Mathematics. — *Eine Abbildung des Strahlraumes auf die Parabeln einer festen Ebene.* Von JAN DE VRIES.

(Communicated at the meeting of February 27, 1932.)

1. Die Strahlen des Raumes sollen durch Zentralprojektion aus dem Zentrum O auf die Bildebene ω abgebildet werden; S sei die *Spur*, F der *Fluchtpunkt* der Geraden g. Als *Bild* von g werde die *Parabel* γ betrachtet, deren *Scheitel* der Punkt S, deren *Brennpunkt* F ist. Offenbar bestimmt eine Parabel von ω eine Gerade g des Raumes.

Einem Strahlenbüschel (g) entspricht ersichtlich ein System von Parabeln, deren Scheitel eine gerade Punktreihe, deren Brennpunkte eine zweite Punktreihe bilden, welche der ersten Reihe ähnlich ist. Indem die Träger der beiden Reihen parallel sind, bilden die Achsen der Parabeln einen Strahlenbüschel. Die Leitlinien der Parabeln sind Tangenten einer Parabel, deren Brennpunkt das Zentrum dieses Strahlenbüschels ist.

2. Wenn der Mittelpunkt M des Büschels (g) in ω liegt, so ist M Scheitel sämmtlicher Parabeln, indes die Brennpunkte eine gerade Punktreihe bilden.

Enthält aber die Ebene des Büschels (g) den Punkt O, so liegt M auf dem Träger der Punktreihe (F); das Bild von (g) ist alsdann der Büschel der Parabeln, welche sich in M berühren.

Im allgemeinen enthält ein *Büschel von Parabeln* eine Figur, welche aus einer endlichen und der unendlich fernen Geraden besteht.

Demnach hat ein Büschel (γ) eine Gleichung der Form

$$y^2 - 2px + 2\lambda (ax + by + c) = 0.$$

Der Ort der Scheitel wird dargestellt durch

$$y^2 + 2abxy + 2b^2 px + 2bcy = 0,$$

der Ort der Brennpunkte durch

$$(a^2 - 1)\, y^2 - 2abxy + 2(ap - c)\, by - 2b^2 px + b^2 p^2 = 0.$$

Hieraus erhellt, dass (γ) das Bild einer *quadratischen Regelschar* ist.

3. Eine Schar *konfokaler* Parabeln ist das Bild eines Büschels paralleler Geraden, dessen Ebene das Zentrum O enthält.

Wenn die Ebene eines Büschels paralleler Strahlen den Punkt O nicht enthält, so besteht das Bild des Büschels aus einem System von Parabeln mit gemeinsamem Brennpunkt, indes die Scheitel eine gerade Punktreihe bilden.

Bilden die Scheitel und die Brennpunkte eines Systems von Parabeln zwei projektive Punktreihen, so hat man das Bild einer *paraboloidischen Regelschar* mit einer in ω liegenden Leitgeraden.

4. Eine weniger einfache Abbildung ergibt sich, wenn man die Parabel γ durch die Figur ihres Brennpunktes F und ihrer Leitlinie d ersetzt. Es sei Ω^2 eine quadratische Fläche, O ein Punkt ausserhalb ω. Die Polarebene von F in Bezug auf Ω^2 trifft die Ebene $O\,d$ in der Geraden g, welche in γ wird abgebildet. Umgekehrt trifft die Polare einer Geraden g die Bildebene in F, indes d ihre Projektion aus O ist.

Mathematics. — *Über die Matrixgleichung* $X^2 = A$.
Von R. WEITZENBÖCK.

(Communicated at the meeting of February 27, 1932).

§ 1.

FROBENIUS hat gezeigt, wie man aus einer nicht-singulären Matrix $A = \| a_i^k \|$ die Quadratwurzel ziehen, d.h. die Matrixgleichung $X^2 = A$ auflösen kann [1]). Sind $a, b, \ldots (\neq 0)$ die verschiedenen Eigenwerte von A und ist

$$\psi(\lambda) = (\lambda - a)^{\alpha}\,(\lambda - b)^{\beta} \ldots = 0. \qquad (1)$$

die zu A gehörige Minimalgleichung (d.h. die Gleichung niedrigsten Grades, der A genügt), sind ferner $F(\lambda), G(\lambda), \ldots$ gegebene Polynome in λ, so verschafft man sich leicht ein Polynom

$$\chi(\lambda) = A(\lambda)\,.\,\frac{\psi(\lambda)}{(\lambda - a)^{\alpha}} + B(\lambda)\,.\,\frac{\psi(\lambda)}{(\lambda - b)^{\beta}} + \ldots \qquad (2)$$

mit der Eigenschaft:

$$\left.\begin{array}{l} \chi(a) = F(a)\;,\;\chi'(a) = F'(a), \ldots \chi^{(\alpha-1)}(a) = F^{(\alpha-1)}(a) \\ \chi(b) = G(b)\;,\;\chi'(b) = G'(b), \ldots \chi^{(\beta-1)}(b) = G^{(\beta-1)}(b) \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{array}\right\} \qquad (3)$$

Die Entwicklungen von $\chi(\lambda)$ und $F(\lambda)$ nach Potenzen von $\lambda - a$ stimmen also in den ersten α Gliedern überein; ebenso die von $\chi(\lambda)$ und $G(\lambda)$ nach Potenzen von $\lambda - b$ in den ersten β Gliedern u.s.f. Die

[1]) G. FROBENIUS, Berliner Ber. (1896), p. 7—16. Vgl. z.B. auch M. BÔCHER, Einführung in die höhere Algebra, Teubner (1910), p. 322.