Mathematics. — *Tafel der primitiven gleichschenkligen Dreiecke mit rationalen Winkelhalbierenden und mit Schenkeln kleiner als 160000.* Von J. G. VAN DER CORPUT.

(Communicated at the meeting of January 30, 1932.)

Ein Dreieck heisst primitiv, wenn die Längen der Seiten ganze Zahlen mit einem grössten gemeinsamen Teiler gleich 1 sind. In einer vorigen Mitteilung [1]) habe ich bewiesen:

Bezeichnen m und n zwei natürliche, teilerfremde Zahlen verschiedener Parität mit $m > n$, so ist das gleichschenklige Dreieck $A\,B\,C$ mit den Seiten

$$a = b = (m^2 + n^2)^2 \quad \text{und} \quad c = \pm\, 2\,(m^2 - 2mn - n^2)\,(m^2 + 2\,mn - n^2)$$

ein primitives Dreieck mit rationalen Winkelhalbierenden, und auf diese Art findet man alle gleichschenkligen primitiven Dreiecke mit rationalen Winkelhalbierenden.

Da 63 verschiedene Paare natürlicher teilerfremder Zahlen m und n verschiedener Parität mit $m > n$ und $m^2 + n^2 < 400$ existieren, gibt es 63 verschiedene primitive gleichschenklige Dreiecke mit rationalen Winkelhalbierenden und mit Schenkeln < 160000. Diese Dreiecke $D_1, D_2, \ldots, D_{63}$ (nach der Grösse des Schenkels geordnet) sind in der folgenden Tafel aufgenommen; hierin bezeichnet a den Schenkel, c die Basis, h die Höhe und A den Basiswinkel des Dreieckes. Zum Beispiel D_1 ist das primitive gleichschenklige Dreieck mit den Seiten 25. 25, 14 und mit der Höhe $24.1 = 24$; in diesem Dreieck haben die inneren bezw. äusseren Halbierenden der Basiswinkel die Längen

$$\frac{2\,bc}{b+c}\cos\tfrac{1}{2}A = \frac{2.25.14}{25+14}\cdot\frac{4}{5} = \frac{560}{39},$$

bezw.

$$\frac{2\,bc}{b-c}\sin\tfrac{1}{2}A = \frac{2.25.14}{25-14}\cdot\frac{3}{5} = \frac{420}{11}.$$

Bezeichnet qD_ν ($\nu = 1, 2, \ldots, 63$), wo q eine positive Zahl ist, das Dreieck, dessen Seiten q-mal so gross sind wie die Seiten von D_ν, dann haben die zwei Dreiecke $5\,D_1$ und D_2 dieselbe Höhe 5.24. Werden diese zwei Dreiecke so aufeinander gelegt, dass diese Höhen zusammenfallen, dann entstehen zwei neue Dreiecke, die ich mit $D_2 \pm 5\,D_1$ bezeichnen werde, mit den Seiten 169, 120 und 119 ± 35 und mit rationalen Winkel-

[1]) Diese Proceedings, **34**, S. 1390.

TAFEL

	m	n	$\sqrt{a}$	$^1/_2 c$	$^1/_{24} h$	$tg\ ^1/_4 A$	$\sqrt{a} \cos {}^1/_2 A$	$\sqrt{a} \sin {}^1/_2 A$
1	2	1	5	7	1	1 : 3	4	3
2	3	2	13	119	5	1 : 5	12	5
3	4	1	17	161	2. 5	1 : 4	15	8
4	4	3	25	527	2. 7	1 : 7	24	7
5	5	2	29	41	5. 7	2 : 5	21	20
6	6	1	37	1081	5. 7	1 : 6	35	12
7	5	4	41	1519	2. 3. 5	1 : 9	40	9
8	7	2	53	1241	3. 5. 7	2 : 7	45	28
9	6	5	61	3479	5. 11	1 : 11	60	11
10	7	4	65	2047	2. 7. 11	3 : 11	56	33
11	8	1	65	3713	2^2. 3. 7	1 : 8	63	16
12	8	3	73	721	2^2. 5. 11	3 : 8	55	48
13	9	2	85	4633	3. 7. 11	2 : 9	77	36
14	7	6	85	6887	7. 13	1 : 13	84	13
15	8	5	89	4879	2^2. 5. 13	3 : 13	80	39
16	9	4	97	959	2. 3. 5. 13	5 : 13	72	65
17	10	1	101	9401	3. 5. 11	1 : 10	99	20
18	10	3	109	4681	5. 7. 13	3 : 10	91	60
19	8	7	113	12319	2^2. 5. 7	1 : 15	112	15
20	11	2	125	11753	3. 11. 13	2 : 11	117	44
21	11	4	137	3281	2. 5. 7. 11	4 : 11	105	88
22	12	1	145	19873	2. 11. 13	1 : 12	143	24
23	9	8	145	20447	2^2. 3. 17	1 : 17	144	17
24	10	7	149	16999	5. 7. 17	3 : 17	140	51
25	11	6	157	10199	5. 11. 17	5 : 17	132	85
26	12	5	169	239	2. 5. 7. 17	7 : 17	120	119
27	13	2	173	24521	5. 11. 13	2 : 13	165	52
28	10	9	181	32039	3 5. 19	1 : 19	180	19
29	13	4	185	12593	2. 3. 13. 17	4 : 13	153	104
30	11	8	185	27727	2^2. 11. 19	3 : 19	176	57
31	12	7	193	19199	2. 5. 7. 19	5 : 19	168	95
32	14	1	197	37241	5. 7. 13	1 : 14	195	28

TAFEL (*Fortsetzung*).

	m	n	$\sqrt{a}$	$^1/_2\, c$	$^1/_{24}\, h$	$tg\, ^1/_4\, A$	$\sqrt{a}\, cos\, ^1/_2\, A$	$\sqrt{a}\, sin\, ^1/_2\, A$
33	13	6	205	6647	7. 13. 19	7 : 19	156	133
34	14	3	205	27913	7. 11. 17	3 : 14	187	84
35	14	5	221	9641	3. 5. 7. 19	5 : 14	171	140
36	11	10	221	47959	5. 7. 11	1 : 21	220	21
37	15	2	229	45241	5. 13. 17	2 : 15	221	60
38	13	8	233	32239	2^2. 5. 7. 13	5 : 21	208	105
39	15	4	241	29281	2. 5. 11. 19	4 : 15	209	120
40	16	1	257	64001	2^3. 5. 17	1 : 16	255	32
41	16	3	265	51793	2^3. 13. 19	3 : 16	247	96
42	12	11	265	69167	2. 11. 23	1 : 23	264	23
43	13	10	269	62839	5. 13. 23	3 : 23	260	69
44	14	9	277	50279	3. 5. 7. 23	5 : 23	252	115
45	16	5	281	27761	2^3. 5. 7. 11	5 : 16	231	160
46	15	8	289	31679	2^2. 5. 7. 23	7 : 23	240	161
47	17	2	293	76601	5. 17. 19	2 : 17	285	68
48	16	7	305	7327	2^3. 3. 7. 23	9 : 23	224	207
49	17	4	305	56033	2. 7. 13. 17	4 : 17	273	136
50	13	12	313	96719	2. 5^2. 13	1 : 25	312	25
51	14	11	317	89239	5^2. 7. 11	3 : 25	308	75
52	17	6	325	22393	11. 17. 23	6 : 17	253	204
53	18	1	325	103033	3. 17. 19	1 : 18	323	36
54	16	9	337	52319	2^3. 3. 5^2. 7	7 : 25	288	175
55	18	5	349	57001	3. 5. 13. 23	5 : 18	299	180
56	17	8	353	23359	2^2. 3. 5^2. 17	9 : 25	272	225
57	19	2	365	121673	7. 17. 19	2 : 19	357	76
58	14	13	365	131767	3^2. 7. 13	1 : 27	364	27
59	18	7	373	12121	3. 5^2. 7. 11	7 : 18	275	252
60	16	11	377	105679	2^3. 3^2. 5. 11	5 : 27	352	135
61	19	4	377	95921	2. 5. 19. 23	4 : 19	345	152
62	17	10	389	79879	3^2. 5. 7. 17	7 : 27	340	189
63	19	6	397	53641	5^2. 13. 19	6 : 19	325	228

halbierenden. Wie ich bewiesen habe [1]), ergibt jedes Paar der Dreiecke $D_1, D_2, \ldots, D_{63}$ auf diese Art zwei neue Dreiecke mit rationalen Winkelhalbierenden. Ich erwähne hier nur sechs Beispiele, wo c die Basis, h die Höhe bezeichnet.

	a	b	c	$^1/_{24}\,h$	$\cos {}^1/_2 A$	$\sin {}^1/_2 A$	$\cos {}^1/_2 B$	$\sin {}^1/_2 B$	$\cos {}^1/_2 C$	$\sin {}^1/_2 C$
D_2-5D_1	125	169	84	5	12 : 13	5 : 13	3 : 5	4 : 5	63 : 65	16 : 65
D_2+5D_1	125	169	154	5	12 : 13	5 : 13	4 : 5	3 : 5	56 : 65	33 : 65
$2D_2-D_3$	289	338	77	10	12 : 13	5 : 13	8 : 17	15 : 17	220 : 221	21 : 221
$2D_2+D_3$	289	338	399	10	12 : 13	5 : 13	15 : 17	8 : 17	171 : 221	140 : 221
D_7-3D_3	867	1681	1036	30	40 : 41	9 : 41	8 : 17	15 : 17	672 : 697	185 : 697
D_7+3D_3	867	1681	2002	30	40 : 41	9 : 41	15 : 17	8 : 17	455 : 697	528 : 697

[1]) Diese Proceedings, **34**, S. 1394.

Mathematics. — *On the Solution of the Matrix Equation $AX + XB = C$.* By D. E. RUTHERFORD. (Communicated by Prof. R. WEITZENBÖCK).

(Communicated at the meeting of January 30, 1932.)

I. In this problem A, B and C are given matrices and it is required to find X, or rather, to find the elements of X in terms of the elements of A, B and C. A solution is possible only if A and B are square matrices, let us say of orders n and m respectively, and when C is a conformable matrix of n rows and m columns. It follows that X also must have n rows and m columns.

When $PX = XQ$, X is called a *commutant* of P and Q, and is often written $X = (P, Q)$. It is a fundamental fact that this commutant can only be the null matrix, unless the matrices P and Q have at least one latent root in common. When common latent roots appear, then the general X is nonzero and contains arbitrary parameters. (Cf. e. g. TURNBULL and AITKEN, *Canonical Matrices*, (Glasgow, 1932) Chap. X). As may be suspected, our problem presents similar features. If $C = 0$, then evidently $X = (A, -B)$ is the commutant of A and $-B$, two matrices whose latent roots will be denoted by λ_i, $-\mu_j$. Uniqueness or otherwise of the solution X will depend on whether λ_i is equal to $-\mu_j$ or not; in the case of uniqueness (IV below) when $\lambda_i + \mu_j = 0$, X will however, not be zero.