.

gilt, je nachdem die Zahlen $-\beta$ und $2y_r + \alpha$ $(r = 1, 2, \ldots, m-1)$ positiv oder negativ sind.

Hieraus geht der zu beweisende Satz hervor.

Hilfssatz 13. *Kommt keine der Zahlen* $x_1, x_2, \ldots, x_{m-1}$ *im System* $y_1, y_2, \ldots, y_m$ *vor, dann ist*

$$\left.\begin{aligned}
&\begin{vmatrix} \frac{1}{y_1 - x_1} & \ldots & \frac{1}{y_1 - x_{m-1}} & 1 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \frac{1}{y_m - x_1} & \ldots & \frac{1}{y_m - x_{m-1}} & 1 \end{vmatrix} = \\
&\begin{vmatrix} \frac{1}{y_1 - x_1} & \ldots & \frac{1}{y_1 - x_{m-1}} \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \frac{1}{y_{m-1} - x_1} & \ldots & \frac{1}{y_{m-1} - x_{m-1}} \end{vmatrix} \cdot \frac{(y_m - y_1)(y_m - y_2)\ldots(y_m - y_{m-1})}{(y_m - x_1)(y_m - x_2)\ldots(y_m - x_{m-1})}.
\end{aligned}\right\} \quad (90)$$

Beweis. Die in der linken Seite von (90) auftretende Determinante hat den Wert [1])

$$\frac{\left\{\prod\limits_{1 \leqq s < r \leqq m} (y_r - y_s)\right\}\left\{\prod\limits_{1 \leqq s < r \leqq m-1} (x_s - x_r)\right\}}{\prod\limits_{\substack{1 \leqq r \leqq m \\ 1 \leqq s \leqq m-1}} (y_r - x_s)}$$

$$= \frac{(y_m - y_1)\ldots(y_m - y_{m-1})}{(y_m - x_1)\ldots(y_m - x_{m-1})} \cdot \frac{\prod\limits_{1 \leqq s < r \leqq m-1} (y_r - y_s)(x_s - x_r)}{\prod\limits_{\substack{1 \leqq r \leqq m-1 \\ 1 \leqq s \leqq m-1}} (y_r - x_s)}$$

$$= \frac{(y_m - y_1)\ldots(y_m - y_{m-1})}{(y_m - x_1)\ldots(y_m - x_{m-1})} \cdot \begin{vmatrix} \frac{1}{y_1 - x_1} & \ldots & \frac{1}{y_1 - x_{m-1}} \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \frac{1}{y_{m-1} - x_1} & \ldots & \frac{1}{y_{m-1} - x_{m-1}} \end{vmatrix},$$

wegen (79), sodass Hilfssatz 13 bewiesen ist.

Hilfssatz 14. *Ist* $e_{rs} = e_{sr}$ $(r = 1, \ldots, m,\ s = 1, \ldots, m)$, *so hat man*

---

[1]) Vergl. O. e. d., Satz 18, S. 39.

$$
\begin{vmatrix}
e_{1,1} & \cdots & e_{1,m-1} & e_{1,m}+\beta \\
\cdot & \cdots & \cdot & \cdot \\
e_{m-1,1} & \cdots & e_{m-1,m-1} & e_{m-1,m}+\beta \\
e_{m,1}+\beta & \cdots & e_{m,m-1}+\beta & e_{m,m}+2\beta+\beta^2
\end{vmatrix}
=
\left\{
\begin{vmatrix}
e_{1,1} & \cdots & e_{1,m} \\
\cdot & \cdots & \cdot \\
e_{m,1} & \cdots & e_{m,m}
\end{vmatrix}
+2\beta
\begin{vmatrix}
e_{1,1} & \cdots & e_{1,m-1} & 1 \\
\cdot & \cdots & \cdot & \cdot \\
e_{m,1} & \cdots & e_{m,m-1} & 1
\end{vmatrix}
+\beta^2
\begin{vmatrix}
e_{1,1} & \cdots & e_{1,m-1} & 1 \\
\cdot & \cdots & \cdot & \cdot \\
e_{m-1,1} & \cdots & e_{m-1,m-1} & 1 \\
1 & \cdots & 1 & 1
\end{vmatrix}
\right\}. \qquad (91)
$$

Beweis. Die in der linken Seite der Behauptung vorkommende Determinante hat den Wert

$$
\begin{vmatrix}
e_{1,1} & \cdots & e_{1,m-1} & e_{1,m} \\
\cdot & \cdots & \cdot & \cdot \\
e_{m-1,1} & \cdots & e_{m-1,m-1} & e_{m-1,m} \\
e_{m,1}+\beta & \cdots & e_{m,m-1}+\beta & e_{m,m}+\beta
\end{vmatrix}
+
\begin{vmatrix}
e_{1,1} & \cdots & e_{1,m-1} & \beta \\
\cdot & \cdots & \cdot & \cdot \\
e_{m-1,1} & \cdots & e_{m-1,m-1} & \beta \\
e_{m,1}+\beta & \cdots & e_{m,m-1}+\beta & \beta+\beta^2
\end{vmatrix}
$$

$$
=
\begin{vmatrix}
e_{1,1} & \cdots & e_{1,m} \\
\cdot & \cdots & \cdot \\
e_{m,1} & \cdots & e_{m,m}
\end{vmatrix}
+\beta
\begin{vmatrix}
e_{1,1} & \cdots & e_{1,m} \\
\cdot & \cdots & \cdot \\
e_{m-1,1} & \cdots & e_{m-1,m} \\
1 & \cdots & 1
\end{vmatrix}
+\beta
\begin{vmatrix}
e_{1,1} & \cdots & e_{1,m-1} & 1 \\
\cdot & \cdots & \cdot & \cdot \\
e_{m-1,1} & \cdots & e_{m-1,m-1} & 1 \\
e_{m,1}+\beta & \cdots & e_{m,m-1}+\beta & 1+\beta
\end{vmatrix}
$$

$$
=
\begin{vmatrix}
e_{1,1} & \cdots & e_{1,m} \\
\cdot & \cdots & \cdot \\
e_{m,1} & \cdots & e_{m,m}
\end{vmatrix}
+\beta
\begin{vmatrix}
e_{1,1} & \cdots & e_{1,m} \\
\cdot & \cdots & \cdot \\
e_{m-1,1} & \cdots & e_{m-1,m} \\
1 & \cdots & 1
\end{vmatrix}
+
$$

$$
+\beta
\begin{vmatrix}
e_{1,1} & \cdots & e_{1,m-1} & 1 \\
\cdot & \cdots & \cdot & \cdot \\
e_{m,1} & \cdots & e_{m,m-1} & 1
\end{vmatrix}
+\beta^2
\begin{vmatrix}
e_{1,1} & \cdots & e_{1,m-1} & 1 \\
\cdot & \cdots & \cdot & \cdot \\
e_{m-1,1} & \cdots & e_{m-1,m-1} & 1 \\
1 & \cdots & 1 & 1
\end{vmatrix},
$$

sodass wegen $e_{rs}=e_{sr}$ $(r=1,\ldots,m,\ \ s=1,\ldots,m)$ die Behauptung bewiesen ist.

Hilfssatz 15. *Sind die Zahlen* $-\beta$ *und* $2y_r+\alpha$ $(r=1,2,\ldots,m)$ *alle positiv oder alle negativ, sind* $y_1,\ldots,y_{m-1}$ *untereinander verschieden und wird*

$$
D_0=1\quad,\quad D_n=
\begin{vmatrix}
\dfrac{1}{y_1+y_1+\alpha} & \cdots & \dfrac{1}{y_1+y_n+\alpha} \\
\cdot & \cdots & \cdot \\
\dfrac{1}{y_n+y_1+\alpha} & \cdots & \dfrac{1}{y_n+y_n+\alpha}
\end{vmatrix}
\qquad (n=1,2,\ldots,m-1)
$$

und

$$D_m = \begin{vmatrix} \frac{1}{y_1+y_1+\alpha} \cdots\cdots \frac{1}{y_1+y_{m-1}+\alpha} & \frac{1}{y_1+y_m+\alpha}+\beta \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ \frac{1}{y_{m-1}+y_1+\alpha} \cdots\cdots \frac{1}{y_{m-1}+y_{m-1}+\alpha} & \frac{1}{y_{m-1}+y_m+\alpha}+\beta \\ \frac{1}{y_m+y_1+\alpha}+\beta \cdots \frac{1}{y_m+y_{m-1}+\alpha}+\beta & \frac{1}{y_m+y_m+\alpha}+2\beta+\beta^2 \end{vmatrix}$$

gesetzt, dann ist

$$\left.\begin{aligned} \frac{D_m}{D_{m-1}} = \frac{1}{2\,y_m+\alpha} \prod_{r=1}^{m-1} \left(\frac{y_m-y_r}{y_m+y_r+\alpha}\right)^2 + 2\,\beta \prod_{r=1}^{m-1} \frac{y_m-y_r}{y_m+y_r+\alpha} \\ + \beta^2 \left\{ 1 - \sum_{r=1}^{m-1} (2\,y_r+\alpha) \right\} \end{aligned}\right\} . \qquad (92)$$

und ausserdem

$$D_n > 0 \quad \text{oder} \quad (-1)^n\, D_n > 0 \quad (n = 1, 2, \ldots, m-1), \quad . \quad . \qquad (93)$$

je nachdem die Zahlen $-\beta$ *und* $2y_r+\alpha\ (r=1,2,\ldots,m-1)$ *positiv oder negativ sind.*

Beweis. Da (93) unmittelbar aus (89) folgt, brauchen wir nur (92) zu beweisen.

Im Spezialfall mit $m=1$ ist (92) evident, sodass $m \geqq 2$ angenommen werden darf.

Wir wenden nun Hilfssatz 14 mit

$$e_{rs} = \frac{1}{y_r+y_s+\alpha} \quad (r=1,2,\ldots,m,\ s=1,2,\ldots,m)$$

an, sodass in der Tat $e_{rs}=e_{sr}$ ist. Dann ist D_m gleich der linken Seite der Behauptung von Hilfssatz 14, sodass

$$D_m = \begin{vmatrix} e_{1,1} \ldots\ldots e_{1,m} \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ e_{m,1} \ldots\ldots e_{m,m} \end{vmatrix} + 2\beta \begin{vmatrix} e_{1,1} \ldots\ldots e_{1,m-1} & 1 \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot & \cdot \\ e_{m,1} \ldots\ldots e_{m,m-1} & 1 \end{vmatrix} + \beta^2 \begin{vmatrix} e_{1,1} \ldots\ldots e_{1,m-1} & 1 \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot & \cdot \\ e_{m-1,1} \ldots e_{m-1,m-1} & 1 \\ 1 \qquad\quad 1 & 1 \end{vmatrix} \qquad (94)$$

ist. Da die Zahlen $2\,y_r+\alpha\ (r=1,2,\ldots,m)$ alle positiv oder alle negativ sind, gilt nach Formel (80) von Hilfssatz 9

$$\frac{1}{D_{m-1}} \begin{vmatrix} e_{1,1} \ldots e_{1,m} \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ e_{m,1} \ldots e_{m,m} \end{vmatrix} = \frac{1}{2y_m+\alpha} \prod_{r=1}^{m-1} \left(\frac{y_m-y_r}{y_m+y_r+\alpha}\right)^2, \quad . \quad . \qquad (95)$$

Aus Formel (90) von Hilfssatz 13, mit $x_s = -y_s - \alpha$ $(s = 1, 2, \ldots, m-1)$ angewendet, ergibt sich

$$\frac{1}{D_{m-1}} \begin{vmatrix} e_{1,1} \ldots e_{1,m-1} & 1 \\ \cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot & \cdot \\ e_{m,1} \ldots e_{m,m-1} & 1 \end{vmatrix} = \prod_{r=1}^{m-1} \frac{y_m - y_r}{y_m + y_r + \alpha}; \quad \ldots \quad (96)$$

und schliesslich geht aus (88) von Hilfssatz 12 (mit 1 statt β) hervor, dass

$$\frac{1}{D_{m-1}} \begin{vmatrix} e_{1,1} \ldots e_{1,m-1} & 1 \\ \cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot & \cdot \\ e_{m-1,1} \ldots e_{m-1,m-1} & 1 \\ 1 \ldots 1 & 1 \end{vmatrix} = 1 - \sum_{r=1}^{m-1} (2\, y_r + \alpha). \quad \ldots \quad (97)$$

ist.

Aus (94), (95), (96) und (97) folgt die Behauptung.

Satz 23. *Sind die Zahlen* $-\beta$ *und* $2y_r + \alpha$ $(r = 1, 2, \ldots, m)$ *alle positiv oder alle negativ, und wird*

$$\prod_{r=1}^{m-1} \frac{y_m - y_r}{y_m + y_r + \alpha} = P$$

gesetzt, dann ist

$$\sum_{r=1}^{m} \sum_{s=1}^{m} \frac{u_r\, u_s}{y_r + y_s + \alpha} + 2\beta\, u_m (u_1 + \ldots + u_m)$$

$$\geqq \textit{oder} \leqq \left\{ \frac{P^2}{2\, y_m + \alpha} + 2\, \beta\, P - \beta^2 \sum_{r=1}^{m-1} (2\, y_r + \alpha) \right\} u_m^2,$$

je nachdem die Zahlen $-\beta$ *und* $2y_r + \alpha$ $(r = 1, 2, \ldots, m)$ *positiv oder negativ sind.*

Beweis[1]). Bezeichnet K die rechte Seite in (92), so folgt aus dem vorigen Hilfssatz mit Rücksicht auf Satz 1 und 2, dass

$$\sum_{r=1}^{m} \sum_{s=1}^{m} \frac{u_r\, u_s}{y_r + y_s + \alpha} + 2\beta\, u_m (u_1 + \ldots + u_m) + \beta^2 u_m^2 \geqq \text{ oder } \leqq K u_m^2$$

ist, je nachdem die Zahlen $-\beta$ und $2\, y_r + \alpha$ $(r = 1, 2, \ldots, m)$ positiv oder negativ sind; hieraus folgt Satz 23.

Hilfssatz 16. *Man hat*

$$\left| \frac{1}{y_r + y_s + \alpha} + \beta + \gamma\, y_r\, y_s \right| = \left| \frac{1}{y_r + y_s + \alpha} \right| \left\{ \begin{array}{l} 1 + \beta \sigma_1 - \frac{\alpha\gamma}{2} \sigma_2 \\ - \frac{\gamma}{3} \sigma_3 - \frac{\alpha\gamma}{2} \sigma_1^2 + \frac{\beta\gamma}{4} \sigma_2^2 - \frac{\beta\gamma}{3} \sigma_1 \sigma_3 + \frac{\gamma}{3} \sigma_1^3 + \frac{\beta\gamma}{12} \sigma_1^4 \end{array} \right\}, \quad (98)$$

[1]) Vergl. die Fussnote bei Satz 19.

wo links und rechts Determinanten n^{ter} Ordnung gemeint werden, und wo

$$\sigma_h = \sum_{r=1}^{n} \{ y_r^h - (- y_r - a)^h \} \qquad (h = 1, 2, 3) \quad . \quad . \quad . \quad (99)$$

gesetzt ist.

Beweis. Setzt man in O. e. d., Satz 15, (Seite 33) $k = 2$, $u_1(x) = 1$, $u_2(x) = x$, $v_1(y) = \beta - \alpha\gamma y$ und $v_2(y) = -\gamma y$, so erhält man

$$\left. \begin{aligned} &\left| \frac{1}{y_r - x_s} + \beta - \alpha\gamma y_r - \gamma x_s\, y_r \right| = \\ &= \left| \frac{1}{y_r - x_s} \right| \begin{vmatrix} T(u_1, v_1) + 1 & T(u_1, v_2) \\ T(u_2, v_1) & T(u_2, v_2) + 1 \end{vmatrix} \end{aligned} \right\} \quad . \quad . \quad . \quad (100)$$

Hierin ist der Definition gemäss

$$T(u_1, v_1) = \beta\, T(1, 1) - \alpha\gamma\, T(1, y),$$
$$T(u_1, v_2) = -\gamma\, T(1, y),$$
$$T(u_2, v_1) = \beta\, T(x, 1) - \alpha\gamma\, T(x, y),$$
$$T(u_2, v_2) = -\gamma\, T(x, y),$$

also

$$\begin{vmatrix} T(u_1, v_1) + 1 & T(u_1, v_2) \\ T(u_2, v_1) & T(u_2, v_2) + 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 + \beta\, T(1, 1) - \alpha\gamma\, T(1, y) & -\gamma\, T(1, y) \\ \beta\, T(x, 1) - \alpha\gamma\, T(x, y) & 1 - \gamma\, T(x, y) \end{vmatrix}$$
$$= \begin{vmatrix} 1 + \beta\, T(1, 1) & -\gamma\, T(1, y) \\ -\alpha + \beta\, T(x, 1) & 1 - \gamma\, T(x, y) \end{vmatrix}.$$

Nach den Formeln (41) aus O. e. d. (Seite 36) ist diese Determinante gleich

$$\begin{vmatrix} 1 + \beta\sigma_1 & -\frac{\gamma}{2}(\sigma_2 + \sigma_1^2) \\ -\alpha + \frac{\beta}{2}(\sigma_2 - \sigma_1^2) & 1 - \frac{\gamma}{3}(\sigma_3 - \sigma_1^3) \end{vmatrix}$$

$$= 1 + \beta\sigma_1 - \frac{\alpha\gamma}{2}\sigma_2 - \frac{\gamma}{3}\sigma_3 - \frac{\alpha\gamma}{2}\sigma_1^2 + \frac{\beta\gamma}{4}\sigma_2^2 - \frac{\beta\gamma}{3}\sigma_1\sigma_3 + \frac{\gamma}{3}\sigma_1^3 + \frac{\beta\gamma}{12}\sigma_1^4,$$

wo

$$\sigma_h = \sum_{r=1}^{n} (y_r^h - x_r^h) \quad (h = 1, 2, 3) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (101)$$

gesetzt ist.

Nach (100) gilt also

$$\left. \begin{aligned} &\left| \frac{1}{y_r - x_s} + \beta - \alpha\gamma y_r - \gamma x_s\, y_r \right| = \left| \frac{1}{y_r - x_s} \right| \Big\{ 1 + \beta\sigma_1 - \frac{\alpha\gamma}{2}\sigma_2 - \frac{\gamma}{3}\sigma_3 \\ &\qquad - \frac{\alpha\gamma}{2}\sigma_1^2 + \frac{\beta\gamma}{4}\sigma_2^2 - \frac{\beta\gamma}{3}\sigma_1\sigma_3 + \frac{\gamma}{3}\sigma_1^3 + \frac{\beta\gamma}{12}\sigma_1^4 \Big\}. \end{aligned} \right\} \quad (102)$$

Setzt man jetzt $x_s = -y_s - \alpha$ $(s = 1, 2, \ldots, n)$, so geht (101) in (99) über, und dann verwandelt (102) sich in (98).

Hilfssatz 16 ist somit bewiesen.

Hilfssatz 17. *Sind die Zahlen β und $2y_r + \alpha$ $(r = 1, 2, \ldots, m-1)$ alle positiv oder alle negativ, sind $y_1, \ldots, y_{m-1}$ untereinander verschieden und wird*

$$D_0 = 1,\ D_n = \begin{vmatrix} \dfrac{1}{y_1 + y_1 + \alpha} + \beta & \ldots & \dfrac{1}{y_1 + y_n + \alpha} + \beta \\ \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot & \cdot \\ \dfrac{1}{y_n + y_1 + \alpha} + \beta & \ldots & \dfrac{1}{y_n + y_n + \alpha} + \beta \end{vmatrix} \quad (n = 1, 2, \ldots, m-1),$$

$$D_m = \begin{vmatrix} \dfrac{1}{y_1 + y_1 + \alpha} + \beta & \ldots & \dfrac{1}{y_1 + y_{m-1} + \alpha} + \beta & \gamma\, y_1 \\ \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \dfrac{1}{y_{m-1} + y_1 + \alpha} + \beta & \ldots & \dfrac{1}{y_{m-1} + y_{m-1} + \alpha} + \beta & \gamma\, y_{m-1} \\ \gamma\, y_1 & \ldots & \gamma\, y_{m-1} & \gamma \end{vmatrix}$$

und

$$\sigma_h = \sum_{r=1}^{m-1} \{ y_r^h - (-y_r - \alpha)^h \} \qquad (h = 1, 2, 3) \quad . \quad . \quad . \quad (103)$$

gesetzt, dann ist

$$\frac{D_m}{D_{m-1}} = \gamma + \gamma^2 \, \frac{6\,\alpha\,\sigma_2 + 4\,\sigma_3 + 6\,\alpha\,\sigma_1^2 - 3\beta\,\sigma_2^2 + 4\beta\,\sigma_1\,\sigma_3 - 4\,\sigma_1^3 - \beta\,\sigma_1^4}{12\,(1 + \beta\,\sigma_1)}, \quad (104)$$

und ausserdem

$$D_n > 0 \quad \text{oder} \quad (-1)^n D_n > 0 \qquad (n = 1, 2, \ldots, m-1), \ . \quad (105)$$

je nachdem die Zahlen β und $2y_r + \alpha$ $(r = 1, 2, \ldots, m-1)$ positiv oder negativ sind.

Beweis. Im Spezialfall mit $m = 1$ sind die Behauptungen klar. Falls $m \geqq 2$ ist, sind die Bedingungen von Hilfssatz 10 mit $m-1$ statt m erfüllt, sodass wegen (84) die Beziehungen (105) gelten. Nach der Definition von D_m ist

$$D_m = \gamma \begin{vmatrix} \dfrac{1}{y_1 + y_1 + \alpha} + \beta - \gamma\, y_1\, y_1 & \ldots & \dfrac{1}{y_1 + y_{m-1} + \alpha} + \beta - \gamma\, y_1\, y_{m-1} \\ \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot & \cdot \\ \dfrac{1}{y_{m-1} + y_1 + \alpha} + \beta - \gamma\, y_{m-1}\, y_1 & \ldots & \dfrac{1}{y_{m-1} + y_{m-1} + \alpha} + \beta - \gamma\, y_{m-1}\, y_{m-1} \end{vmatrix},$$

also nach dem vorigen Hilfssatz, mit $n = m - 1$ und mit $-\gamma$ statt γ angewendet,

$$D_m = \gamma \left| \frac{1}{y_r + y_s + \alpha} \right| \left\{ \begin{array}{l} \left(1 + \beta \sigma_1 + \frac{\alpha\gamma}{2} \sigma_2 + \frac{\gamma}{3} \sigma_3 + \frac{\alpha\gamma}{2} \sigma_1^2 \right. \\ \left. \quad - \frac{\beta\gamma}{4} \sigma_2^2 + \frac{\beta\gamma}{3} \sigma_1 \sigma_3 - \frac{\gamma}{3} \sigma_1^3 - \frac{\beta\gamma}{12} \sigma_1^4 \right) \end{array} \right\}, \quad (106)$$

wo $\left| \frac{1}{y_r + y_s + \alpha} \right|$ eine Determinante $(m-1)^{\text{ter}}$ Ordnung bezeichnet, und $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ durch (103) definiert sind.

Nach Formel (82) von Hilfssatz 10, mit $n = m - 1$ angewendet, ist aber

$$D_{m-1} = \left| \frac{1}{y_r + y_s + \alpha} + \beta \right| = \left\{ 1 + \beta \sum_{r=1}^{m-1} (2 y_r + \alpha) \right\} \left| \frac{1}{y_r + y_s + \alpha} \right|$$

$$= (1 + \beta\sigma_1) \left| \frac{1}{y_r + y_s + \alpha} \right| .$$

Mit Rücksicht auf (106) folgt hieraus (104), womit der zu beweisende Hilfssatz bewiesen ist.

Satz 24. *Sind die Zahlen* β *und* $2y_r + \alpha$ $(r = 1, 2, \ldots, m-1)$ *alle positiv oder alle negativ, und wird*

$$\sigma_h = \sum_{r=1}^{m-1} \{ y_r^h - (-y_r - \alpha)^h \} \quad (h = 1, 2, 3)$$

gesetzt, dann ist

$$\sum_{r=1}^{m-1} \sum_{s=1}^{m-1} \left(\frac{1}{y_r + y_s + \alpha} + \beta \right) u_r u_s + 2\gamma u_m (y_1 u_1 + y_2 u_2 + \ldots + y_{m-1} u_{m-1})$$

$$\geqq \text{oder} \leqq \gamma^2 . \frac{6\alpha\sigma_2 + 4\sigma_3 + 6\alpha\sigma_1^2 - 3\beta\sigma_2^2 + 4\beta\sigma_1\sigma_3 - 4\sigma_1^3 - \beta\sigma_1^4}{12(1 + \beta\sigma_1)} u_m^2,$$

je nachdem die Zahlen β *und* $2y_r + \alpha$ $(r = 1, 2, \ldots, m-1)$ *positiv oder negativ sind.*

Beweis [1]). Nach dem vorigen Hilfssatz, Satz 1 und Satz 2 gilt die Ungleichung

$$\sum_{r=1}^{m-1} \sum_{s=1}^{m-1} \left(\frac{1}{y_r + y_s + \alpha} + \beta \right) u_r u_s + \gamma u_m (2 y_1 u_1 + \ldots + 2 y_{m-1} u_{m-1} + u_m)$$

$$\geqq \text{oder} \leqq \left\{ \gamma + \gamma^2 . \frac{6\alpha\sigma_2 + 4\sigma_3 + 6\alpha\sigma_1^2 - 3\beta\sigma_2^2 + 4\beta\sigma_1\sigma_3 - 4\sigma_1^3 - \beta\sigma_1^4}{12(1 + \beta\sigma_1)} \right\} u_m^2,$$

je nachdem die Zahlen β und $2 y_r + \alpha$ $(r = 1, 2, \ldots, m-1)$ positiv oder negativ sind. Hieraus geht der zu beweisende Satz unmittelbar hervor.

[1]) Vergl. die Fussnote bei Satz 19.