$U + iV = \omega(t) + it$ angewendet, ist dann für jedes $t \geqq 0$ und jedes positive in G^* liegende u

$$\chi^*(u) \leqq \frac{2\,\omega(t)}{\sqrt{u^2+t^2}\cdot\sqrt{(u+\omega(t))^2+t^2}}, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (10)$$

also

$$\int_t^{2t} \chi^*(u)\,du \geqq \frac{2\omega(t)}{\sqrt{(2t)^2+t^2}\cdot\sqrt{(2t+\omega(t))^2+t^2}} \int_t^{2t} du = \frac{2}{\sqrt{5}} \frac{\omega(t)}{\sqrt{(2t+\omega(t))^2+t^2}}.$$

Das Integral linkerhand strebt, wegen der Konvergenz des in (9) vorkommenden Integrals, bei unbeschränkt wachsendem t nach Null. Folglich strebt auch die rechte Seite nach Null, woraus hervorgeht $\frac{\omega(t)}{t} \rightarrow 0$ für $t \rightarrow \infty$, sodass $\omega(t) \leqq t$ für hinreichend grosses t, also $\omega(t) \leqq u + t$ für hinreichend grosses u ist. Wegen (10) hat man nun für hinreichend grosses u

$$\chi^*(u) \geqq \underset{0 \leqq t \leqq u}{Max} \frac{2\omega(t)}{\sqrt{u^2+u^2}\cdot\sqrt{(u+u+u)^2+u^2}} = \frac{1}{\sqrt{5}} \frac{1}{u^2} \underset{0 \leqq t \leqq u}{Max}\ \omega(t).$$

Da das Integral in (9) konvergiert, konvergiert also auch das in (3) auftretende Integral, sodass die Voraussetzungen von Satz 2 erfüllt sind, also Satz 1 aus Satz 2 folgt.

Mathematics. — *Einige Ungleichungen bei bestimmten Integralen.* Von J. G. VAN DER CORPUT.

(Communicated at the meeting of April 2, 1932.)

Satz 1: *Ist im Intervall $a < u < b$ (a darf $-\infty$ und b darf $+\infty$ sein) die Funktion $f(u)$ monoton nicht-abnehmend und $\geqq 0$, und haben in diesem Intervall $g(u)$ und $k(u)$ integrierbare Derivierten mit*

$$g(u) \geqq 0, \quad g'(u) \geqq 0, \quad \lim_{u \rightarrow b} k(u) = 0, \quad k'(u) \leqq 0, \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

dann ist

$$\int_a^b f(u)\,g'(u)\,k(u)\,du \leqq -\int_a^b (\underset{u \leqq q < b}{Min} f(q)\,g(q))\,k'(u)\,du,$$

falls das letzte Integral existiert.

Vorbemerkung : Mit $\underset{u \leqq q < b}{Min}\ f(q)\, g(q)$, bezw. $\underset{u \leqq q < b}{Max}\ f(q)\, g(q)$ wird die untere, bezw. obere Schranke von $f(q)\, g(q)$ im Intervall $u \leqq q < b$ gemeint.

Beweis : Im Intervall (a, b) ist für jedes Zahlenpaar q und u mit $q \geqq u$

$$f(q)\, g(q) \geqq f(q) \int_a^q g'(t)\, dt \geqq \int_a^q f(t)\, g'(t)\, dt \geqq \int_a^u f(t)\, g'(t)\, dt,$$

also

$$\underset{u \leqq q < b}{Min}\ f(q)\, g(q) \geqq \int_a^u f(t)\, g'(t)\, dt,$$

mithin

$$-\int_a^b (\underset{u \leqq q < b}{Min}\ f(q)\, g(q))\, k'(u)\, du \geqq -\int_a^b k'(u)\, du \int_a^u f(t)\, g'(t)\, dt$$

$$= -\int_a^b f(t)\, g'(t)\, dt \int_t^b k'(u)\, du = \int_a^b f(t)\, g'(t)\, k(t)\, dt.$$

Satz 2 : *Ist im Intervall $a < u < b$ (a darf $-\infty$ und b darf $+\infty$ sein) $f(u)$ monoton nicht-zunehmend und $\geqq 0$, und haben in diesem Intervall die Funktionen $g(u)$ und $k(u)$ integrierbare Derivierten mit*

$$\lim_{u \to a} g(u) = 0, \quad g'(u) \geqq 0, \quad k(u) \geqq 0, \quad k'(u) \leqq 0, \ldots \quad (2)$$

dann ist

$$-\int_a^b (\underset{a < q \leqq u}{Max}\ f(q)\, g(q))\, k'(u)\, du \leqq \int_a^b f(u)\, g'(u)\, k(u)\, du,$$

falls das letzte Intergral existiert.

Beweis : Man ersetze im Beweis von Satz 1 das Zeichen $\geqq$ durch $\leqq$, auszer dem ersten Zeichen $\geqq$, das durch das Gleichheitszeichen zu ersetzen ist ; überdies ersetze man das letzte Gleichheitszeichen in Beweis von Satz 1 durch $\leqq$, und schliesslich noch

$$\underset{u \leqq q < b}{Min} \quad \text{durch} \quad \underset{a < q \leqq u}{Max}\ .$$

Satz 3: *Ist im Intervall $a < u < b$ (a darf $-\infty$ und b darf $+\infty$ sein) $f(u)$ monoton nicht-zunehmend und $\geqq 0$, und haben in diesem Intervall $g(u)$ und $k(u)$ integrierbare Derivierten mit*

$$g(u) \geqq 0, \quad g'(u) \leqq 0, \quad \lim_{u \to a} k(u) = 0, \quad k'(u) \geqq 0, \quad . \quad . \quad . \quad (3)$$

dann ist

$$-\int_a^b f(u)\, g'(u)\, k(u)\, du \leqq \int_a^b \left(\operatorname*{Min}_{a < q \leqq u} f(q)\, g(q)\right) k'(u)\, du,$$

falls das letzte Integral existiert.

Beweis: Wird

$$u = a + b - U, \quad q = a + b - Q, \quad f(u) = F(U), \quad g(u) = G(U), \quad k(u) = K(U) \quad (4)$$

gesetzt, dann ist nach Satz 1

$$-\int_a^b f(u)\, g'(u)\, k(u)\, du = \int_a^b F(U)\, G'(U)\, K(U)\, dU$$

$$= -\int_a^b \left(\operatorname*{Min}_{U \leqq Q < b} F(Q)\, G(Q)\right) K'(U)\, dU = \int_a^b \left(\operatorname*{Min}_{a < q \leqq u} f(q)\, g(q)\right) k'(u)\, du.$$

Satz 4: *Ist im Intervall $a < u < b$ (a darf $-\infty$ und b darf $+\infty$ sein) $f(u)$ monoton nicht-abnehmend und $\geqq 0$, und haben in diesem Intervall $g(u)$ und $k(u)$ integrierbare Derivierten mit*

$$\lim_{u \to b} g(u) = 0, \qquad g'(u) \leqq 0, \qquad k(u) \geqq 0, \qquad k'(u) \geqq 0, \quad . \quad . \quad (5)$$

dann ist

$$\int_a^b \left(\operatorname*{Max}_{u \leqq q < b} f(q)\, g(q)\right) k'(u)\, du \leqq -\int_a^b f(u)\, g'(u)\, k(u)\, du,$$

falls das letzte Integral existiert.

Beweis: Werden U, Q, F, G und K durch (4) definiert, dann ist nach Satz 2

$$\int_a^b \left(\operatorname*{Max}_{u \leqq q < b} f(q)\, g(q)\right) k'(u)\, du = -\int_a^b \left(\operatorname*{Max}_{a < Q \leqq U} F(Q)\, G(Q)\right) K'(U)\, dU$$

$$\leqq \int_a^b F(U)\, G'(U)\, K(U)\, dU = -\int_a^b f(u)\, g'(u)\, k(u)\, du.$$

Satz 5: *Es sei im Intervall $a < u < b$ (a darf $-\infty$ und b darf $+\infty$ sein) $F(u) \geq 0$, und es mögen in diesem Intervall $g(u)$ und $k(u)$ integrierbare Derivierten besitzen.*

Gilt stets (1), dann ist

$$\int_a^b (\underset{u \leqq q < b}{Min} F(q))\, g'(u)\, k(u)\, du \leqq -\int_a^b (\underset{u \leqq q < b}{Min} F(q)\, g(q))\, k'(u)\, du\,; \tag{6}$$

gilt stets (2), dann ist

$$-\int_a^b (\underset{a < q \leqq u}{Max} F(q)\, g(q))\, k'(u)\, du \leqq \int_a^b (\underset{u \leqq q < b}{Max} F(q))\, g'(u)\, k(u)\, du\,; \tag{7}$$

gilt stets (3), dann ist

$$-\int_a^b (\underset{a < q \leqq u}{Min} F(q))\, g'(u)\, k(u)\, du \leqq \int_a^b (\underset{a < q \leqq u}{Min} F(q)\, g(q))\, k'(u)\, du, \tag{8}$$

und gilt stets (5), dann ist

$$\int_a^b (\underset{u \leqq q < b}{Max} F(q)\, g(q))\, k'(u)\, du \leqq -\int_a^b (\underset{a < q \leqq u}{Max} F(q))\, g'(u)\, k(u)\, du, \tag{9}$$

jedesmal natürlich unter der Voraussetzung, dass das rechterhand auftretende Integral existiert.

Beweis: Man wende

Satz 1 mit $f(u) = \underset{u \leqq q < b}{Min} F(q)$; Satz 2 mit $f(u) = \underset{u \leqq q < b}{Max} F(q)$;

Satz 3 mit $f(u) = \underset{a < q \leqq u}{Min} F(q)$; Satz 4 mit $f(u) = \underset{a < q \leqq u}{Max} F(q)$

an.

Satz 6: *Es mögen die Funktionen $f(u)$, $g(u)$, $h(u)$ und $k(u)$ im Intervall $a < u < b$ (a darf $-\infty$ und b darf $+\infty$ sein) so gewählt werden, dass $g(u)$, $h(u)$ und $k(u)$ integrierbare Ableitungen besitzen, und*

$$f(u) \geqq 0,\ \lim_{u \to a} g(u) = 0,\ g'(u) \geqq 0,\ \lim_{u \to b} h(u) = 0,\ h'(u) \leqq 0,\ k(u) \geqq 0$$

ist.

Behauptungen : 1. *Ist stets $k'(u) \geqq 0$, dann ist*

$$\int_a^b (\operatorname*{Max}_{u \leqq q < b} f(q) g(q) h(q)) k'(u)\, du \leqq -\int_a^b (\operatorname*{Max}_{u \leqq q < b} f(q)) g'(u)\, du \int_u^b h'(t) k(t)\, dt,$$

angenommen, dass das Integral rechterhand existiert.

2. *Ist stets $k'(u) \leqq 0$, dann ist*

$$-\int_a^b (\operatorname*{Max}_{a < q \leqq u} f(q) g(q) h(q)) k'(u)\, du \leqq -\int_a^b (\operatorname*{Max}_{a < q \leqq u} f(q)) h'(u)\, du \int_a^u g'(t) k(t)\, dt,$$

vorausgesetzt, dass das rechts auftretende Integral existiert.

Beweis : 1. Es sei stets $k'(u) \geqq 0$. Ersetzt man $g(u)$ durch $h(u)$, dann gilt (5), sodass nach (9), mit $F(u) = f(u)\, g(u)$ angewendet,

$$\left.\begin{aligned} &\int_a^b (\operatorname*{Max}_{u \leqq q < b} f(q)\, g(q)\, h(q))\, k'(u)\, du \leqq \\ &-\int_a^b (\operatorname*{Max}_{a < q \leqq u} f(q)\, g(q))\, h'(u) k(u)\, du \end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (10)$$

ist. Ersetzt man $k(u)$ durch

$$-\int_u^b h'(t)\, k(t)\, dt,$$

dann wird $k'(u)$ durch $h'(u)\; k(u)$ ersetzt, und dann gilt (2), sodass nach (7), mit $F(u) = f(u)$ angewendet,

$$\left.\begin{aligned} &-\int_a^b (\operatorname*{Max}_{a < q \leqq u} f(q)\, g(q))\, h'(u)\, k(u)\, du \leqq \\ &-\int_a^b (\operatorname*{Max}_{u \leqq q < b} f(q)) g'(u) du \int_u^b h'(t)\, k(t)\, dt \end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad (11)$$

ist. Aus (10) und (11) folgt die erste Behauptung von Satz 6.

2. Es sei stets $k'(u) \leq 0$. Dann gilt (2), sodass nach (7), mit $F(u) = f(u)\, h(u)$ angewendet,

$$\left.\begin{array}{l} -\displaystyle\int_a^b \Big(\mathop{Max}_{a<q\leq u} f(q)\, g(q)\, h(q)\Big)\, k'(u)\, du \leq \\[2ex] \displaystyle\int_a^b \Big(\mathop{Max}_{u\leq q<b} f(q)\, h(q)\Big)\, g'(u)\, k(u)\, du \end{array}\right\} \quad \ldots\ldots \quad (12)$$

ist. Ersetzt man $g(u)$ durch $h(u)$, und $k(u)$ durch

$$\int_a^u g'(t)\, k(t)\, dt,$$

dann wird $k'(u)$ durch $g'(u)\, k(u)$ ersetzt, und dann gilt (5), sodass nach (9), mit $F(u) = f(u)$ angewendet,

$$\left.\begin{array}{l} \displaystyle\int_a^b \Big(\mathop{Max}_{u\leq q<b} f(q)\, h(q)\Big)\, g'(u)\, k(u)\, du \leq \\[2ex] -\displaystyle\int_a^b \Big(\mathop{Max}_{a<q\leq u} f(q)\Big)\, h'(u)\, du \int_a^u g'(t)\, k(t)\, dt \end{array}\right\} \quad \ldots\ldots \quad (13)$$

ist. Aus (12) und (13) folgt die zweite Behauptung von Satz 6.

Satz 7 : *Es seien c und β positiv; es sei $\omega(u) \geq 0$ für $u > c$, und es bezeichne $k(u)$ für $u > c$ eine positive Funktion mit integrierbarer Ableitung.*

Behauptungen. 1. *Ist für $u > c$ stets $k'(u) \geq 0$ und $u^{\beta}\omega(u)$ monoton nicht-abnehmend, dann ist*

$$\int_c^{\infty} \Big(\mathop{Max}_{q\leq u} \omega(q)\Big)\, k'(u)\, du \leq \beta \int_c^{\infty} \frac{\omega(u)}{u}\, k(u)\, du, \quad \ldots \quad (14)$$

falls das letzte Integral existiert.

2. *Ist für $u > c$ stets $k'(u) \geq 0$ und $\dfrac{\omega(u)}{u^{\beta}}$ monoton nicht-zunehmend, und auszerdem $\dfrac{\omega(u)}{u^{\beta}}\, k'(u)$ im Intervall $c < u \leq 2c$ integrierbar, dann ist*

$$\left.\begin{array}{l} \displaystyle\int\limits_c^\infty \left(\operatorname*{Max}_{q \geqq u} \omega(q)\right) k'(u)\, du \leqq \\[2ex] \displaystyle\qquad (\beta+1)\int\limits_c^\infty \frac{\omega(u)}{u^3 k(u)\left(\displaystyle\int\limits_u^\infty \frac{dt}{t^2 k(t)}\right)^2}\, du + c^\beta \int\limits_c^\infty \frac{\omega(u)}{u^\beta} k'(u)\, du, \end{array}\right\} \quad (15)$$

falls das erste Integral rechterhand existiert (das Schlussintegral existiert dann auch).

3. *Ist für $u > c$ stets $k'(u) \leqq 0$ und $\dfrac{\omega(u)}{u^\beta}$ monoton nicht-zunehmend, dann ist*

$$-\int\limits_c^\infty \left(\operatorname*{Max}_{c < q \leqq u} \omega(q)\right) k'(u)\, du \leqq \beta \int\limits_c^\infty \frac{\omega(u)}{u} k(u)\, du + \omega(c)\, k(c), \quad . \quad . \quad (16)$$

falls das Integral rechterhand existiert (mit $\omega(c)\, k(c)$ wird der Grenzwert $\lim\limits_{u \to c} \omega(u)\, k(u)$ gemeint, der eldlich vorausgesetzt wird).

4. *Ist für $u > c$ stets $k'(u) \leqq 0$ und $u^\beta \omega(u)$ monoton nicht-abnehmend, dann ist*

$$-\int\limits_c^\infty \left(\operatorname*{Max}_{c < q \leqq u} \omega(q)\right) k'(u)\, du \leqq (\beta+1) \int\limits_c^\infty \frac{u\,\omega(u)}{k(u)\left(\dfrac{c}{k(c)} + \displaystyle\int\limits_c^u \frac{dt}{k(t)}\right)^2}\, du, \quad (17)$$

vorausgesetzt, dass das letzte Integral existiert.

Vorbemerkung: Jede dieser vier Behauptungen liefert insbesondere die Existenz des linkerhand auftretenden Integrales.

Beweis: 1. Aus Satz 4, mit

$$a = c, \quad b = \infty, \quad f(u) = u^\beta \omega(u) \quad \text{und} \quad g(u) = u^{-\beta}$$

angewendet, folgt (14).

2. Die erste Behauptung von Satz 6, mit

$$a = c,\ b = \infty,\ f(u) = \frac{\omega(u)}{u^\beta},\ g(u) = \frac{u^\beta - c^\beta}{\displaystyle\int\limits_u^\infty \frac{dt}{t^2 k(t)}} \quad \text{und} \quad h(u) = \int\limits_u^\infty \frac{dt}{t^2 k(t)}$$

angewendet, gibt

$$\left.\begin{aligned}\int_c^\infty \left(\underset{q \geqq u}{Max}\ \omega(q)\frac{q^\beta - c^\beta}{q^\beta}\right).k'(u)\,du &\leqq \int_c^\infty \frac{\omega(u)}{u^\beta}\,.\,g'(u)\,du \int_u^\infty \frac{dt}{t^2} \\ &= \int_c^\infty \frac{\omega(u)}{u^{\beta+1}}\,g'(u)\,du.\end{aligned}\right\} . \quad (18)$$

Wegen

$$\int_u^\infty \frac{dt}{t^2\,k(t)} \leqq \frac{1}{k(u)} \int_u^\infty \frac{dt}{t^2} = \frac{1}{u\,k(u)}$$

ist

$$g'(u) = \frac{\beta\,u^{\beta-1}}{\int_u^\infty \frac{dt}{t^2\,k(t)}} + \frac{u^\beta - c^\beta}{\left(\int_u^\infty \frac{dt}{t^2\,k(t)}\right)^2}\cdot\frac{1}{u^2\,k(u)}$$

$$< (\beta+1)\frac{u^{\beta-2}}{k(u)\left(\int_u^\infty \frac{dt}{t^2\,k(t)}\right)^2},$$

sodass aus (18) folgt

$$\int_c^\infty \left(\underset{q \geqq u}{Max}\ \omega(q)\,.\,\frac{q^\beta - c^\beta}{q^\beta}\right).\,k'(u)\,du \leqq (\beta+1)\int_c^\infty \frac{\omega(u)}{u^3 k(u)\left(\int_u^\infty \frac{dt}{t^2\,k(t)}\right)^2}\,du, \quad (19)$$

wo das letzte Integral nach der Voraussetzung existiert. Folglich ist

$$\left.\begin{aligned}\int_{2c}^\infty (\underset{q \geqq u}{Max}\ \omega(q))\,k'(u)\,du &\leqq \frac{1}{2^\beta - 1}\int_{2c}^\infty \left(\underset{q \geqq u}{Max}\ \omega(q)\,\frac{q^\beta - c^\beta}{q^\beta}\right)k'(u)\,du \\ &\leqq \frac{\beta+1}{2^\beta - 1}\int_c^\infty \frac{\omega(u)}{u^3 k(u)\left(\int_u^\infty \frac{dt}{t^2\,k(t)}\right)^2}\,du,\end{aligned}\right\} \quad (20)$$

sodass aus der Existenz des letzten Integrales hervorgeht, dass auch das erste Integral in (20) existiert. Aus (19) folgt dann (15) wegen

$$\int_c^\infty \left(\underset{q \geqq u}{Max}\, \omega(q) \cdot \frac{c^\beta}{q^\beta} \right) \cdot k'(u)\, du = c^\beta \int_c^\infty \frac{\omega(u)}{u^\beta} k'(u)\, du.$$

3. Satz 2, mit

$$a = c, \qquad b = \infty, \qquad f(u) = \frac{\omega(u)}{u^\beta}, \qquad g(u) = u^\beta - c^\beta$$

angewendet, gibt

$$-\int_c^\infty \left(\underset{c < q \leqq u}{Max}\, \omega(q) \cdot \frac{q^\beta - c^\beta}{q^\beta} \right) \cdot k'(u)\, du \leqq \beta \int_c^\infty \frac{\omega(u)}{u} k(u)\, du,$$

sodass die dritte Behauptung aus

$$-\int_c^\infty \left(\underset{c < q \leqq u}{Max}\, \frac{\omega(q)}{q^\beta} c^\beta \right) k'(u)\, du \leqq - \frac{\omega(c)}{c^\beta} \cdot c^\beta \int_c^\infty k'(u)\, du$$
$$\leqq \omega(c)\, k(c)$$

folgt.

4. Ich unterscheide zwei verschiedene Fälle, je nachdem $k(c)$ endlich ist oder nicht. Ist $k(c)$ unendlich, dann wende ich die zweite Behauptung von Satz 6 mit

$$a = c,\ b = \infty,\ f(u) = u^\beta\, \omega(u),\ g(u) = \int_a^u \frac{dt}{k(t)} \text{ und } h(u) = \frac{u^{-\beta}}{\int_a^u \frac{dt}{k(t)}}$$

an, und ich setze dann $\delta = 0$. Ist $k(c)$ endlich, dann wähle ich irgend eine positive Zahl δ, setze im Interval $0 < u < c$ $\omega(u) = 0$, und definiere in diesem Intervall die Funktion $k(u)$ so, dass sie eine integrierbare Ableitung $\leqq 0$ besitzt, und

$$\int_0^c \frac{dt}{k(t)} \geqq \frac{1}{1+\delta} \cdot \frac{c}{k(c)} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (21)$$

ist; ich wende dann die zweite Behauptung von Satz 6 mit

$$a = 0,\ b = \infty,\ f(u) = u^\beta\, \omega(u),\ g(u) = \int_0^u \frac{dt}{k(t)} \text{ und } h(u) = \frac{u^{-\beta}}{\int_0^u \frac{dt}{k(t)}}$$

an.

In beiden Fällen bekomme ich

$$\left.\begin{aligned} -\int_c^\infty (\operatorname*{Max}_{c<q\leqq u} \omega(q))\, k'(u)\, du &\leqq -\int_c^\infty u^\beta\, \omega(u)\, h'(u)\, du \int_0^u dt \\ &= -\int_c^\infty u^{\beta+1}\, \omega(u)\, h'(u)\, du \end{aligned}\right\} \quad (22)$$

Wegen

$$\int_a^u \frac{dt}{k(t)} \leqq \int_a^u \frac{dt}{k(u)} \leqq \frac{u}{k(u)}$$

(a ist 0 oder c, je nachdem $k(c)$ endlich oder unendlich ist), ist

$$-h'(u) = \frac{\beta\, u^{-\beta-1}}{\int_a^u \frac{dt}{k(t)}} + \frac{u^{-\beta}}{\left(\int_a^u \frac{dt}{k(t)}\right)^2} \cdot \frac{1}{k(u)} \leqq \frac{(\beta+1)\, u^{-\beta}}{k(u)\left(\int_a^u \frac{dt}{k(t)}\right)^2} \quad . \quad (23)$$

Ist $k(c)$ endlich, dann ist für jedes $u \geqq c$ wegen (21)

$$\int_a^u \frac{dt}{k(t)} = \int_0^c \frac{dt}{k(t)} + \int_c^u \frac{dt}{k(t)} \geqq \frac{1}{1+\delta} \left\{ \frac{c}{k(c)} + \int_c^u \frac{dt}{k(t)} \right\}, \quad . \quad . \quad . \quad (24)$$

und ist $k(c)$ unendlich, dann gilt diese Beziehung mit dem Gleichheitszeichen. Aus (22), (23) und (24) folgt

$$-\int_c^\infty (\operatorname*{Max}_{c<q\leqq u} \omega(q))\, k'(u)\, du$$

$$\leqq (1+\delta)^2 (\beta+1) \int_c^\infty \frac{u\, \omega(u)}{k(u)\left(\frac{c}{k(c)} + \int_c^u \frac{dt}{k(t)}\right)^2}\, du\,,$$

wo $\delta = 0$ oder beliebig positiv ist. Hiermit ist (17) bewiesen.

Satz 8: Es sei $c > 0$ und $\gamma > 0$, und es sei $\omega(u) \geqq 0$ für $u > c$.

Behauptungen: 1. *Ist es möglich eine positive Zahl β so zu wählen, dass $\frac{\omega(u)}{u^\beta}$ monoton nicht-zunehmend ist, dann ist*

$$\gamma \int_c^\infty (\operatorname*{Max}_{q\leqq u} \omega(q))\, u^{\gamma-1}\, du \leqq (\beta + 3\gamma + 2\sqrt{\gamma(\beta+\gamma)}) \int_c^\infty \omega(u)\, u^{\gamma-1}\, du\,, \quad (25)$$

falls das letzte Integral existiert, und

$$\gamma \int_c^\infty (\underset{c<q\leqq u}{\mathrm{Max}}\ \omega(q))\, u^{-\gamma-1}\, du \leqq \beta \int_c^\infty \omega(u)\, u^{-\gamma-1}\, du + \omega(c)\,.\, c^{-\gamma}; \quad . \quad (26)$$

für (26) wird nicht nur die Existenz des rechterhand auftretenden Integrales, sondern auch die Existenz des endlichen Grenzwertes $\omega(c) = \lim_{u \to c} \omega(u)$ *vorausgesetzt.*

2. *Ist es möglich eine positive Zahl* β *so zu wählen, dass* $u^\beta\, \omega(u)$ *monoton nicht-abnimmt, dann ist*

$$\gamma \int_c^\infty (\underset{q\geqq u}{\mathrm{Max}}\ \omega(q))\, u^{\gamma-1}\, du \leqq \beta \int_c^\infty \omega(u)\, u^{\gamma-1}\, du \quad . \; . \; . \quad (27)$$

angenommen, dass das letzte Integral existiert, und

$$\gamma \int_c^\infty (\underset{c<q\leqq u}{\mathrm{Max}}\ \omega(q))\, u^{-\gamma-1}\, du \leqq (\beta+2\gamma+2\sqrt{\gamma(\beta+\gamma)}) \int_c^\infty \omega(u)\, u^{-\gamma-1}\, du, \quad (28)$$

falls das letzte Integral existiert.

Beweis: 1. Ich wähle eine Konstante $\eta > \beta + \gamma$. Die erste Behauptung von Satz 6, mit

$a = c, \quad b = \infty, \quad f(u) = u^{-\beta}\, \omega(u), \quad g(u) = u^\eta - c^\eta, \quad h(u) = u^{\beta-\eta}$

und $k(u) = u^\gamma$

angewendet, gibt

$$\left.\begin{aligned} &\gamma \int_c^\infty \left(\underset{q\geqq u}{\mathrm{Max}}\ \omega(q)\, \frac{q^\eta - c^\eta}{q^\eta}\right) u^{\gamma-1}\, du \leqq \\ &\qquad -\int_c^\infty u^{-\beta}\, \omega(u)\,.\, \eta u^{\eta-1}\, du \int_u^\infty (\beta-\eta)\, t^{\beta-\eta-1}\,.\, t^\gamma\, dt \\ &\qquad = \frac{\eta(\eta-\beta)}{\eta-\beta-\gamma} \int_c^\infty \omega(u)\, u^{\gamma-1}\, du. \end{aligned}\right\} \quad (29)$$

Für $q \geqq u \geqq c$ ist

$$\frac{\omega(q)}{q^\eta} = \frac{\omega(q)}{q^\beta}\,.\,\frac{1}{q^{\eta-\beta}} \leqq \frac{\omega(u)}{u^\beta}\,.\,\frac{1}{q^{\eta-\beta}} \leqq \frac{\omega(u)}{c^\eta},$$

also

$$\gamma \int_c^\infty \left(\underset{q\geqq u}{\mathrm{Max}}\ \frac{\omega(q)}{q^\eta}\,.\, c^\eta\right) u^{\gamma-1}\, du \leqq \gamma \int_c^\infty \omega(u)\, u^{\gamma-1}\, du,$$

sodass aus (29) folgt

$$\gamma \int_c^\infty (\underset{q \geqq u}{Max}\, \omega(q))\, u^{\gamma-1}\, du \leqq \left(\frac{\eta(\eta-\beta)}{\eta-\beta-\gamma} + \gamma \right) \int_c^\infty \omega(u)\, u^{\gamma-1}\, du,$$

gültig für jedes $\eta > \beta + \gamma$. Diese Formel verwandelt sich in (25), wenn

$$\eta = \beta + \gamma + \sqrt{\gamma(\beta+\gamma)}, \quad \text{also} \quad \frac{\eta(\eta-\beta)}{\eta-\beta-\gamma} + \gamma = \beta + 3\gamma + 2\sqrt{\gamma(\beta+\gamma)}$$

gewählt wird.

Aus Satz 2, mit

$$a = c, \quad b = \infty, \quad f(u) = u^{-\beta}\, \omega(u), \quad g(u) = u^\beta - c^\beta, \quad k(u) = u^{-\gamma}$$

angewendet, geht hervor

$$\gamma \int_c^\infty \left(\underset{c < q \leqq u}{Max}\, \omega(q) \frac{q^\beta - c^\beta}{q^\beta} \right) u^{-\gamma-1}\, du \leqq \int_c^\infty u^{-\beta}\, \omega(u) \,.\, \beta u^{\beta-1} \,.\, u^{-\gamma}\, du$$

$$= \beta \int_c^\infty \omega(u)\, u^{-\gamma-1}\, du,$$

woraus (26) wegen

$$\gamma \int_c^\infty \left(\underset{c < q \leqq u}{Max}\, \frac{\omega(q)}{q^\beta} c^\beta \right) u^{-\gamma-1}\, du = \gamma \frac{\omega(c)}{c^\beta} c^\beta \int_c^\infty u^{-\gamma-1}\, du = \frac{\omega(c)}{c^\gamma}$$

folgt.

2. Satz 4, mit

$$a = c, \quad b = \infty, \quad f(u) = u^\beta\, \omega(u), \quad g(u) = u^{-\beta}, \quad k(u) = u^\gamma$$

angewendet, gibt (27).

Um schliesslich (28) zu beweisen, wähle ich eine positive Zahl $\eta > \gamma$, und setze $\omega(u) = 0$ für $0 < u < c$. Nach der zweiten Behauptung von Satz 6, mit

$$a = 0, \quad b = \infty, \quad f(u) = u^\beta\, \omega(u), \quad g(u) = u^\eta, \quad h(u) = u^{-\beta-\eta} \quad \text{und} \quad k(u) = u^{-\gamma}$$

angewendet, ist

$$\gamma \int_c^\infty (\underset{c < q \leqq u}{Max}\, \omega(q))\, u^{-\gamma-1}\, du \leqq$$

$$\int_c^\infty u^\beta\, \omega(u) \,.\, (\beta+\eta)\, u^{-\beta-\eta-1}\, du \int_0^u \eta\, t^{\eta-1}\, t^{-\gamma} \,.\, dt = \frac{\eta(\beta+\eta)}{\eta-\gamma} \int_c^\infty \omega(u)\, u^{-\gamma-1}\, du,$$

gültig für jedes $\eta > \gamma$. Hieraus folgt (28), wenn

$$\eta = \gamma + \sqrt{\gamma(\beta+\gamma)}, \quad \text{also} \quad \frac{\eta(\beta+\eta)}{\eta-\gamma} = \beta + 2\gamma + 2\sqrt{\gamma(\beta+\gamma)}$$

gewählt wird.

Verallgemeinerungen der in dieser Arbeit vorkommenden Resultate auf unendliche Reihen und auf mehrfache Integrale überlasse ich dem Leser. Ich nenne hier nur die Ergebnisse bei unendlichen Reihen, die der Vorbemerkung von Satz 7 entsprechen.

Satz 9: *Existiert eine positive Zahl β, derart dass $n^\beta \omega_n$ (n ganz $\geqq 1$) monoton nicht-abnehmend ist, sind ω_n, k_n* und *$k_{n+1} - k_n$ stets $\geqq 0$, und konvergiert*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\omega_n k_n}{n}, \quad \text{dann ist} \quad \sum_{n=1}^{\infty} (\underset{q \geqq n}{\mathrm{Max}}\, \omega_q) \,.\, (k_{n+1} - k_n)$$

gleichfalls konvergent.

Satz 10: *Existiert eine positive Zahl β, derart dass $\frac{\omega_n}{n^\beta}$ (n ganz $\geqq 1$) monoton nicht-zunehmend ist, ist stets $\omega_n \geqq 0$, $k_n > 0$ und $k_{n+1} - k_n \geqq 0$, und konvergiert*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\omega_n}{n^3 k_n \left(\sum\limits_{t=n}^{\infty} \frac{1}{t^2 k_t} \right)^2}, \quad \text{dann ist} \quad \sum_{n=1}^{\infty} (\underset{q \geqq n}{\mathrm{Max}}\, \omega_q)(k_{n+1} - k_n)$$

gleichfalls konvergent.

Satz 11: *Existiert eine positive Zahl β, derart dass $\frac{\omega_n}{n^\beta}$ (n ganz $\geqq 1$) monoton nicht-zunimmt, sind ω_n, k_n* und *$k_n - k_{n+1}$ stets $\geqq 0$, und konvergiert*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\omega_n k_n}{n}, \quad \text{dann ist} \quad \sum_{n=1}^{\infty} (\underset{1 \leqq q \leqq n}{\mathrm{Max}}\, \omega_q)(k_n - k_{n+1})$$

gleichfalls konvergent.

Satz 12: *Existiert eine positive Zahl β, derart, dass $n^\beta \omega_n$ (n ganz $\geqq 1$) monoton nicht-abnimmt, ist stets $\omega_n \geqq 0$, $k_n > 0$ und $k_n - k_{n+1} \geqq 0$, und konvergiert*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n \omega_n}{k_n \,.\, \left(\sum\limits_{t=1}^{n} \frac{1}{k_t} \right)^2}, \quad \text{dann ist} \quad \sum_{n=1}^{\infty} (\underset{1 \leqq q \leqq n}{\mathrm{Max}}\, \omega_q)(k_n - k_{n+1})$$

gleichfalls konvergent.