Mathematics. — *Über Dreiecke mit rationalen Seiten und rationalen Winkelhalbierenden.* Von J. G. VAN DER CORPUT.

(Communicated at the meeting of December 19, 1931.)

In seiner ausgezeichneten und sehr nützlichen „History of the Theory of Numbers" teilt Herr DICKSON mit (Teil II, S. 210), dass J. CUNLIFFE [1]) folgendermassen Dreiecke ABC mit rationalen Seiten a, b, c und rationalen inneren Winkelhalbierenden bestimmt hat:

Verbindet man in einem solchen Dreieck den Mittelpunkt des einbeschriebenen Kreises mit den Berührungspunkten der Seiten, und auch mit den Eckpunkten des Dreieckes, so wird das Dreieck in drei Paare kongruenter rechtwinkliger Dreiecke mit rationalen Seiten zerlegt, und in jedem dieser sechs rechtwinkligen Dreiecke ist eine Kathete gleich dem Halbmesser des einbeschriebenen Kreises. Umgekehrt bilden drei Paare kongruenter rechtwinkliger Dreiecke mit rationalen Seiten, die eine gleich grosse Kathete haben, auf entsprechende Weise neben einander gelegt, nach J. CUNLIFFE ein Dreieck mit rationalen Seiten und rationalen inneren Winkelhalbierenden. Als Beispiel werden die drei Paare kongruenter Dreiecke mit den Seiten

$$24,\ 143,\ 145;\quad 24,\ 32,\ 40 \quad \text{und} \quad 24,\ 7,\ 25$$

genannt, die nach CUNLIFFE zusammen das Dreieck mit den Seiten 39, 150, 175 ergeben.

Diese Methode ist falsch. Im Allgemeinen bilden die sechs genannten Dreiecke zusammen nicht ein Dreieck; CUNLIFFE hat nämlich nicht die Bedingung berücksichtigt, dass die sechs Winkel, die neben einander gelegt werden und je zwei gleich sind, zusammen einen Winkel von 360° bilden müssen. Man braucht sich also nicht zu wundern, dass im Dreieck mit den Seiten 39, 150 und 175 die Winkelhalbierende zwischen den Seiten 39 und 175 irrational ist.

Satz 1. *Sind in einem Dreieck ABC die Seiten und die inneren Winkelhalbierenden rational, dann sind auch rational:*

$$tg\,\tfrac{1}{4}A,\quad tg\,\tfrac{1}{4}B \text{ und } tg\,\tfrac{1}{4}C;$$

die äusseren Winkelhalbierenden;

der Flächeninhalt des Dreieckes;

die Halbmesser der um-, ein- und anbeschriebenen Kreise des Dreieckes;

die zwölf Entfernungen der Mittelpunkte dieser Kreise zu den Eckpunkten des Dreieckes.

---

[1]) J. CUNLIFFE, New Series of the Math. Repository, London 4, Pt. 2, 1819, 64.

B e m e r k u n g. Wird nur die Rationalität der Seiten und von zwei inneren Winkelhalbierenden vorausgesetzt, so braucht die dritte innere Winkelhalbierende noch nicht rational zu sein. Denn wird das gleichschenklige Dreieck ABC mit $a = b$ so gewählt, dass a und $\cos \frac{1}{2} A$ rational, $\sin \frac{1}{2} A$ irrational ist, dann ist

$$c = 2a \cos A = 2a\,(2\cos^2 \tfrac{1}{2} A - 1)$$

rational, und auch die Halbierenden $\dfrac{2bc}{b+c} \cos \frac{1}{2} A$ der Basiswinkel, aber die dritte innere Winkelhalbierende $a \sin A = 2a \sin \frac{1}{2} A \cos \frac{1}{2} A$ ist irrational.

Beweis. Die Längen der Winkelhalbierenden sind

$$\frac{2bc}{b+c} \cos \tfrac{1}{2} A, \quad \frac{2ca}{c+a} \cos \tfrac{1}{2} B \text{ und } \frac{2ab}{a+b} \cos \tfrac{1}{2} C, \qquad \ldots \quad (1)$$

sodass $\cos \frac{1}{2} A$, $\cos \frac{1}{2} B$ und $\cos \frac{1}{2} C$ rational sind.

Hieraus folgt die Rationalität von

$$\sin \tfrac{1}{2} A = \frac{2a}{a+b+c} \cos \tfrac{1}{2} B \cos \tfrac{1}{2} C,$$

von

$$tg\, \tfrac{1}{4} A = \frac{1 - \cos \frac{1}{2} A}{\sin \frac{1}{2} A},$$

sowie von $tg\, \frac{1}{4} B$ und $tg\, \frac{1}{4} C$, der äusseren Winkelhalbierenden

$$\pm \frac{2bc}{b-c} \sin \tfrac{1}{2} A, \quad \pm \frac{2ca}{c-a} \sin \tfrac{1}{2} B \text{ und } \pm \frac{2ab}{a-b} \sin \tfrac{1}{2} C,$$

des Flächeninhalts

$$F = \tfrac{1}{2} ab \sin C,$$

der Halbmesser

$$\frac{abc}{4F}, \quad \frac{F}{s}, \quad \frac{F}{s-a}, \quad \frac{F}{s-b} \text{ und } \frac{F}{s-c}$$

der um-, ein- und anbeschriebenen Kreise ($2s$ ist der Umriss des Dreieckes), und schliesslich der zwölf Entfernungen der Mittelpunkte dieser Kreise zu den Eckpunkten, da diese Entfernungen durch die Ausdrücke

$$\frac{s-a}{\cos \frac{1}{2} A}, \quad \frac{s}{\cos \frac{1}{2} A}, \quad \frac{s-b}{\sin \frac{1}{2} C}$$

und durch die neun hieraus durch Permutation von a, b, c entstehenden Ausdrücke angegeben werden.

Satz 2. *Sind in einem Dreieck ABC eine Seite, $tg \frac{1}{4} A$ und $tg \frac{1}{4} B$ rational, dann sind die Seiten und die inneren Winkelhalbierenden rational, sodass dann die Behauptung von Satz 1 gilt.*

Beweis. Die Zahl

$$tg \tfrac{1}{4} C = tg\,(45^\circ - \tfrac{1}{4} A - \tfrac{1}{4} B) = \frac{1 - tg \frac{1}{4}(A+B)}{1 + tg \frac{1}{4}(A+B)}$$

$$= \frac{1 - tg \frac{1}{4} A - tg \frac{1}{4} B - tg \frac{1}{4} A \,.\, tg \frac{1}{4} B}{1 + tg \frac{1}{4} A + tg \frac{1}{4} B - tg \frac{1}{4} A \,.\, tg \frac{1}{4} B}$$

ist rational. Nun sind

$$cos \tfrac{1}{2} A = \frac{1 - tg^2 \frac{1}{4} A}{1 + tg^2 \frac{1}{4} A}, \quad sin \tfrac{1}{2} A = \frac{2\, tg \frac{1}{4} A}{1 + tg^2 \frac{1}{4} A}, \quad sin\, A = 2 \, sin \tfrac{1}{2} A \, cos \tfrac{1}{2} A,$$

sowie $cos \frac{1}{2} B$, $cos \frac{1}{2} C$, $sin\, B$ und $sin\, C$ rational. Da eine Seite von $\triangle ABC$ rational ist, folgt aus der Sinusregel die Rationalität der beiden andern Seiten, sodass die inneren Winkelhalbierenden, deren Längen in (1) angegeben sind, gleichfalls rational sind.

Ein Dreieck heisst primitiv, wenn die Längen der Seiten ganze Zahlen mit einem grössten gemeinsamen Teiler gleich 1 sind.

Satz 3. *Bezeichnen m und n zwei natürliche, teilerfremde Zahlen verschiedener Parität*[1]) *mit $m > n$, so ist das gleichschenklige Dreieck ABC mit den Seiten*

$$a = b = (m^2 + n^2)^2 \text{ und } c = \pm 2\,(m^2 - 2\,mn - n^2)\,(m^2 + 2\,mn - n^2)\ . \qquad (2)$$

ein primitives Dreieck mit rationalen Winkelhalbierenden; hierin wird natürlich das Plus- oder Minuszeichen benutzt, je nachdem $m^2 - 2mn - n^2$ positiv oder negativ ist.

Auf diese Art findet man a l l e gleichschenkligen primitiven Dreiecke mit rationalen Winkelhalbierenden.

Die Höhe h des Dreieckes ist $4mn\,(m^2 - n^2)$.

Ist $m^2 - 2mn - n^2$ positiv, so ist

$$tg \tfrac{1}{4} A = \frac{n}{m}; \quad a + b + c = 4\,(m^2 - n^2)^2; \quad a + b - c = 16\, m^2 n^2; \qquad (3)$$

ist $m^2 - 2mn - n^2$ negativ, so ist

$$tg \tfrac{1}{4} A = \frac{m - n}{m + n}; \quad a + b + c = 16\, m^2 n^2; \quad a + b - c = 4\,(m^2 - n^2)^2. \qquad (4)$$

[1]) Zwei Zahlen, von denen eine gerade und eine ungerade ist, heissen verschiedener Parität.

B e m e r k u n g. Für jedes primitive Dreieck mit rationalen Winkelhalbierenden und mit $a = b$ sind also $a + b + c$ und $a + b - c$ gerade Quadrate, ist a ein ungerades Quadrat, und ist die Höhe durch 24 teilbar.

Beweis von Satz 3.

1. Das Dreieck mit den in (2) angegebenen Seiten, wo m und n natürliche, teilerfremde Zahlen verschiedener Parität mit $m > n$ bezeichnen, ist primitiv.

Beweis. Sonst könne man das $\pm$ Zeichen so wählen, dass $m^2 + n^2$ und $2(m^2 \pm 2mn - n^2)$ einen gemeinsamen Primfaktor p besitzen; p wäre dann Faktor von

$$2(m^2 + n^2) + 2(m^2 \pm 2mn - n^2) = 4m(m \pm n),$$

also auch von

$$16m^2(m \pm n)^2 - 16m^2(m^2 + n^2) = \pm 32m^3 n,$$

sodass p entweder gleich 2, oder ein Faktor einer der zwei Zahlen m und n wäre; $p = 2$ kann nicht, da m und n verschiedene Parität haben, also $m^2 + n^2$ ungerade ist; dass p ein Faktor von m ist, ist auch ausgeschlossen, da dann p ein Faktor von $(m^2 + n^2) - m^2 = n^2$, also von n wäre, sodass dann m und n einen gemeinsamen Faktor p hätten; der Beweis, dass p kein Faktor von n sein kann, geht genau ebenso.

2. Das Dreieck ABC mit den Seiten

$$a = b = (m^2 + n^2)^2 \text{ und } c = 2(m^2 - 2mn - n^2)(m^2 + 2mn - n^2),$$

wo m und n positive rationale Zahlen mit $m > n$ und $m^2 - 2mn - n^2 > 0$ bezeichnen, hat rationale Winkelhalbierenden. Dieses Dreieck hat eine Höhe $h = 4mn(m^2 - n^2)$, und genügt der Beziehung (3).

Beweis. Bezeichnet α den im ersten Quadranten liegenden Winkel mit $tg\,\alpha = \frac{n}{m}$, dann ist

$$\left.\begin{aligned} tg\,2\alpha &= \frac{2\,tg\,\alpha}{1 - tg^2\,\alpha} = \frac{2\,mn}{m^2 - n^2}, \\ \cos 4\alpha &= \frac{1 - tg^2\,2\alpha}{1 + tg^2\,2\alpha} = \frac{(m^2 - n^2)^2 - (2mn)^2}{(m^2 - n^2)^2 + (2mn)^2} \\ &= \frac{(m^2 - 2mn - n^2)(m^2 + 2mn - n^2)}{(m^2 + n^2)^2} = \frac{c}{2a} = \cos A \end{aligned}\right\}; \quad . \qquad (5)$$

wegen $\alpha < 45^\circ$ folgt hieraus $4\alpha = A$, sodass $tg\,\frac{1}{4}A$ und $tg\,\frac{1}{4}B$ den rationalen Wert $\frac{n}{m}$ besitzen, also die Winkelhalbierenden nach Satz 2 rational sind.

Ausserdem ist

$$\left.\begin{aligned} a+b+c &= 2\,(m^2+n^2)^2+2\,(m^2-2mn-n^2)\,(m^2+2mn-n^2) \\ &= 2\,(m^4+2m^2n^2+n^4)+2\,(m^4-6m^2n^2+n^4) \\ &= 4\,(m^4-2m^2n^2+n^4)=4\,(m^2-n^2)^2 \end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad (6)$$

$$\left.\begin{aligned} a+b-c &= 2\,(m^2+n^2)^2-2\,(m^2-2mn-n^2)\,(m^2+2mn-n^2) \\ &= 2\,(m^4+2m^2n^2+n^4)-2\,(m^4-6m^2n^2+n^4)=16m^2n^2 \end{aligned}\right\} \quad . \quad (7)$$

und

$$h=\sqrt{a^2-\tfrac{1}{4}c^2}=\tfrac{1}{2}\sqrt{(a+b+c)\,(a+b-c)}=4mn\,(m^2-n^2)\,. \quad (8)$$

3. Das Dreieck ABC mit den Seiten

$$a=b=(m^2+n^2)^2 \quad \text{und} \quad c=2\,(-m^2+2mn+n^2)\,(m^2+2mn-n^2),$$

wo m und n positive rationale Zahlen mit $m>n$ und $-m^2+2mn+n^2>0$ bezeichnen, hat rationale Winkelhalbierenden. Dieses Dreieck hat eine Höhe $h=4mn\,(m^2-n^2)$, und genügt der Beziehung (4).

Beweis. Bezeichnet α den im ersten Quadranten liegenden Winkel mit $tg\,\alpha=\dfrac{m-n}{m+n}$, dann ist

$$tg\,2\alpha=\frac{2\,tg\,\alpha}{1-tg^2\,\alpha}=\frac{m^2-n^2}{2\,mn},$$

$$\cos 4\alpha=\frac{1-tg^2\,2\alpha}{1+tg^2\,2\alpha}=\frac{(2mn)^2-(m^2-n^2)^2}{(2mn)^2+(m^2-n^2)^2}$$

$$=\frac{(-m^2+2mn+n^2)\,(m^2+2mn-n^2)}{(m^2+n^2)^2}=\frac{c}{2a}=\cos A\,;$$

wegen $\alpha<45^\circ$ folgt hieraus $4\alpha=A$, sodass $tg\,\frac{1}{4}A$ und $tg\,\frac{1}{4}B$, also auch die Winkelhalbierenden rational sind.

Ersetzt man in (6), (7) und (8) c durch $-c$, so erhält man

$$a+b-c=4\,(m^2-n^2)^2 \quad ; \quad a+b+c=16\,m^2n^2 \quad ; \quad h=4mn\,(m^2-n^2).$$

4. In jedem primitiven Dreieck mit rationalen Winkelhalbierenden und mit $a=b$ können die Seiten auf die in (2) angegebene Gestalt gebracht werden, wo m und n zwei natürliche teilerfremde Zahlen verschiedener Parität mit $m>n$ bezeichnen.

Beweis. Die rationale Zahl $tg\,\frac{1}{4}\,A$ kann gleich $\dfrac{k}{h}$ gesetzt werden, wo

h und k positiv, ganz und teilerfremd sind mit $h > k$. Ersetzt man in (5) α durch $\frac{1}{4}A$, m durch h und n durch k, dann bekommt man

$$\frac{(h^2-2hk-k^2)(h^2+2hk-k^2)}{(h^2+k^2)^2}=\cos A=\frac{c}{2a},$$

sodass zwei natürliche teilerfremde Zahlen f und g mit

$$a=b=\frac{g}{h^4}\cdot\frac{(h^2+k^2)^2}{f} \text{ und } c=\frac{g}{h^4}\cdot\frac{2(h^2-2hk-k^2)(h^2+2hk-k^2)}{f}$$

existieren. Hierin sind a, b und c ganz. Da h und k, also auch h^4 und $(h^2+k^2)^2$ teilerfremd sind, ist h^4 ein Teiler von g, sodass $\frac{g}{h^4}$ eine natürliche Zahl ist. Die Zahlen f und g sind teilerfremd, sodass a, b und c durch $\frac{g}{h^4}$ teilbar sind. Aus der Voraussetzung, dass $\triangle ABC$ primitiv ist, folgt nun $\frac{g}{h^4}=1$, also

$$a=b=\frac{(h^2+k^2)^2}{f} \text{ und } c=\frac{2(h^2-2hk-k^2)(h^2+2hk-k^2)}{f}. \quad . \quad (9)$$

Hierin sind a, b und c ganz, sodass f ein Teiler von

$$2(h^2+k^2)^2-2(h^2-2hk-k^2)(h^2+2hk-k^2)=16h^2k^2$$

ist. Aber h^2+k^2 und hk sind teilerfremd (denn ein gemeinsamer Primfaktor p trete entweder in h, also in $(h^2+k^2)-h^2=k^2$, oder in k, also in $(h^2+k^2)-k^2=h^2$ als Faktor auf, sodass dann die teilerfremden Zahlen h und k einen Primfaktor p gemeinsam hätten), sodass f ein Teiler von 16 ist, also den Wert 1, 2, 4, 8 oder 16 hat.

Ist $f=1$, und ersetzt man h durch m, k durch n, dann geht (9) über in (2), wo m und n teilerfremde Zahlen mit $m > n$ bezeichnen; m und n haben verschiedene Parität, da sonst a gerade, also a, b und c durch 2 teilbar wären.

Hiermit ist der Beweis für den Fall mit $f=1$ geliefert, sodass wir weiter $f=2$, 4, 8 oder 16 annehmen dürfen. Dann ist h^2+k^2 gerade, sodass die zwei teilerfremden Zahlen h und k beide ungerade sind, h^2+k^2 durch 2, aber nicht durch 4, und $(h^2+k^2)^2$ durch 4, aber nicht durch 8 teilbar ist. Dass $f=8$ oder 16 ist, ist somit ausgeschlossen. Aber auch $f=2$ kann nicht, da dann a, b und c alle drei gerade wären. Folglich ist $f=4$. Setzt man nun $\frac{h+k}{2}=m$ und $\frac{h-k}{2}=n$, also $h=m+n$, $k=m-n$, dann sind m und n zwei natürliche, teilerfremde Zahlen mit $m > n$, und denn verwandelt (9) sich in (2); m und n sind dabei wiederum verschiedener Parität, da sonst a, b und c alle drei gerade wären.

Hiermit ist Satz 3 vollständig bewiesen.

Dieser Satz ergibt nicht nur die gleichschenkligen Dreiecke mit rationalen Seiten und rationalen Winkelhalbierenden, sondern auch die ungleichschenkligen mit dieser Eigenschaft. Denn es mögen ABC und $A'B'C'$ zwei solche primitive gleichschenklige Dreiecke mit den Seiten

$$a = b = u^2, \quad c = 2v, \quad a' = b' = u'^2, \quad c' = 2v'$$

und mit den Höhen $h = 24w$, $h' = 24w'$ bezeichnen. Durch Multiplikation mit $\frac{w}{d}$ und $\frac{w'}{d}$, wo d der grösste gemeinsame Teiler von w und w' ist, verwandeln diese zwei Dreiecke sich in die zwei Dreiecke mit den Seiten

$$\frac{w'}{d}u^2, \quad \frac{w'}{d}u^2, \quad 2\frac{w'}{d}v \quad \text{und} \quad \frac{w}{d}u'^2, \quad \frac{w}{d}u'^2, \quad 2\frac{w}{d}v',$$

die dieselbe Höhe $\frac{ww'}{d}$ besitzen. Werden diese zwei gleichschenkligen Dreiecke so auf einander gelegt, dass diese Höhen zusammenfallen, dann entstehen zwei neue Dreiecke mit den Seiten

$$\frac{w'}{d}u^2, \quad \frac{w}{d}u'^2, \quad \frac{w'v + wv'}{d} \quad \text{und} \quad \frac{w'}{d}u^2, \quad \frac{w}{d}u'^2, \pm\frac{w'v - wv'}{d}.$$

Im erstgenannten dieser neuen Dreiecke sind die Basiswinkel gleich A und B', sodass in diesem Dreieck die Winkelhalbierenden wegen der Rationalität von $tg\,\frac{1}{4}A$ und $tg\,\frac{1}{4}B'$ nach Satz 2 rational sind. Im zweiten der genannten neuen Dreiecke sind die Basiswinkel gleich A und $180^\circ - B'$, oder $180^\circ - A$ und B', sodass auch dieses Dreieck rationale Winkelhalbierenden hat. Umgekehrt findet man, abgesehen von einem rationalen Faktor, auf diese Art alle ungleichschenkligen Dreiecke $A^\star B^\star C^\star$ mit rationalen Seiten und rationalen Winkelhalbierenden. Denn wegen der Rationalität von $tg\,\frac{1}{4}A^\star$ existiert ein primitives gleichschenkliges Dreieck mit rationalen Winkelhalbierenden und mit Basiswinkel gleich $A^\star$ oder $180^\circ - A^\star$; gleichfalls existiert ein primitives gleichschenkliges Dreieck mit rationalen Winkelhalbierenden und mit Basiswinkel gleich $B^\star$ oder $180^\circ - B^\star$. Die obige Methode, auf diese zwei gleichschenkligen Dreiecke angewendet, ergibt ein Dreieck mit Basiswinkel gleich $A^\star$ und $B^\star$, das also $\sim \triangle A^\star B^\star C^\star$ ist.

In der folgenden Sitzung werde ich eine Tafel von allen nach wachsendem a geordneten primitiven Dreiecken ABC mit rationalen Winkelhalbierenden und mit $a = b < 160000$ veröffentlichen; die Anzahl dieser Dreiecke ist 63. Mittels der obigen Methode liest man aus dieser Tafel leicht viel mehr als 1000 verschiedene primitive ungleichschenklige Dreiecke mit rationalen Seiten und rationalen Winkelhalbierenden ab.