Mathematics. — *Abbildung der ungeordneten Punktepaare einer Ebene auf die Punkte eines vierdimensionalen Raumes.* Von G. SCHAAKE. (Communicated by Prof. JAN DE VRIES).

(Communicated at the meeting of October 31, 1931.)

§ 1. Um eine Abbildung der Punktepaare (P, Q) einer Ebene α auf die Punkte B' eines linearen vierdimensionalen Raumes R_4 zu bekommen, nehmen wir in α einen Punkt A an und denken wir uns eine kollineare Verwandtschaft zwischen dem ∞^4-Systeme Σ der A enthaltenden Kegelschnitte k^2 von α und dem der dreidimensionalen Räume R_3 von R_4.

Zu den Kegelschnitten k^2 von Σ, die durch einen gegebenen Punkt R von α gehen, gehören die Räume R_3 von R_4, die durch einen gegebenen Punkt R' dieses Raumes gehen. Diesen Punkt R' ordnen wir dem Punkte R zu.

So bekommen wir eine Abbildung des Ortes der Punkte R', das ist eine in R_4 liegende Fläche ω', auf die Ebene α. Die räumlichen Durchschnitte von ω' werden abgebildet auf die Kegelschnitte k^2 von α.

Die Abbildung besitzt in α einen singulären Punkt, das ist A. Jeder räumliche Durchschnitt von ω' enthält einen dem Punkte A zugeordneten Punkt R'. Die zu A gehörigen Punkte R' bilden also eine Gerade a' von ω.

Weil zwei Kegelschnitte k^2 sich in drei von dem singulären Punkte A verschiedenen Punkten schneiden, haben zwei räumliche Durchschnitte von ω' drei Punkte gemein, also wird diese Fläche von einer Ebene in drei Punkten geschnitten. Die Fläche ω' ist also eine kubische Fläche ω'^3. Ihre räumlichen Durchschnitte sind a' schneidende kubische Raumkurven k'^3, die auf die Kegelschnitte k^2 abgebildet werden.

Eine durch A gehende Gerade b von α, die einen Kegelschnitt k^2 in einem für die Abbildung nicht singulären Punkt schneidet, ist das Bild einer Gerade b' von ω'^3. Diese Fläche besteht also aus a' schneidenden Geraden b', welche auf die Erzeugenden b des Strahlenbüschels (A, α) abgebildet werden.

Die Geraden l von α sind die Bilder ∞^2 auf ω'^3 liegender Kegelschnitte l'^2 welche a' nicht schneiden. Ein Kegelschnitt l'^2 wird von allen Geraden b' geschnitten und bildet damit Kurven k'^3, ebenso wie eine Gerade b' mit allen Kegelschnitten l'^2.

§ 2. Die Durchschnitte von ω'^3 mit den dreidimensionalen Räumen, die einen gegebenen Punkt B' von R_4 enthalten, werden abgebildet auf die Kegelschnitte k^2 eines linearen Komplexes N, der in A einen Basispunkt hat. Ein solcher Komplex besteht aus den durch A gehenden

Kegelschnitten, die eine feste Gerade l in den Punktepaaren einer Involution I schneiden.

Der zu l gehörende Kegelschnitt l'^2 wird also von den B' enthaltenden Räumen R_3 geschnitten in den Punktepaaren der Involution I', welche der Involution I zugeordnet ist. Das Zentrum von I' ist B'. Die Ebene β' von l'^2 geht also durch B'; es ist die einzige Ebene durch B', die mit ω'^3 einen Kegelschnitt gemein hat und der Ort der durch B' gehenden Bisekanten von ω'^3. Es giebt also zwei Tangenten p und q von ω'^3 durch B', das sind die B' enthaltenden Tangenten von l'^2.

Weil eine Tangentialebene von ω'^3 durch B' eine Tangente durch B' enthalten muss, giebt es zwei Tangentialebenen von ω'^3, die durch B' gehen, das sind die Tangentialebenen von ω'^3 in den Berührungspunkten von p und q [1]).

§ 3. Wir bekommen eine Abbildung der Punktepaare (P, Q) von α auf die Punkte B' von R_4, wenn wir jedem Punktepaar (P, Q) von α den Schnittpunkt B' der Tangentialebenen in den zu P und Q gehörenden Punkten P' und Q' von ω'^3 zuordnen. Aus § 2 sieht man, dass ein allgemeiner Punkt B' nur einem Punktepaar (P, Q) von α zugeordnet ist.

§ 4. Wir leiten nun erst einen im Folgenden anzuwendenden Satz ab. Dazu denken wir uns ein kontinuierliches System σ von ∞^1 Kegelschnitten k^2. Sei δ ein Element von σ, das aus zwei Geraden d_1 und d_2 zusammengesetzt ist. Auf einem allgemeinen Kegelschnitt k^2 von σ denken wir uns zwei Punkte P und Q. Die Tangenten von k^2 in P und Q schneiden sich in S. Wenn wir auf diesem Kegelschnitte k^2 noch einen Punkt R annehmen, so sind RP, RS, RQ und die Tangente von k^2 in R vier harmonische Strahlen.

Wir stellen uns nun vor, dass k^2 das System σ kontinuierlich durchläuft und sich δ nähert. Weiter denken wir uns, dass P, Q und R sich hierbei kontinuierlich ändern und dass P und Q sich zwei Punkten P_1 und Q_1 der einen Gerade d_1 von δ näheren, weil R einen Punkt R_1 der anderen Gerade d_2 von δ zur Grenzlage hat. Wir finden nun, dass S eine Grenzlage S_1 hat, welcher Punkt aus d_1 geschnitten wird von der R_1 enthaltenden Geraden, die von d_2 harmonisch getrennt wird durch die beiden Geraden R_1P_1 und R_1Q_1.

Wenn k^2 sich zu δ naht, hat der Punkt S also seine Grenzlage in jenem Punkte von d_1, der von dem Doppelpunkte von δ harmonisch getrennt wird durch die Punkte P_1 und Q_1.

§ 5. Der Bildpunkt B' eines Punktepaares (P, Q) von α ist der Pol der Geraden $P'Q'$, für den durch P' und Q' gehenden Kegelschnitt l'^2 von

---

[1]) Projiziert man ω'^3 aus B' auf einen dreidimensionalen Raum von R_4, so ist die Projektion eine kubische Regelfläche. Die doppelte Leitgerade ist die Projektion von l'^2.

ω'^3. Wenn P' und Q' sich näheren zu zwei Punkten einer Gerade b' von ω'^3, so nähert B' sich also dem Punkte, der von den Grenzlagen von P' und Q' harmonisch getrennt wird durch den Schnittpunkt von b' mit a'.

Wir finden nun:

Ein Punkt B' von ω'^3 ist ein singulärer Bildpunkt. Sei B der zu B' gehörende Punkt von α, so bilden die dem Punkte B' zugeordneten Punktepaare (P, Q) die Involution auf der Gerade AB, welche A und B zu Doppelpunkten hat.

Eine Gerade b' von ω'^3 ist also das Bild des ∞^2-Systemes der Punktepaare (P, Q) einer durch A gehenden Geraden b von α, indem die Fläche ω'^3 das ∞^3-System abbildet der Punktepaare, deren Träger durch A gehen.

Die Flache ω'^3 ist im besonderen der geometrische Ort der Bildpunkte der Koinzidenzen (P, Q).

Ein Punktepaar (P, Q), wofür P in A fällt, wird abgebildet auf den Schnittpunkt von a' mit der durch Q' gehenden Erzeugenden von ω'^3.

§ 6. Wenn P und Q in A zusammenfallen, so können P' und Q' in einem selben Punkte von a' angenommen werden. Der Bildpunkt von (P, Q) kann also zusammenfallen mit jedem Punkte der Berührungsebene von ω'^3 im genannten Punkte von a'. Wenn wir umgekehrt von einem Punkte B' dieser Berührungsebene ausgehen, so finden wir, dass P und Q in A zusammenfallen[1]). So sehen wir:

Das Punktepaar (P, Q), wofür P und Q in A zusammenfallen, ist ein singuläres Punktepaar dritten Ranges. Die Bildpunkte bilden den quadratischen Bikegel K, der ω'^3 aus a' projiziert.

Wenn wir einer in A fallenden Koïnzidenz (P, Q) einen bestimmten Träger geben, so giebt es nur ∞^2 Bildpunkte, die eine durch a' gehende Ebene bilden, nämlich die Ebene durch a' und die Gerade b', die dem gegebenen Träger zugeordnet ist.

§ 7. Zu den Punktepaaren (P, Q) einer Involution I, welche die Gerade l von α zum Träger hat, gehören die Punktepaare (P', Q') einer Involution I' auf dem l zugeordneten Kegelschnitte l'^2. Die Involution I wird ersichtlich abgebildet auf die Achse von I', das ist eine Gerade k, die ω'^3 zweimal schneidet.

Wenn wir umgekehrt ausgehen von einer ω'^3 zweimal schneidenden Geraden k, so giebt es eine k enthaltende Ebene, die mit ω'^3 einen Kegelschnitt l'^2 gemein hat; k ist die Achse einer Involution I' auf l'^2, wozu eine Involution I auf einer Gerade l von α gehört.

Die Involutionen auf den Geraden von α werden abgebildet auf die Geraden k von R_4, die ω'^3 zweimal schneiden.

Die Bildgeraden der parabolischen Involutionen von α sind die Tangenten von ω'^3.

---

[1]) Die Projektion von ω'^3 aus einem solchen Punkte B' auf einem dreidimensionalen Raum von R_4 ist eine Cayleysche Regelfläche.

§ 8. Ein dreidimensionaler Raum R_3 von R_4 hat mit ω'^3 eine rationale Kurve k^3 gemein, welcher gemäss § 1 ein Kegelschnitt k^2 von α zugeordnet ist. Nun liegt jeder Punkt von R_3 auf einer Bisekante von R_3; gemäss § 7 ist also jedes Punktepaar, das auf einen Punkt von R_3 abgebildet wird für den der Kurve k^3 zugeordneten Kegelschnitt k^2 konjugiert. Wir finden:

Ein dreidimensionaler Raum R_3 von R_4 ist die Abbildung des ∞^3-Systemes der Punktepaare (P, Q), die konjugiert sind für einen durch A gehenden Kegelschnitt k^2.

Wenn k^2 aus einer durch A gehenden Geraden und einer allgemeinen Geraden von α besteht, so ist R_3 ein Raum durch eine Erzeugende b' von ω'^3.

Wenn k^2 aus zwei durch A gehenden Geraden besteht, so ist R_3 ein Raum durch a'.

Dieser Raum wird ein Tangentialraum von ω'^3 längs einer Erzeugende b' oder was dasselbe ist, ein Tangentialraum von K längs der Ebene $b'a'$, wenn k^2 aus zwei zusammenfallenden durch A gehenden Geraden besteht.

§ 9. *Wir sahen in § 7, dass die Punktepaare einer Involution I auf einer Geraden l von α abgebildet werden auf die Punkte einer Bisekante k' der Fläche ω'^3.*

Ein anderes einfaches System π von ∞^1 Punktepaaren besteht aus den Punktepaaren (P, Q), wofür P in einem gegebenen Punkte von α liegt und Q zu einer gegebenen Geraden q von α gehört. Dieses System enthält ein Punktepaar, das für einen durch A gehenden Kegelschnitt konjugiert ist. Die Bildkurve hat demnach einen Punkt mit einem allgemeinen R_3 gemein und ist also eine Bildgerade p'. Weil π ein Punktepaar mit einem durch A gehenden Träger enthält, hat p' einen Punkt mit ω'^3 gemein. Die Gerade p' liegt in der Berührungsebene von ω'^3 in dem Punkte P', der dem Punkte P zugeordnet ist. Sie berührt K also in einem Punkte von ω'^3 und zwar in jenem Punkte, der dem Punkte von α, der von A durch P und q harmonisch getrennt wird, zugeordnet ist.

Ein System π wird abgebildet auf eine Gerade p', die den Bikegel K in einem Punkte von ω'^3 berührt.

Die Gerade p' ist der Ort der Schnittpunkte der Berührungsebene von ω'^3 in P' mit den Berührungsebenen von ω'^3 in den Punkten des Kegelschnittes, der zu der Gerade q' gehört.

Wenn q durch A geht, gehört die Gerade p' zu dem Strahlenbündel, der liegt im Raume, welcher K berührt längs der durch P' gehenden Erzeugenden von ω'^3 und wovon der Schnittpunkt dieser Erzeugenden mit a' der Scheitel ist.

§ 10. *Das ∞^2-System der Punktepaare einer Geraden l wird ersichtlich abgebildet auf eine Ebene K, die einen Kegelschnitt k'^2 mit ω'^3 gemein hat.*

Das ∞^2-System der Punktepaare (P, Q) mit festem Punkte P wird abgebildet auf eine Berührungsebene von ω'^3.

§ 11. Das ∞^3-System der Punktepaare (P, Q) von α, wofür P auf einer Geraden l von α liegt, wird abgebildet auf eine dreidimensionale Varietät V_3, die besteht aus den Berührungsebenen von ω'^3 in den Punkten des Kegelschnittes k'^2, die der Geraden l zugeordnet ist. Die Varietät V_3 hat die Ebene $\varkappa$ von k'^2 zur Doppelebene.

Die Ordnung von V_3 ist ersichtlich gleich der Anzahl der Berührungsebenen einer kubischen Regelfläche eines Raumes R_3, die diese Fläche auf einem seiner Kegelschnitte berühren und durch einen gegebenen Punkt dieses Raumes gehen, das ist 3. Ein Raum durch $\varkappa$ hat mit $V_3{}^3$ ausser dieser Doppelebene nog die Berührungsebene gemein von ω'^3 in dem Punkte, worin dieser Raum ω'^3 berührt.

Das System der Punktepaare (P, Q), wofür P auf einer gegebenen Geraden von α liegt, wird abgebildet auf eine kubische Varietät $V_3{}^3$, die den Bikegel K in jedem Punkte von ω'^3 berührt.

Wenn die gegebene Gerade durch A geht, wird das System abgebildet auf einen Berührungsraum des Bikegels K.

Das ∞^3-System der Punktepaare (P, Q), deren Träger durch einen gegebenen Punkt P von α gehen, wird gebildet von den ∞^2 Involutionen I, die einen Doppelpunkt in P haben.

Hieraus folgt:

Das ∞^3-System der Punktepaare (P, Q), deren Träger durch einen gegebenen Punkt P von α gehen, wird abgebildet auf den quadratischen Hyperkegel, der ω'^3 aus dem P zugeordneten Punkte P' projiziert.

§ 12. Wir untersuchen nun das ∞^1-System der Punktepaare (P, Q), das auf eine Gerade r von R_4 abgebildet wird. Weil r drei Punkte mit einer Varietät $V_3{}^3$ gemein hat, ist der Ort der Punktepaare (P, Q) eine kubische Kurve k^3. Das zu r gehörende System enthält zwei in A liegende Koinzidenzen (P, Q), weil r den Bikegel K zweimal schneidet. Die Tangenten von k^3 in A sind die Geraden, welche gehören zu den Erzeugenden von ω'^3 in den Ebenen von K durch die Schnittpunkte von r mit K.

Auch aus dem Umstande, dass ein Berührungsraum von K einen Punkt mit r gemein hat, folgt, dass eine durch A gehende Gerade von α die Kurve k^3 ausserhalb A einmal schneidet.

Weil r einen projizierenden quadratischen Hyperkegel von ω'^3 zweimal schneidet, hüllen die Träger der Punktepaare des gefundenen ∞^1-Systemes einen Kegelschnitt ein.

Eine Gerade von R_4 ist das Bild einer Involution auf einer Kurve k^3 von α mit Doppelpunkt in A. Diese Involution ist diejenige, deren Koinzidenzen auf den beiden durch A gehenden Zweigen von k^3 in A liegen.

Wenn r den Bikegel K berührt, liegt r in einem Berührungsraume von K. Dieser Berührungsraum ist der Ort der Ebenen, die ω'^3 berühren in den Punkten der Erzeugenden von ω'^3, die er met dieser Fläche gemein hat. Hieraus folgt, dass sich dann von k^3 eine durch A gehende Gerade absondert, auf welcher einer der beiden Punkte P und Q stets liegt. Der

restierende Kegelschnitt k^2 berührt die genannte Gerade b in A. Die Gerade r ist das Bild des Systemes der Punktepaare (P, Q), das bestimmt wird von einer ein-eindeutigen Verwandtschaft zwischen den Punkten P von k^2 und den Punkten Q von b, in welcher A sichselbst zugeordnet ist und die Gerade PQ b zur Grenzlage hat, wenn P und also auch Q sich A näheren.

Wenn r die Fläche ω'^3 in einem Punkte S' schneidet, wozu der Punkt S von α gehört, so sondert sich von dem r zugeordneten Systeme die Involution auf AS ab, die A und S zu Doppelpunkten hat. Die Gerade r ist dann das Bild der Involution auf einem Kegelschnitte durch A und S, die A und S zu Doppelpunkten hat. Das Zentrum dieser Involution ist der Punkt von α, der gehört zu dem isolierten Schnittpunkte von ω'^3 mit der Ebene durch r und die r schneidende Erzeugende von ω'^3.

Eine Gerade r, die den Bikegel K auf ω'^3 berührt, liegt in einer Berührungsebene von ω'^3 und schneidet eine Varietät $V_3{}^3$ in einem für die Abbildung nicht singulären Punkte. Eine derartige Gerade ist also das Bild eines ∞^1-Systemes von Punktepaaren (P, Q), wofür P ein gegebener Punkt von α ist und die Punkte Q eine Gerade q von α bilden.

Betrachten wir zum Schluss eine a' schneidende Gerade r. Durch diese Gerade gehen zwei Berührungsräume des Bikegels K; jeder dieser Räume enthält die Berührungsebenen von ω'^3 in den Punkten der Gerade, die er mit ω'^3 gemein hat. Wir finden, dass eine a' schneidende Gerade r das Bild ist einer ein-eindeutigen Verwandtschaft zwischen den Punktreihen zweier durch A gehenden Geraden von α, in welcher der Punkt A sich selbst zugeordnet ist, also einer perspektiven Verwandtschaft. (Das Zentrum dieser perspektiven Verwandtschaft ist der Punkt von α, der gehört zu dem isolierten Schnittpunkte von ω'^3 mit der Ebene durch r und die Erzeugende von ω'^3 durch den Schnittpunkt von a und r).

§ 13. Eine Ebene φ von R_4 liegt in den Räumen R_3 eines Büschels. Diese Räume R_3 schneiden ω'^3 in kubischen Kurven k'^3; die diesen Kurven zugeordneten Kegelschnitte k^2 bilden einen Büschel, der einen seiner Grundpunkte in A hat.

Die Punkte von φ sind die Bildpunkte der Punktepaare, die konjugiert sind für die Kegelschnitte dieses Büschels.

Eine Ebene φ ist also die Abbildung einer quadratischen Involution erster Art, die eine ihrer vier Koinzidenzen in A hat.

Die drei anderen Koinzidenzen gehören zu den Schnittpunkten von φ mit ω'^3.

Wenn φ eine Erzeugende von ω'^3 enthält, so besteht β aus den Geradenpaaren (p, q), die aus einer festen A enthaltenden Geraden p und einem Büschel Q von Geraden q bestehen. Dann ist φ die Bildebene einer involutorischen Kollineation. Die Achse dieser Kollineation ist die Gerade durch A, die der in φ liegenden Erzeugenden von ω'^3 zugeordnet ist. Das

Zentrum ist der Punkt von α, der zum isolierten Schnittpunkte von φ mit ω'^3 gehört [1]).

Fur eine a schneidende Ebene φ fallen zwei Koinzidenzen der zugehörigen quadratischen Punktinvolution in A zusammen. Der Büschel β besteht nun aus Kegelschnitten, die sich in A berühren.

Wenn φ die Gerade a enthält, so besteht β aus den Paaren einer Involution im Strahlenbüschel (A, α). Sind p und q die Doppelstrahlen dieser Involution, so ist φ die Bildebene des ∞^2-Systemes der Punktepaare (P, Q), für welche P zu p und Q zu q gehört.

§ 14. Wir geben nun noch die Abbildungen einiger einfachen involutorischen Punktepaaresysteme von α.

Nehmen wir zunächst eine Involution auf einem Kegelschnitte von α. Diese besitzt zwei Punktepaare, die für einen durch A gehenden Kegelschnitt konjugiert sind, ein Punktepaar, dessen Träger A enthält und zwei Koinzidenzen. Hieraus folgt:

Eine Involution auf einem Kegelschnitte von α wird abgebildet auf einem Kegelschnitte, der den Bikegel K auf ω'^3 einmal berührt und ω'^3 ausserdem zweimal schneidet.

Wenn ein Doppelpunkt in A liegt, so wird die Involution abgebildet auf eine ω'^3 schneidende Gerade.

Wir betrachten weiter eine in α liegende Kurve k n^{er} Ordnung, die in A einen m-fachen Punkt hat. Hierzu gehort auf ω'^3 eine Kurve k' $(2n-m)^{\text{er}}$ Ordnung, die a' m-mal trifft. Das System der Punktepaare, (P, Q) von α, wofür P und Q harmonisch getrennt werden durch zwei Punkte von k, wird abgebildet auf die Varietät der Bisekanten von k'.

So wird das ∞^3-System der Punktepaare, die für einen Kegelschnitt k^2 konjugiert sind, abgebildet auf die kubische Varietät V'^3 der Bisekanten einer auf ω'^3 liegenden rationalen Kurve vierter Ordnung k'^4, die jede Erzeugende zweimal schneidet. Diese Varietät berührt den Bikegel K auf ω'^3 und hat k'^4 zu Doppelkurve.

Eine quadratische Involution erster Art besteht immer aus den Punktepaaren, welche konjugiert sind für zwei Kegelschnitte, wovon einer durch A geht. Sie wird also abgebildet auf den Durchschnitt einer Varietät V'^3 mit einem dreidimensionalen Raume R'_3, das ist auf eine kubische Fläche, die den Bikegel K' in den Punkten einer auf ω'^3 liegenden kubischen Raumkurve berührt und vier Kegelpunkte besitzt.

Eine quadratische Involution zweiter Art besteht aus den Punktepaaren welche konjugiert sind für einen Kegelschnitt und ihre Träger durch einen gegebenen Punkt von α schicken. Sie wird also abgebildet auf den von ω'^3 verschiedenen Durchschnitt einer Varietät V'^3 mit dem quadratischen Hyperkegel, der ω'^3 aus dem zu P gehörigen Punkte P' projiziert, das ist

[1]) Von der quadratischen Involution, die zu einer allgemeinen Ebene φ gehört, hat sich nun das System der Punktepaare von p abgesondert, das abgebildet wird auf die in φ liegende Erzeugende von ω'_3.

eine kubische Fläche, die mit ω'^3 eine rationale biquadratische Kurve gemein hat und K' in den Punkten einer Erzeugenden von ω'^3 berührt.

Eine involutorische Kollineation wird abgebildet auf einen quadratischen Kegel, der einen Kegelschnitt von ω'^3 aus einem Punkte dieser Fläche projiziert.

Schliesslich bemerken wir noch, dass das System der Punktepaare eines Kegelschnittes k^2 abgebildet wird auf eine biquadratische Fläche, die den Bikegel K' in den Punkten eines Kegelschnittes l'^2 von ω'^3 berührt und mit ω'^3 noch eine rationale biquadratische Kurve, die a' nicht schneidet, gemein hat. Wenn k^2 durch A geht, so wird das System abgebildet auf eine kubische Fläche, die durch a' geht und aus ω'^3 eine kubische Raumkurve k'^3 schneidet.

§ 15. Wir nennen die Gerade, welche die Berührungspunkte P' und Q' der beiden durch einen Punkt R' von R_4 gehenden Berührungsebenen von ω'^3 verbindet, die Polare von R' für ω'^3. Wenn R' eine Gerade erzeugt, so bilden die Punktepaare (P, Q) die Involution auf einer kubischen Kurve von α mit einem Doppelpunkte in A, dessen beide Koinzidenzen auf den beiden durch A gehenden Zweigen in A liegen. Hieraus folgt:

Wenn R' eine Gerade erzeugt, so durchlaufen P' und Q' eine auf ω'^3 liegende rationale Kurve vierter Ordnung, die a' zweimal trifft, und die Polare $P'Q'$ erzeugt eine kubische Regelschar, die a' enthält.