Mathematics. — *Über eine vierdimensionale Deutung der neuesten Feldtheorie.* Von J. A. SCHOUTEN und D. VAN DANTZIG. (Communicated by Prof. P. EHRENFEST.

(Communicated at the meeting of December 19, 1931.)

Einleitung.

In einer eben erschienenen Arbeit [1]) haben A. EINSTEIN und W. MAYER eine neue Feldtheorie entwickelt, deren Ausgangspunkt darin gelegen ist, dass jedem Punkte einer V_4 [2]) eine lokale R_5 [3]) zugeordnet wird, in welcher die lokale R_4 eingebettet ist. Im Gegensatz zu den bestehenden metrischen fünfdimensionalen Theorien wird aber die V_4 *nicht* in eine V_5 eingebettet. Wird nun neben der gewöhnlichen Übertragung der Vierervektoren eine Übertragung der Fünfervektoren über V_4 eingeführt, und stellt man für diese neue Übertragung folgende Forderungen auf:

1. Das invariante [4]) Differential des Fundamentaltensors in R_5 sei Null;
2. Wird ein Vektor der R_4 einmal nach der Vorschrift der einen, das andre Mal nach der Vorschrift der andren Übertragung pseudoparallel verschoben, so soll die Differenz der verschobenen Vektoren senkrecht zur R_4 sein; [5])
3. Diese Differenz soll verschwinden wenn die Übertragung in der Richtung des Vektors stattfindet, [6])

so ergibt sich eine Geometrie die einerseits die Feldgleichungen von Gravitation und Elektromagnetismus in zwangloser Weise zusammenfasst und anderseits geodätische Linien besitzt, die mit den Weltlinien geladener Teilchen zusammenfallen. Die Parameter der Übertragung der Fünfervektoren, die nicht durch die RIEMANNsche Übertragung in der V_4 bestimmt sind, hängen nur noch von einem Bivektor $F_{\lambda\mu}$ ab, der die Rolle des elektromagnetischen Bivektors spielt.

---

[1]) Einheitliche Theorie von Gravitation und Elektrizität, Sitzungsber. Berl. Akad. Bd. **25** (1931) S. 541—557. Herr EINSTEIN hatte die Freundlichkeit uns die Druckfahnen dieser Arbeit zur Einsicht zu überlassen.

[2]) X_n = n-dimensionale Mannigfaltigkeit; $V_n = X_n$ mit einer gewöhnlichen RIEMANNschen Geometrie. EINSTEIN und MAYER bezeichnen mit V_n was wir mit R_n bezeichnen.

[3]) R_n = in sich ebene V_n (d. h. V_n mit verschwindender Krümmungsgrösse).

[4]) Auch kovariantes Differential oder absolutes Differential genannt.

[5]) Man kann diese Bedingung auch so formulieren: Das invariante Differential in V_4 soll die Projektion des neuen invarianten Differentials auf die lokale R_4 sein. Eine solche Bedingung gilt bekanntlich auch für eine V_4 in V_5.

[6]) Eine solche Bedingung gilt dann und nur dann für eine V_4 in V_5, wenn die V_4 in V_5 geodätisch ist.

Es lässt zich zeigen, dass man dieselbe Theorie auch erhält wenn man ausgeht von einer X_5 mit einer metrischen aber *nicht symmetrischen* Geometrie in welcher der für die Übertragung längs der V_4 wesentliche Teil des Affinors der Asymmetrie $S_{\lambda\mu}^{\cdot\cdot\nu}$ mit den Indizes λ und μ in der V_4 und mit dem Index γ senkrecht zur V_4 liegt und also von der Form $F_{\lambda\mu}\, i^{\nu}$ ist, wo i^{ν} zur lokalen R_4 senkrecht und $F_{\lambda\mu}$ ein Bivektor der V_4 ist. Wird dann nachher die ganze V_5 bis auf die infinitesimalen R_5 in den Punkten der V_4 wegrasiert, so ergibt sich genau die neue Feldtheorie, deren Eigentümlichkeit den älteren fünfdimensionalen Theorien gegenüber also gerade darin besteht dass $S_{\lambda\mu}^{\cdot\cdot\nu}$ nicht Null ist.

Noch in anderer Weise lässt sich dieselbe Theorie ableiten indem man von einer gewöhnlichen V_5 mit einer Kongruenz von Bahnkurven einer Bewegung ausgeht und nachher die V_5 nach der Kongruenz „zusammenlegt", d.h. von jeder Kurve der Kongruenz alle Punkte identifiziert. $F_{\lambda\mu}$ ist hier die Grösse, die für die Anholonomität der auf der Kongruenz senkrechten lokalen R_4 massgebend ist. Wir behalten uns vor auf diese beiden Ableitungen an anderer Stelle ausführlicher zurück zu kommen.

In allen diesen Auffassungen spielt das Fünfdimensionale eine wesentliche Rolle. Zwar hat die neue EINSTEIN-MAYERsche Theorie den grossen Vorzug dass sie das physikalisch nicht interpretierbare fünfdimensionale Kontinuum fortrasiert hat, es bleiben aber die in den lokalen R_5 aus der V_4 hinauszeigenden Richtungen und auch diese sind dem vierdimensionalen Raum-Zeit-Kontinuum wesensfremd. Man möchte doch lieber mit einer rein vierdimensionalen Theorie auskommen.

Es ist Aufgabe dieser Arbeit zu zeigen, dass dies in ganz ungezwungener Weise möglich ist ohne das Resultat, das sind die neuen Feldgleichungen, zu verlieren. In der RIEMANNschen Geometrie ist die Abbildung benachbarter lokaler R_4 zunächst rein eine Abbildung von (freien) Vektoren. Man kann sie aber zu einer Punktabbildung erweitern indem man den Aufpunkt in den benachbarten Aufpunkt und die Masshyperfläche ($r^{\alpha} r^{\beta} g_{\alpha\beta} = 1$)[1]) in die benachbarte Masshyperfläche übergehen lässt. Wird dies analytisch gefasst, so muss eine Addition von Punkten benutzt werden, wie sie zuerst von MÖBIUS eingeführt wurde; jeder Punkt bekommt dabei ein Gewicht und somit insgesamt *fünf* Bestimmungszahlen. Nun fällt sofort auf, dass die Forderung der Invarianz der Masshyperfläche nicht aufgegeben werden kann ohne der Geometrie ihren typisch metrischen Charakter zu nehmen, dass aber dagegen die Forderung der Invarianz des Aufpunktes nebensächlich ist. Lässt man diese Forderung fallen und ersetzt man sie durch eine schwächere Forderung, deren einfachste geometrische Deutung ist, dass freie Vektoren (Punkte im Unendlichen mit Gewicht Null) wenigstens bei Übertragung in ihrer eignen Richtung in freie Vektoren und nicht in im Endlichen

[1]) r^{γ} = Radiusvektor vom Aufpunkt zu einem veränderlichen Punkt der lokalen R_4.

gelegene Punkte übergehen, so entsteht bei Festhaltung einer gewissen Symmetrieforderung eine Geometrie, die genau dasselbe leistet wie die EINSTEIN-MAYERsche, aber vollständig vierdimensional bleibt. In dieser Geometrie wird eine geladene Masse dargestellt durch eine „Hyperkugel" in der lokalen R_4 mit einem Radius, der dem Quotient $\frac{m}{e}$ proportional ist; die geodätischen Linien, die einem solchen Gebilde zugeordnet sind, fallen mit den wirklichen Weltlinien zusammen.

Die Abbildung benachbarter lokaler R_4 ist nicht mehr affin, sondern projektiv, und damit ordnet sich die neue Feldtheorie ein in eine Reihe von Untersuchungen über projektive Übertragungen, die seit 1921 von WEYL, CARTAN, SCHOUTEN, VEBLEN, J. M. THOMAS, T. Y. THOMAS, GOLAB, WHITEHEAD, HOFFMANN und V. DANTZIG veröffentlich wurden. [1]) Insbesondere ist hier den Arbeiten von VEBLEN [2]) und HOFFMANN [3]) zu gedenken, die eine Übertragung untersucht haben, die von beliebigen in den lokalen Mannigfaltigkeiten liegenden quadratischen Hyperflächen ausgeht und von welcher die hier betrachtete ein spezieller Fall ist. [4]) Eine Verallgemeinerung dieser VEBLENschen Übertragungen werden wir in einer demnächst zu veröffentlichenden Arbeit bringen.

§ 1. *Die projektive Übertragung.*

Die Koordinaten einer V_4 seien ξ^γ ($\alpha, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon, \theta, \iota = 1, \ldots, 4$). Der Fundamentaltensor sei $g_{\alpha\beta}$. Jedem Punkte ξ^γ der V_4 ist die lokale R_4 der $d\xi^\gamma$ zugeordnet, der Punkt ξ^γ heisse *Aufpunkt* seiner R_4. Wir betrachten die mit einem MÖBIUSschen "Gewicht" versehenen Punkte der lokalen R_4 und ordnen jedem solchen Punkte *fünf* Bestimmungszahlen v^ν ($\varkappa, \lambda, \mu, \nu, \varrho, \sigma, \tau, \omega = 0, 1, \ldots, 4$) zu, das Gewicht v^0 und vier Bestimmungszahlen v^γ, die dermassen gewählt sind, dass v^γ/v^0 die Bestimmungszahlen in Bezug auf die ξ^γ sind des Vektors der R_4, der sich vom Aufpunkt

---

[1]) Eine Uebersicht der einschlägigen Literatur bis 1929 findet sich bei J. A. SCHOUTEN und ST. GOLAB, Über projektive Übertragungen und Ableitungen, I Math. Zeitschr. **32** (1930) 192—214; II Annali di Matematica, (4) **8** (1931) 141—157. Eine Verallgemeinerung sämtlicher Theorien findet sich in einer demnächst in den Mathematischen Annalen erscheinenden Arbeit von D. VAN DANTZIG, Theorie des projektiven Zusammenhangs n-dimensionaler Räume. In dieser Arbeit wird die formale Sonderstellung des Index 0 durch Einführung homogener Urvariablen aufgehoben.

[2]) O. VEBLEN, A generalisation of the quadratic differential form, Quarterly Jn. of Math., **1** (1930) 60—76. O. VEBLEN and B. HOFFMANN, Projective relativity, Physical Review, **36** (1931) 810—822.

[3]) B. HOFFMANN, Projective relativity and the quantumfield, Physical Review, **37** (1931), 88—89.

[4]) Die Theorie von VEBLEN steht in naher Beziehung zu der Theorie von D. J. STRUIK und N. WIENER, die von einer nichthomogenen Wellengleichung ausgeht und in folgenden Arbeiten niedergelegt ist: Sur la théorie relativiste des quanta, C. R. Bd. **185** (1927) S. 42—44; A relativistic theory of quanta, Journ. of Math. and Phys. Bd. **8** (1927)

bis zum Punkte v^ν erstreckt. Aus der Punktrechnung ist bekannt, dass bei dieser Koordinatenwahl die Addition der Bestimmungszahlen mit der Punktaddition nach MÖBIUS korrespondiert und dass die Differenz zweier Punkte mit dem gleichen Gewicht $\varrho = v^0$ ein Punkt mit dem Gewicht Null im Unendlichen ist und sich mit dem mit ϱ multiplizierten freien Vektor, der sich zwischen den beiden Punkten legen lässt, identifizieren lässt. Die Bestimmungszahlen des Aufpunktes verschwinden bis auf die mit dem Index Null. Die Hyperebenen der lokalen R_4 werden ebenfalls mit einem Gewicht versehen. Eine Hyperebene bekommt ebenfalls fünf Bestimmungszahlen w_λ, von denen w_0 das Gewicht ist, während die anderen Koordinaten festgelegt sind durch die Forderung, dass bei Inzidenz von v^ν und w_λ die Überschiebung $v^\mu w_\mu$ verschwinden soll. Die Koordinaten der Hyperebene im Unendlichen verschwinden bis auf die mit dem Index Null. Kovariante Vektoren sind zu identifizieren mit Hyperebenen durch den Aufpunkt mit Gewicht Null. Ausgehend von den Punkten und Hyperebenen lassen sich jetzt *Projektoren* mit mehreren ko- oder kontravarianten Indizes definieren in derselben Weise wie dies mit gewöhnlichen Affinoren geschieht, wenn man von ko- und kontravarianten Vektoren ausgeht. Jeder gewöhnliche Affinor lässt sich auffassen als ein Projektor, dessen Bestimmungszahlen mit einem oder mehreren Indizes *0* alle verschwinden. Jeder Hyperfläche zweiten Grades in R_4 ist in bis auf das Gewicht eineindeutiger Weise ein kovarianter und ein kontravarianter Punkttensor der Valenz Zwei [1]) zugeordnet; der Masshyperfläche

$$g_{\alpha\beta}\, r^\alpha r^\beta = 1 \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

entsprechen insbesondere die Tensoren

$$\left.\begin{aligned} G_{00} &= -\tau; \quad G_{\alpha\beta} = \tau g_{\alpha\beta}; \quad G_{\alpha 0} = 0 \\ G^{00} &= -\frac{1}{\tau}; \quad G^{\alpha\beta} = \frac{1}{\tau} g^{\alpha\beta}; \quad G^{\alpha 0} = 0 \end{aligned}\right\} \qquad \ldots\ldots \quad (2)$$

Die Normierung, das ist die Wahl von τ, ist noch frei, *wir beschränken uns aber in dieser Arbeit auf die Wahl* $\tau = 1$. Ein Punkt v^ν liegt dann und nur dann auf der Masshyperfläche, wenn

$$v^\lambda v^\mu G_{\lambda\mu} = 0 \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (3)$$

ist, und zwar *unabhängig* von der Normierung.

Wir wollen jetzt eine Punktübertragung einführen, d.h. eine Vorschrift für die Abbildung benachbarter R_4 aufeinander. Ausser den üblichen Forderungen betreffs Linearität und Kontinuität stellen wir die

Forderung I. Die Masshyperfläche soll bei der Übertragung samt ihrer Normierung invariant sein.

---

1) Tensor = symmetrische Grösse; Valenz = Anzahl der Indizes.

Sind $\Gamma^{\nu}_{\lambda\mu}$ die Parameter der Übertragung, so folgt aus dieser Forderung für das invariante Differential $\delta G_{\lambda\mu}$ von $G_{\lambda\mu}$:

$$0 = \delta G_{\lambda\mu} = d\xi^{\beta} \nabla_{\beta} G_{\lambda\mu} = dg_{\lambda\mu} - \Gamma^{\nu}_{\lambda\beta} G_{\nu\mu} d\xi^{\beta} - \Gamma^{\nu}_{\lambda\beta} G_{\lambda\nu} d\xi^{\beta} \quad . \quad (4)$$

und daraus

$$\left.\begin{aligned} \Gamma^{\gamma}_{\alpha\beta} &= \left\{ {\gamma \atop \alpha\beta} \right\} + S_{\alpha\beta}{}^{\gamma} \\ \Gamma^{0}_{\alpha\beta} &= \Gamma^{\gamma}_{0\beta}\, g_{\gamma\alpha} = T_{\alpha\beta} \\ \Gamma^{0}_{0\beta} &= 0 \end{aligned}\right\} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (5)$$

in welchen Gleichungen $\left\{ {\gamma \atop \alpha\beta} \right\}$ das aus den $g_{\alpha\beta}$ abgeleitete CHRISTOFFEL-symbol zweiter Art und $S_{\alpha\beta}{}^{\gamma}$ einen beliebigen in $\alpha\beta$ alternierenden gewöhnlichen Affinor darstellt, und wo wir für $\Gamma^{0}_{\alpha\beta}$ die Schreibweise $T_{\alpha\beta}$ eingeführt haben, da $\Gamma^{0}_{\alpha\beta}$ ein gewöhnlicher Affinor ist. $\Gamma^{\nu}_{\lambda 0}$ ist nicht bestimmt und kann ohne Einschränkung der Allgemeinheit gleich 0 gesetzt werden. Die zweite Forderung sei:

Forderung II: $S_{\alpha\beta}{}^{\gamma}$ *sei Null.*

Kovariante Differentiation des Punktes v^{ν} ergibt

$$\left.\begin{aligned} \delta v^{\gamma} &= dv^{\gamma} + \Gamma^{\gamma}_{\alpha\beta} v^{\alpha} d\xi^{\beta} + T^{\gamma}_{\cdot\beta} v^{0} d\xi^{\beta} \\ \delta v^{0} &= dv^{0} + T_{\alpha\beta} v^{\alpha} d\xi^{\beta} \end{aligned}\right\} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (6)$$

wo der Index γ mittels $g^{\gamma\beta}$ heraufgezogen ist.

Bei pseudoparalleler Verschiebung ist also

$$\left.\begin{aligned} dv^{\gamma} &= -\Gamma^{\gamma}_{\alpha\beta} v^{\alpha} d\xi^{\beta} - T^{\gamma}_{\cdot\beta} v^{0} d\xi^{\beta} \\ dv^{0} &= -T_{\alpha\beta} v^{\alpha} d\xi^{\beta} \end{aligned}\right\} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (7)$$

sodass das Gewicht im allgemeinen nicht invariant bleibt. Ist also v^{ν} ein *Vektor*, d.h. ist $v^{0} = 0$, so braucht v^{0} nicht Null zu bleiben und ein Vektor geht also im Allgemeinen nicht in einen Vektor über, sondern in einen Punkt. Anders gesagt, die unendlichferne Ebene bildet sich bei der Übertragung im Allgemeinen ebensowenig wie der Aufpunkt auf sich selbst ab.

Wir wollen jetzt geodätische Linien definieren. Da Vektoren nicht mehr in Vektoren übergehen und ein Linienelement also nicht mehr in ein Linienelement, versagt die gewöhnliche Methode und wir müssen dem Linienelement zunächst einmal einen Punkt der lokalen R_4 zu ordnen. Wir fangen dazu mit einem Linienelement $d\xi^{\gamma}$ in einem beliebigen Anfangspunkt an. Ist ds die Länge von $d\xi^{\gamma}$, so erhält man eine hinreichend allgemeine Zuordnung vermöge einer Gleichung von der Form:

$$p^{0} = \varrho, \quad p^{\gamma} = \sigma \frac{d\xi^{\gamma}}{ds} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (8)$$

p^ν ist also durch $d\xi^\gamma$, ϱ und σ festgelegt. ϱ ist das Gewicht von p^ν und $\frac{\sigma}{\varrho}$ die Entfernung von p^ν vom Aufpunkt. p^ν sei jetzt pseudoparallel über $d\xi^\gamma$ verschoben:

$$\left.\begin{aligned} &(a) \quad dp^\gamma = -\Gamma^{\gamma}_{\alpha\beta}\, p^\alpha\, d\xi^\beta - \varrho F^{\gamma}_{\cdot\beta} d\xi^\beta - \varrho H^{\gamma}_{\cdot\beta}\, d\xi^\beta \\ &(b) \quad d\varrho = -H_{\alpha\beta}\, p^\alpha\, d\xi^\beta . \end{aligned}\right\} \quad . \; . \; . \quad (9)$$

In diesen Gleichungen ist $T_{\alpha\beta}$ in seinen symmetrischen und alternierenden Teil zerlegt:

$$F_{\alpha\beta} = T_{[\alpha\beta]}\,; \quad H_{\alpha\beta} = T_{(\alpha\beta)} . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (10)$$

Aus (9a) folgt, dass der Affinor $S_{\alpha\beta}^{\cdot\cdot\gamma}$, den wir Null gesetzt haben, sowieso aus der Gleichung verschwunden wäre. Eine leichte Rechnung führt von (9) zu den Gleichungen

$$\left.\begin{aligned} &(a) \quad \frac{d\varrho}{ds} = \sigma H_{\alpha\beta} \frac{d\xi^\alpha}{ds}\frac{d\xi^\beta}{ds} \\ &(b) \quad \frac{d\sigma}{ds} = \varrho H_{\alpha\beta} \frac{d\xi^\alpha}{ds}\frac{d\xi^\beta}{ds} \\ &(c) \quad \frac{d}{ds}\frac{\varrho}{\sigma} = \left(1 - \frac{\varrho^2}{\sigma^2}\right) H_{\alpha\beta} \frac{d\xi^\alpha}{ds}\frac{d\xi^\beta}{ds} \\ &(d) \quad \frac{d}{ds}(\sigma^2 - \varrho^2) = 0 \end{aligned}\right\} \quad , \; . \; . \; . \; . \; . \quad (11)$$

und zur Gleichung der geodätischen Linie:

$$\frac{d^2\xi^\gamma}{ds^2} + \Gamma^{\gamma}_{\alpha\beta}\frac{d\xi^\alpha}{ds}\frac{d\xi^\beta}{ds} + \frac{\varrho}{\sigma} F^{\gamma}_{\cdot\beta}\frac{d\xi^\beta}{ds} + \frac{\varrho}{\sigma} H_{\alpha\beta}\left(g^{\gamma\alpha} - \frac{d\xi^\gamma}{ds}\frac{d\xi^\alpha}{ds}\right)\frac{d\xi^\beta}{ds} = 0 \quad (12)$$

Soll diese Gleichung nun die Weltlinie eines geladenen Teilchens darstellen, so muss zunächst der letzte Term rechts verschwinden. Dazu ist notwendig und hinreichend, dass $H_{\alpha\beta}$ von der Form

$$H_{\alpha\beta} = H g_{\alpha\beta} \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (13)$$

ist. Ausserdem muss $\frac{\varrho}{\sigma}$ längs der Linie konstant und gleich $\frac{\varkappa e}{m}$ sein. Nun lehrt aber (11c) dass $\frac{\varrho}{\sigma}$ nur konstant ist, wenn entweder $1 - \frac{\varrho^2}{\sigma^2}$ oder H verschwindet. Die erste Möglichkeit scheidet aus, da man sonst $\frac{\varkappa e}{m}$ nur gleich $+1$ oder -1 wählen könnte; es ist also $H_{\lambda\mu} = 0$. Geometrisch ist dies gleichbedeutend mit jeder der folgenden vier Forderungen:

Forderung IIIa. Der geodätisch verschobene Aufpunkt soll zusammen mit dem neuen Aufpunkt eine Richtung bestimmen, die senkrecht zur Verschiebungsrichtung ist. (Vgl. Gleichung 9*a*).

Forderung IIIb. Das Gewicht eines jeden Punktes soll sich nicht ändern bei geodätischer Verschiebung in der dem Punkte selbst zugeordneten Richtung (11*a*).

Forderung IIIc. Die Entfernung eines beliebigen Punktes vom Aufpunkt soll sich nicht ändern bei geodätischer Verschiebung in der dem Punkte selbst zugeordnete Richtung (11c).

Forderung IIId. Ein Vektor soll bei geodätischer Verschiebung in seiner eigenen Richtung wieder in einen Vektor übergehen. (Diese Forderung ist sowohl in III*b* als in IIIc enthalten).

Die Weltlinie einer elektrisch geladenen Masse wird folgendermassen bestimmt: man wählt in der lokalen R_4 in der Verschiebungsrichtung in der Entfernung $\frac{m}{\varkappa e}$ einen Punkt, dessen Gewicht ϱ belanglos ist, und orientiert sich bei der Fortsetzung der Linie nach der geodätischen Verschiebung dieses Punktes. Da eine Masse sich aber in *allen* (zeitartigen) Richtungen verschieben lässt, lässt sie sich in jedem Punkte am besten darstellen durch die Hyperfläche mit den Gleichungen

$$g_{\alpha\beta}\, r^\alpha\, r^\beta = -\frac{m^2}{\varkappa^2 e^2} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (14)$$

in der lokalen R_4. Der für die Fortsetzung einer Weltlinie massgebende Punkt ist dann stets der Schnittpunkt dieser Hyperfläche mit einem Strahl in der Fortschreitungsrichtung.

Die Gleichungen der invarianten Ableitung lauten also jetzt für einen Punkt

$$\left.\begin{aligned} \nabla_\beta v^\gamma &= \partial_\beta v^\gamma + \Gamma^\gamma_{\alpha\beta} v^\alpha + F^\gamma_{.\beta} v^0, \\ \nabla_\beta v^0 &= \partial_\beta v^0 + F_{\alpha\beta} v^\alpha \\ \nabla_0 v^\nu &= 0 \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots \quad (15)$$

und für eine Hyperebene

$$\left.\begin{aligned} \nabla_\beta w_\alpha &= \partial_\beta w_\alpha - \Gamma^\gamma_{\alpha\beta} w_\gamma - F_{\alpha\beta} w_0 \\ \nabla_\beta w_0 &= \partial_\beta w_0 - F^\gamma_{.\beta} w_\gamma . \\ \nabla_0 w_\lambda &= 0 \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots \quad (16)$$

Für kontravariante *Vektoren*, d.h. Punkte mit $v^0 = 0$, $v^\gamma \neq 0$, lautet diese Ableitung also

$$\left.\begin{aligned} \nabla_\beta v^\gamma &= \partial_\beta v^\gamma + \Gamma^\gamma_{\alpha\beta} v^\alpha \\ \nabla_\beta v^0 &= F_{\alpha\beta} v^\alpha \\ \nabla_0 v^\nu &= 0 \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots \quad (17)$$

Daneben besteht für *Vektoren* noch die gewöhnliche RIEMANNsche Ableitung

$$\left.\begin{array}{l}\overset{R}{\nabla}_{;\beta} v^{\gamma} = \partial_{;\beta} v^{\gamma} + \Gamma^{\gamma}_{\alpha;\beta} v^{\alpha} , \\ \overset{R}{\nabla}_{;\beta} v^{0} = \overset{R}{\nabla}_{0} v^{\nu} = 0. \end{array}\right\} \quad \ldots\ldots \quad (18)$$

Wir wollen die Ableitung (17) im Gegensatz zur RIEMANNschen die *projektive* nennen. Aus (17, 11) folgt, dass die projektive Ableitung eines gewöhnlichen Affinors dann und nur dann der RIEMANNschen gleich ist, wenn alle ihre Bestimmungszahlen, die einen Index *0* tragen, verschwinden.

Dies ist dann und nur dann für *alle* Vektoren der Fall, wenn das elektromagnetische Feld $F_{\alpha;\beta}$ verschwindet. Die projektive Ableitung von $g_{\alpha\beta}$ verschwindet im allgemeinen nicht, im Gegensatz zur projektiven Ableitung von $G_{\lambda\mu}$ und zur RIEMANNschen Ableitung von $g_{\alpha\beta}$:

$$\left.\begin{array}{l}\nabla_{;\beta}\, g_{\alpha\gamma} = 0 \\ \nabla_{;\beta}\, g_{\alpha 0} = \nabla_{;\beta}\, g_{0\alpha} = - \Gamma^{\gamma}_{0;\beta}\, g_{\gamma\alpha} = - F_{\alpha;\beta} \\ \nabla_{;\beta}\, g_{00} = 0 \\ \nabla_{0}\, g_{\lambda\mu} = 0. \end{array}\right\} \quad \ldots \quad (19)$$

§ 2. *Krümmungsgrössen und Feldgleichungen.*

Bei zweimaliger Differentiation und Alternation eines Punktes ist

$$\nabla_{[\delta;\beta]}\, v^{\nu} = -{}^{1}/_{2}\, L_{\dot{\delta};\dot{\beta}\dot{\lambda}}{}^{\nu}\, v^{\lambda} \quad \ldots\ldots \quad (20)$$

wo

$$L_{\dot{\delta};\dot{\beta}\dot{\lambda}}{}^{\nu} = -2\, \partial_{[\delta}\, \Gamma^{\nu}_{|\lambda|;\beta]} - 2\, \Gamma^{\nu}_{\rho\,[\delta}\, \Gamma^{\rho}_{|\lambda|;\beta]} \quad \ldots\ldots \quad (21)$$

in $\delta\beta$ ein gewöhnlicher Affinor, in $\lambda\nu$ dagegen ein Projektor ist.

Schreiben wir $K_{\dot{\delta};\dot{\beta}\dot{\alpha}}{}^{\gamma}$ für die RIEMANNsche Krümmungsgrösse:

$$\overset{R}{\nabla}_{[\delta;\beta]}\, v^{\gamma} = -{}^{1}/_{2}\, K_{\dot{\delta}\dot{\beta}\dot{\alpha}}{}^{\gamma}\, v^{\alpha}, \quad \ldots\ldots\ldots \quad (22)$$

so sind die Beziehungen zwischen $L_{\dot{\delta};\dot{\beta}\dot{\lambda}}{}^{\nu}$ und $K_{\dot{\delta};\dot{\beta}\dot{\alpha}}{}^{\gamma}$ gegeben durch die Gleichungen

$$\left.\begin{array}{ll}(a) & L_{\dot{\delta}\dot{\beta}\dot{\alpha}}{}^{\gamma} = K_{\dot{\delta}\dot{\beta}\dot{\alpha}}{}^{\gamma} - 2\, F^{\gamma}_{.[\delta}\, F_{|\alpha|;\beta]}, \\ (b) & L_{\dot{\delta};\dot{\beta}\dot{\alpha}}{}^{0} = -2\, \overset{R}{\nabla}_{[\delta} F_{|\alpha|;\beta]}, \\ (c) & L_{\dot{\delta};\dot{\beta}\dot{0}}{}^{\gamma} = -2\, \overset{R}{\nabla}_{[\delta} F^{\gamma}_{.;\beta]} = L_{\dot{\delta};\dot{\beta}\dot{\alpha}}{}^{0}\, g^{\alpha\gamma}, \\ (d) & L_{\dot{\delta};\dot{\beta}\dot{0}}{}^{0} = -2\, F_{\alpha\,[\delta}\, F^{\alpha}_{.;\beta]}. \end{array}\right\} \quad \ldots\ldots \quad (23)$$

zwischen den durch Faltung entstehenden Grössen $K_{\beta\alpha} = K_{\dot{\delta}\beta\dot{\alpha}}{}^{\delta}$ und $L_{\beta\lambda} = L_{\dot{\delta}\dot{\beta}\dot{\lambda}}{}^{\delta}$ durch

$$\left.\begin{aligned} L_{\beta\alpha} &= K_{\beta\alpha} - F_{\dot{\beta}}{}^{\delta} F_{\alpha\delta}, \\ L_{\beta 0} &= -\overset{R}{\nabla}_{\delta} F^{\delta}_{\cdot\beta} \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (24)$$

und zwischen den durch Überschiebung mit $g_{\mu\nu}$ entstehenden Skalaren L und K durch

$$L = g^{\alpha\beta} L_{\beta\alpha} = K - F_{\alpha\beta} F^{\alpha\beta} \quad \ldots\ldots \quad (25)$$

Die Identität von BIANCHI lautet

$$\nabla_{[\varepsilon} L_{\dot{\delta}\beta]\dot{\lambda}}{}^{\nu} = 0. \quad \ldots\ldots\ldots \quad (26)$$

und daraus folgt

$$\nabla_{[\varepsilon} L_{\dot{\delta}\dot{\beta}]\dot{\alpha}}{}^{\gamma} = \overset{R}{\nabla}_{[\varepsilon} L_{\dot{\delta}\beta]\dot{\alpha}}{}^{\gamma} + F^{\gamma}_{\cdot[\varepsilon} L_{\dot{\delta}\beta]\dot{\alpha}}{}^{0} = 0. \quad \ldots\ldots \quad (27)$$

Aus (27) folgt durch Faltung nach ε und ν:

$$\nabla_{\varepsilon} L_{\dot{\delta}\dot{\beta}\dot{\lambda}}{}^{\varepsilon} + 2\nabla_{[\beta} L_{\delta]\lambda} = 0\,. \quad \ldots\ldots\ldots \quad (28)$$

und durch Überschiebung mit $g_{\gamma\delta}$:

$$\nabla_{\beta} L - 2\nabla_{\delta} L_{\dot{\beta}}{}^{\delta} = 0 \quad \ldots\ldots\ldots \quad (29)$$

Setzen wir nun mit EINSTEIN und MAYER [1])

$$L^{*}_{\mu\lambda} = L_{\mu\lambda} - {}^{1}/_{4}\, L g_{\mu\lambda} - {}^{1}/_{4}\, K g_{\mu\lambda} \quad \ldots\ldots \quad (30)$$

oder

$$\left.\begin{aligned} &(a) \quad L^{*}_{\alpha\beta} = L_{\alpha\beta} - {}^{1}/_{4}\,(L+K)\, g_{\alpha\beta} \\ &(b) \quad L^{*}_{\alpha 0} = -\overset{R}{\nabla}_{\delta} F^{\delta}_{\cdot\alpha}, \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (31)$$

so ist

$$\nabla_{\delta} L^{*}_{\mu\lambda} = \partial_{\delta} L^{*}_{\mu\lambda} - \Gamma^{\nu}_{\lambda\delta} L^{*}_{\mu\nu} - \Gamma^{\alpha}_{\mu\delta} L^{*}_{\alpha\lambda} \quad \ldots\ldots \quad (32)$$

oder

$$\left.\begin{aligned} \nabla_{\delta} L^{*}_{\beta\alpha} &= \overset{R}{\nabla} L^{*}_{\beta\alpha} + F_{\alpha\delta} \overset{R}{\nabla}_{\varepsilon} F^{\varepsilon}_{\cdot\beta} \\ \nabla_{\delta} L^{*}_{\beta 0} &= -\overset{R}{\nabla}_{\delta\alpha} F^{\alpha}_{\cdot\beta} - F^{\alpha}_{\cdot\delta} L^{*}_{\beta\alpha} \\ \nabla_{\delta} L^{*}_{0\alpha} &= -F_{\gamma\delta} L^{*\gamma}{}_{\alpha} \\ \nabla_{\delta} L^{*}_{00} &= F_{\gamma\delta} \overset{R}{\nabla}_{\alpha} F^{\alpha\gamma} \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots \quad (33)$$

---

[1]) Dort ist L^{*} mit U, L mit P, K mit R bezeichnet.

woraus folgt:

$$\left.\begin{aligned} &(a) \quad \nabla_\delta L^{*\delta}_{\cdot\,\alpha} = \overset{R}{\nabla}_\delta L^{*\delta}_{\cdot\,\alpha} + F_\alpha^{\cdot\,\delta} \overset{R}{\nabla}_\varepsilon F^{\varepsilon}_{\cdot\,\delta} \\ &\qquad\qquad = {}^3/_2 \overset{R}{\nabla}_{[\delta} F_{\beta\alpha]} F^{\delta\beta} \\ &(b) \quad \nabla_\delta L^{*\delta}_{\cdot\,0} = - \overset{R}{\nabla}_{\delta\gamma} F^{\gamma\delta} = 0 \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots \quad (34)$$

Die EINSTEIN-MAYERschen Feldgleichungen lauten in unserer Geometrie:

$$\left.\begin{aligned} &(a) \quad L^{*}_{\beta\lambda} = 0 \\ &(b) \quad L_{[\delta\beta\alpha]}{}^{0} = 0 \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (35)$$

(35*b*) ist infolge (23*b*) identisch mit dem zweiten MAXWELLschen System:

$$\overset{R}{\nabla}_{[\delta} F_{\beta\alpha]} = 0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (36$$

Zwischen den 18 Gleichungen (35) bestehen die 8 Identitäten (31*b*) und (34*a*). (34*b*) ist eine Folge von (31*b*). (35*a*) zerfällt in die Gravitationsgleichungen

$$K_{\beta\alpha} - {}^1/_2 K g_{\beta\alpha} + F_{\gamma\beta} F_\alpha^{\cdot\,\gamma} + {}^1/_4 F_{\gamma\delta} F^{\gamma\delta} g_{\alpha\beta} = 0 \quad \ldots \quad (37)$$

und das erste MAXWELLsche System

$$\overset{R}{\nabla}_\beta F^{\beta}_{\cdot\,\alpha} = 0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (38)$$

Es ist merkwürdig, dass man $g_{\lambda\mu}$ in (30) nicht durch $G_{\lambda\mu}$ ersetzen darf, da sonst $\overset{*}{L}_{00} = {}^1/_4 (R + K)$ wäre, was zu der unzuträglichen Gleichung

$$F_{\alpha\beta} F^{\alpha\beta} = 0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (39)$$

führen würde.

Die Beziehungen zwischen der VEBLENschen und der EINSTEIN-MAYERschen Theorie sollen in der oben angekündigten Arbeit erörtert werden.