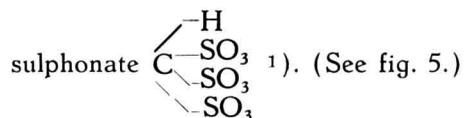


Cl ions has the tendency to increase the area of spread of a protein salt, that is completely ionized. It has a disionizing effect. The relation between  $pCl$  and the area is linear (See already *Bioch. Zeitschr.* 1. c. p. 404). Now if this interpretation is the right one, bi-valent and tri-valent negative ions should have an identical effect in much lower concentration. This is indeed what had been observed.

We found that  $SO_4$  ions have in much smaller concentration the same discharging effect as the monovalent (See fig. 4). And the tri-valent have an effect, that is identical, but can be observed when making use of still lower concentrations. The tri-valent negative ion was methane tri-



It was interesting to see what would happen on the alkaline side of the iso-electric point after addition of positive ions.

It is hardly necessary to say that  $KCl$  has also an influence on the minimum spreading at the alkaline side (fig. 6), but that  $K_2SO_4$  and the methane trisulphonate have no effect in the small concentrations used.

On the contrary the bi-valent positive ions  $Ba^{++}$  and  $Ca^{++}$  have the same effect on the spreading at pH 8 as the  $SO_4^{--}$  at pH 3 (fig. 7) and we were also able to observe a very strong influence of luteocobaltchloride  $CO(NH_3)_6Cl_3$  on the spreading at pH 8 (see fig. 8). It is obvious, that this adds convincing arguments to the interpretation given before: at the isoelectric point the neutral protein-molecule spreads in a thin layer; the addition of  $H^+$  (and  $OH^-$ ) ions diminishes the area occupied by the protein, so much so that it occupies only  $1/9$  of the surface. Further addition of negative ions at the acid side of the isoelectric point (from pH 3 downwards) increases the surface by eliminating the charge of the protein ions. The same holds good for the addition of positive ions in alkaline medium. Valency has a very striking influence: tri-valent ions acting more strongly than bi-valent and mono-valent ions having a much smaller influence than bi-valent.

<sup>1)</sup> We made use of this salt following the advise of Prof. BUNGENBERG DE JONG. It was kindly given to us by Prof. BACKER.

**Mathematics.** — *Zur generellen Feldtheorie. DIRACsche Gleichungen und HAMILTONSche Funktion.* Von J. A. SCHOUTEN und D. VAN DANTZIG. (Communicated by Prof. P. EHRENFEST).

(Communicated at the meeting of May 28, 1932).

In der vorigen Mitteilung<sup>1)</sup> haben wir u. a. gezeigt dass in der

<sup>1)</sup> J. A. SCHOUTEN und D. VAN DANTZIG, Zum Unifizierungsproblem der Physik. Skizze einer generellen Feldtheorie, *Proc. Kon. Akad.* **35** (1932) 642—655. zitiert mit G. F. I.

projektivisierten Gleichung der Weltlinien statt des nur bis auf einen Gradienten bestimmten elektromagnetischen Potentialvektors der vollständig bestimmte potentielle Impulsenergiepunkt auftritt. Wir zeigen hier dass die projektivierte DIRACsche Gleichung sich auf eine Form bringen lässt, die ebenfalls nur diesen Impulsenergiepunkt enthält. Gleichzeitig wird dadurch der in der Spingrösse  $\psi^C$  auftretende unbestimmte Faktor eindeutig festgelegt. Der Operator  $\frac{\hbar}{i} \nabla_\mu$  ist dann quantentheoretisch äquivalent mit dem totalen Impulsenergiepunkt  $p_\mu$  und der hinter  $\alpha^\mu$  in der DIRACschen Gleichung auftretende Operator ist äquivalent mit einem *Punkt auf der Fundamentalquadrk*. Aus dieser Form der DIRACschen Gleichung ergibt sich eine HAMILTONsche Funktion, die bis auf einen Faktor  $\frac{1}{2m}$  nichts anderes ist als das skalare Produkt dieses Punktes mit dem ebenfalls auf der Quadrk gelegenen komplex konjugierten Punkt. In der Tat liefert diese HAMILTONsche Funktion die richtigen kanonischen Gleichungen für die Weltlinien.

Zum Schluss wird gezeigt, wie man in der Praxis von den nicht-homogenen gewöhnlichen Weltkoordinaten zu den homogenen Koordinaten übergehen kann, welche Unbestimmtheit dabei auftritt und was die Bedeutung dieser Unbestimmtheit ist.

§ 1. DIRACsche Gleichung.

In G. F. I haben wir die DIRACsche Gleichung auf die Form

$$\frac{\hbar}{i} \alpha^{\mu C}_{\dots A} \nabla_\mu \psi^A = 0 \quad \dots \dots \dots (1)$$

gebracht, wo  $\psi^A$  eine Pseudospinvektordichte vom Gewicht  $+\frac{1}{4}$  ist, deren kovariante Differentiation folgendermassen definiert war:

$$\nabla_\mu \psi^C = \partial_\mu \psi^C + A^C_{A\mu} \psi^A - \frac{e i}{c h} \varphi_\mu - \frac{m c}{\hbar \omega} x_\mu \dots \dots \dots (2)$$

Die  $A^C_{A\mu}$  sind bestimmt durch die Forderung dass die kovariante Ableitung von  $\alpha^{\nu C}_{\dots A}$  verschwindet; diese lautet in bezug auf das orthogonale anholonome Bezugssystem (c):

$$\nabla_b \alpha^c C_{\dots A} = \partial_b \alpha^c C_{\dots A} + \Pi^c_{ab} \alpha^a C_{\dots A} + A^C_{Bb} \alpha^c B_{\dots A} - \alpha^c C_{\dots B} A^B_{Ab} = 0. \quad \dots (3)$$

Zur Berechnung der  $A^C_{Ab}$  wählen wir die Bezugssysteme in den Spinräumen so, dass  $\partial_b \alpha^c C_{\dots A}$  verschwindet.  $A^C_{Ab}$  lässt sich für jedes  $b$  als Sedenion mit der Spur Null jedenfalls linear in den fünf  $\alpha^c C_{\dots A}$  und den zehn  $\alpha^{[ac] C}_{\dots A}$  ausdrücken:

$$A^C_{Ab} = (\frac{1}{4} A^D_{Eb} \alpha^c \cdot E_{\dots D}) \alpha^c C_{\dots A} + (\frac{1}{8} A^D_{Eb} \alpha_{[ca] \cdot E_{\dots D}}) \alpha^{[ac] C}_{\dots A} \dots \dots (4)$$

Wird dies in (3) eingesetzt, so ergibt sich

$$A_{Ab}^C = -\frac{1}{4} H_{ab}^c \alpha_{c.A}^a \dots \dots \dots (5)$$

Ausgehend von den in dieser Weise berechneten  $A_{Ab}^C$  lassen sich die  $A_{A^\mu}^C$  in bezug auf beliebige Bezugssysteme in der Raumzeitwelt und im Spinraum in der üblichen Weise ableiten.  $\varphi_\mu$  ist der Potentialvektor, der sich folgendermassen verändert wenn  $\psi^C$  einen Faktor  $e^{i\varphi}$  bekommt:

$$\varphi'_\mu = \varphi_\mu + \frac{hc}{e} \partial_\mu \varphi \dots \dots \dots (6)$$

Die Form (1) hat folgende Nachteile: 1. Die kovariante Differentiation der Spinoren hängt von  $e$  und  $m$  ab, während die Uebertragung der Projektoren und Affinoren, die in den makrokosmischen Gleichungen auftritt, von  $e$  und  $m$  unabhängig ist. 2. In der Gleichung der geodätischen Linien ist es gelungen, den unbestimmten Vektor  $\frac{e}{c} \varphi_\mu$  durch den bestimmten potentiellen Impulsenergiepunkt  $\frac{e}{c\lambda} x_\mu$  zu ersetzen; in (2) tritt aber  $\varphi_\mu$  noch neben  $x_\mu$  auf.

Der zweite Uebelstand lässt sich leicht beseitigen. Wir haben in G. F. I bewiesen, dass es bei jeder Wahl von  $\varphi_\mu$  einen solchen projektiven Skalar  $\chi$  vom Exzess (und Grad) 1 gibt, dass

$$\varphi_\mu = \frac{1}{\lambda} (x_\mu + \omega^2 \partial_\mu \log \chi); \quad \lambda = \frac{\omega k}{c}; \quad k = \sqrt{\frac{\kappa}{2}} \dots \dots (7)$$

ist. Für  $\varphi = -\omega \frac{e}{hk} \log \chi$  wird wegen (5) und (7)  $\varphi'_\mu = \frac{1}{\lambda} x_\mu$ .

Führen wir also eine Spinvektordichte  $\Psi^C$  vom Gewicht  $+1/4$  und vom Grad und Exzess  $-i\omega \frac{e}{hk}$  ein vermöge der Gleichung

$$\Psi^C = \chi^{-i\omega \frac{e}{hk}} \psi^C, \dots \dots \dots (8)$$

so geht die Gleichung (1) über in

$$\alpha_{A^\mu B}^{\mu C} \left( \frac{h}{i} \partial_\mu \Psi^B + \frac{h}{i} A_{A^\mu}^B \Psi^A - \frac{e}{\omega k} x_\mu \Psi^B + i \frac{mc}{\omega} x_\mu \Psi^B \right) = 0 \dots (9)$$

Im Gegensatz zu  $\psi^C$  ist  $\Psi^C$  keine Pseudospinvektordichte sondern eine Spinvektordichte, d.h. (als Funktion der  $x^\nu$  betrachtet) nicht nur bis auf einen beliebigen unimodularen Faktor sondern bis auf einen (unwesentlichen) *konstanten* Faktor dieser Art bestimmt. Da  $\Psi^C$  und  $\psi^C$  sich nur um einen unimodularen Faktor unterscheiden, ändert sich physikalisch bei der Ersetzung von  $\psi^C$  durch  $\Psi^C$  nichts.

Der zweite Uebelstand lässt sich dadurch beseitigen, dass in (9) das Symbol der kovarianten Differentiation von kontravarianten Spinvektordichten vom Exzess  $-i\omega \frac{e}{h} \sqrt{\frac{2}{\kappa}}$  eingeführt wird. Wie einer von uns

früher gezeigt hat<sup>1)</sup>, hat die kovariante Ableitung eines Skalars vom Exzess  $\varepsilon$  die Form

$$\nabla_{\nu} p = \partial_{\nu} p + \varepsilon Q_{\nu} p, \dots \dots \dots (10)$$

wo  $Q_{\nu}$  irgend ein für allemal gegebenes kovariantes Punktfeld vom Exzess Null ist. Daraus folgt, dass die kovariante Differentiation einer kontravarianten Spinvektordichte vom Gewicht  $\frac{1}{4}$  und vom Exzess  $\varepsilon$  folgendermassen lautet:

$$\nabla_{\mu} \Psi^C = \partial_{\mu} \Psi^C + \Lambda_{A\mu}^C \Psi^A + \varepsilon Q_{\mu} \Psi^C, \dots \dots \dots (11)$$

und dass sich (9) schreiben lässt:

$$\alpha_{\dots A}^{\dots C} \left( \frac{h}{i} \nabla_{\mu} + \frac{e\omega}{k} Q_{\mu} - \frac{e}{\omega k} x_{\mu} + i \frac{mc}{\omega} x_{\mu} \right) \Psi^A = 0. \dots \dots (12)$$

Wenn nun die Hyperebene  $Q_{\nu}$  nicht mit  $x_{\nu}$  koinzident wäre, so würde es eine auch bei Abwesenheit von Ladung und Masse ausgezeichnete Richtung geben, (nämlich diejenige der Gerade durch  $x^{\nu}$  und  $Q^{\nu}$ ), der keine physikalische Bedeutung zukäme. Fordern wir also dass dies nicht der Fall sei, so wird

$$Q_{\mu} = -\omega^{-2} Q_0 x_{\mu}, \quad Q_0 = Q_{\mu} x^{\mu} \dots \dots \dots (13)$$

Also geht (12) über in

$$\alpha_{\dots A}^{\dots C} \left( \frac{h}{i} \nabla_{\mu} - \frac{e}{k} (Q_0 + 1) \omega^{-1} x_{\mu} + i \frac{mc}{\omega} x_{\mu} \right) \Psi^A = 0. \dots \dots (14)$$

Vergleichung der Gleichung

$$mi^{\nu} = p^{\nu} - \frac{e}{k} \omega^{-1} x^{\nu} \dots \dots \dots (15)$$

mit (14) legt es nahe zu fordern, dass der Operator  $\frac{h}{i} \nabla_{\mu}^2$  quantentheoretisch äquivalent sei mit dem totalen Impulsenergiepunkt  $p_{\mu}$ . Soll nun auch die algebraische Gleichung, die aus (14) entsteht wenn  $\frac{h}{i} \nabla_{\mu}$  durch  $p_{\mu}$  ersetzt wird, nämlich

$$\left. \begin{aligned} a) \quad \alpha_{\dots A}^{\dots C} n_{\mu} \Psi^A &= 0, \\ \beta) \quad n_{\mu} &= p_{\mu} - \frac{e}{k} (Q_0 + 1) \omega^{-1} x_{\mu} + i \frac{mc}{\omega} x_{\mu}, \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (16)$$

<sup>1)</sup> D. VAN DANTZIG, Theorie des projektiven Zusammenhangs  $n$ -dimensionaler Räume, Math. Ann. **106**, (1932) 400–454.

<sup>2)</sup> Man kann ohne das Resultat zu ändern auch  $\frac{h}{i} \nabla_{\mu}^R$  wählen, da aus (78) von G. F. I folgt, dass  $\alpha^{\nu} \nabla_{\mu} \Psi^C = \alpha^{\nu} \nabla_{\mu}^R \Psi^C$  ist.

eine Lösung  $\Psi^C \neq 0$  haben, so muss der Punkt  $n^\nu$  auf der Quadrik liegen, wie sich durch Ueberschiebung von (16a) mit  $\alpha_{\dots C}^{\nu D} n_\lambda$  sofort ergibt. Nun zeigt man aber leicht, dass die beiden Schnittpunkte der Verbindungsgeraden von  $x^\nu$  und  $p^\nu$  mit der Quadrik

$$\left. \begin{matrix} n^\nu \\ \bar{n}^\nu \end{matrix} \right\} = p^\nu - \frac{e}{k} \omega^{-1} x^\nu \pm i \frac{mc}{\omega} x^\nu \quad . . . . . (17)$$

sind. Vergleich mit (16β) zeigt, dass  $Q_0 = 0$  also wegen (13)

$$Q_\mu = 0 . . . . . (18)$$

sein muss.

Wir wollen die jetzt erhaltene Gleichung

$$\alpha_{\dots A}^{\mu C} \left( \frac{\hbar}{i} \nabla_\mu - \frac{e}{k} \omega^{-1} x_\mu + i \frac{mc}{\omega} x_\mu \right) \Psi^A = 0 . . . (19)$$

zerlegen.

Bekanntlich bestimmt  $a^0$  zwei invariante Ebenen im Spinraum, in Bezug auf welche jeder Spinor zerlegt werden kann. Die Zerlegung von  $a^0$ ,  $a^k$  und  $a$  lautet:

$$\left. \begin{matrix} a^0 = -i \omega^{-1} \iota_0 + i \omega^{-1} \bar{\iota}_0, \\ a^k = \beta^k + \bar{\beta}^k, \\ \bar{a} = \iota_0 + \bar{\iota}_0. \end{matrix} \right\} \left( \begin{matrix} \beta^k = \iota_0 a^k \bar{\iota}_0 = \iota_0 a^k = a^k \bar{\iota}_0, \\ \bar{\beta}^k = \bar{\iota}_0 a^k \iota_0 = \bar{\iota}_0 a^k = a^k \iota_0, \end{matrix} \right) . . . . . (20)$$

$\iota_0$  und  $\bar{\iota}_0$  sind die Einheitsspinoren in den invarianten Ebenen. Je zwei Koordinatenachsen können in jede dieser Ebenen gelegt werden, und die Wahl kann so getroffen werden dass die Komponenten  $\beta^k$  und  $\bar{\beta}^k$  sowie  $\iota_0$  und  $\bar{\iota}_0$  komplex konjugierte Bestimmungszahlen bekommen. Schreiben wir dann  $v^c, (a, \dots, \mathfrak{h}) = 5, 6$  für einen Vektor in der einen Ebene und  $v^c, (\mathfrak{a}, \dots, \mathfrak{G}) = \bar{5}, \bar{6}$  für den Vektor mit den komplex konjugierten Bestimmungszahlen in der anderen Ebene, so schreiben sich die Bestimmungszahlen von  $\iota_0, \bar{\iota}_0, \beta^k, \bar{\beta}^k$ :

$$\left. \begin{matrix} \iota_0^c & ; & \bar{\iota}_0^{\mathfrak{G}} \\ \beta^{kc} & ; & \bar{\beta}^{k\mathfrak{G}} \end{matrix} \right\} . . . . . (21)$$

$\beta^{kc}$  und  $\bar{\beta}^{k\mathbb{G}}$  liegen mit einem Index in der einen, mit dem anderen Index in der anderen Ebene und es ist

$$\left. \begin{aligned} \beta^{(ij)} &= g^{ij} \iota_0 \quad ; \quad \beta^{ij} = \beta^i \beta^j \\ \bar{\beta}^{(ij)} &= g^{ij} \bar{\iota}_0 \quad ; \quad \bar{\beta}^{ij} = \bar{\beta}^i \bar{\beta}^j \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (22)$$

Zerlegung von  $A_{Ab}^C$  führt zu

$$\left. \begin{aligned} A_{ab}^c &= -\frac{1}{4} \Pi_{ib}^k \beta_{.k.a}^{i.c} \\ A_{\mathbb{2}b}^{\mathbb{G}} &= -\frac{1}{4} \Pi_{ib}^k \bar{\beta}_{.k.\mathbb{2}}^{i.\mathbb{G}} \\ A_{\mathbb{2}b}^c &= \frac{1}{2} i \omega^{-1} \Pi_{0b}^k \beta_{k.\mathbb{2}}^{c.} \\ A_{ab}^{\mathbb{G}} &= -\frac{1}{2} i \omega^{-1} \Pi_{0b}^k \bar{\beta}_{k.a}^{.\mathbb{G}} \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (23)$$

und die Zerlegung von (19) führt zu den Gleichungen

$$\left. \begin{aligned} \frac{\hbar}{i} \bar{\beta}_{.b}^{j\mathbb{G}} (\partial_j \psi^b + A_{aj}^b \psi^a) + mc \psi^{\mathbb{G}} &= 0 \\ \frac{\hbar}{i} \beta_{.b}^{jc} (\partial_j \psi^{\mathbb{B}} + A_{\mathbb{2}j}^{\mathbb{B}} \psi^{\mathbb{2}}) - mc \psi^c &= 0 \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (24)$$

wo  $\psi^c, \psi^{\mathbb{G}}$  die beiden durch Zerlegung von  $\psi^C$  entstehenden Spinvektordichten sind. Es ist bemerkenswert, dass  $e$  in den Gleichungen (24) nicht mehr explizit auftritt. Implizit kommt  $e$  in dem Grad von  $\psi^C$  vor.

Elimination von  $\psi^c$  bzw.  $\psi^{\mathbb{G}}$  aus diesen Gleichungen liefert

$$\left. \begin{aligned} -h^2 \beta_{.a}^{ijc} \overset{R}{\nabla}_{ij} \psi^a + m^2 c^2 \psi^c &= 0, \quad 1) \\ -h^2 \bar{\beta}_{.a}^{ij\mathbb{G}} \overset{R}{\nabla}_{ij} \psi^{\mathbb{2}} + m^2 c^2 \psi^{\mathbb{G}} &= 0, \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (25)$$

welche Gleichungen die zwei (mit  $\overset{R}{\nabla}$  anstatt  $\nabla$  geschriebenen) Komponenten sind der Gleichung

$$\alpha^{abC} \left( \frac{\hbar}{i} \nabla_a - \frac{e}{\omega k} x_a + i \frac{mc}{\omega} x_a \right) \left( \frac{\hbar}{i} \nabla_b - \frac{e}{\omega k} x_b - i \frac{mc}{\omega} x_b \right) \psi^A = 0 \quad (26)$$

1) Die Form der Gleichung (25) ist dieselbe wie im feldfreien Fall. Der Spinterm entsteht aus dem ersten Term von (25), dessen alternierter Teil ausser dem Gravitationsterm noch den Term

$$-h^2 \beta_{.a}^{ijc} S_{ij}^{.k} \overset{R}{\nabla}_k \psi^a = \frac{i e \hbar}{2c} F_{ij} \beta_{.a}^{ijc} \psi^a \quad \text{bzw.} \quad \frac{i e \hbar}{2c} F_{ij} \bar{\beta}_{.a}^{ij\mathbb{G}} \psi^{\mathbb{2}}$$

hervorruft.

Aus dieser letzten Gleichung folgt aber bei Ersetzung von  $\frac{\hbar}{i} \nabla_\mu$  durch  $p_\mu$  dass

$$\left. \begin{aligned} H &= \frac{1}{4m} \alpha^{\lambda\mu} (n_\lambda \bar{n}_\mu + \bar{n}_\lambda n_\mu) = \\ &= \frac{1}{2m} \left\{ p_\lambda p_\mu G^{\lambda\mu} - 2 \frac{e}{k} \omega^{-1} p_\lambda x^\lambda + \left( \frac{e^2}{k^2 \omega^2} + \frac{m^2 c^2}{\omega^2} \right) x^\lambda x^\lambda G_{\lambda\mu} \right\} \end{aligned} \right\} \quad (27)$$

die HAMILTONSche Funktion ist. Ihr Wert ist  $-mc^2$ .

In der Tat ergibt diese Funktion unter Benutzung von  $\frac{\delta p^\nu}{d\tau} = 0$  gerade die kanonischen Gleichungen der Weltlinien geladener Massenpunkte

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial H}{\partial p_\nu} &= \frac{1}{m} \left( p^\nu - \frac{e}{k} \omega^{-1} x^\nu \right) = \frac{d' x^\nu}{d\tau}; \quad \frac{d'}{d\tau} = i'' \partial_\mu \\ \frac{\partial H}{\partial x^\lambda} &= -\Pi_{\lambda\mu}^\nu p_\nu i'' = \frac{d' p_\lambda}{d\tau}, \end{aligned} \right\} \dots \quad (28)$$

wo bei der partiellen Ableitung  $p_\nu$  und  $x^\nu$  als unabhängig von einander, und  $G_{\lambda\mu}$ ,  $G^{\lambda\mu}$  als nur von den  $x^\nu$  abhängig zu betrachten sind.

§ 2. Uebergang von den gewöhnlichen zu den homogenen Koordinaten.

Es ist für die praktische Rechnung wichtig, zu wissen wie sich der Uebergang von den gewöhnlichen zu den homogenen Koordinaten vollzieht. Wir gehen also aus von einer gewöhnlichen  $V_4$  mit Koordinaten  $\xi^k$ , ( $h, \dots m = 1, 2, 3, 4$ ) und Fundamentaltensoren  $g_{ij}$ ,  $g^{jk}$ , und setzen voraus, dass der Potentialvektor  $\varphi_i$  bis auf einen Gradienten gegeben ist. Sodann führen wir 5 Koordinaten  $x^\nu$  ( $\nu, \kappa, \dots \omega = 0, 1, 2, 3, 4$ ) ein, die der einzigen Bedingung genügen, dass die  $\xi^k$  vier unabhängige Funktionen der  $x^\nu$  vom Grade Null sind. Dann sind die  $A_\lambda^k$  bekannt:

$$A_\lambda^k = \partial_\lambda \xi^k, \dots \dots \dots (29)$$

und damit

$$\left. \begin{aligned} g_{\lambda\mu} &= A_{\lambda\mu}^{ij} g_{ij}, \\ \varphi_\lambda &= A_\lambda^i \varphi_i, \\ x_{\mu\lambda} &= \frac{k\omega}{c} \partial_{[\mu} \varphi_{\lambda]}. \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (30)$$

Ferner ist bekannt, dass es einen solchen Skalar  $\chi$  vom Grad und Exzess + 1 gibt, dass

$$\varphi_\lambda = \frac{c}{k\omega} (x_\lambda + \omega^2 \partial_\lambda \log \chi). \dots \dots \dots (31)$$

ist. Wir können jetzt bei *bestimmter* Wahl von  $\varphi_i$  für  $\chi$  eine ganz beliebige Funktion der  $x^\nu$  vom Grade 1 wählen und damit  $x_\lambda$  festlegen. Damit liegen dann auch

$$G_{\lambda\mu} = g_{\lambda\mu} - \omega^{-2} x_\lambda x_\mu \dots \dots \dots (32)$$

und  $G^{\mu\nu}$  fest, und die  $A_i^\nu$  lassen sich eindeutig aus dem Gleichungssystem

$$\left. \begin{aligned} A_\mu^k A_i^\mu &= A_i^k, \\ A_i^\mu x_\mu &= 0 \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (33)$$

berechnen. Als Beispiel wählen wir

$$\left. \begin{aligned} \xi^k &= \frac{x^\gamma}{x^0} \delta_\gamma^k & (\alpha, \dots, \theta = 1, 2, 3, 4)^1) \\ \chi &= x^0. \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (34)$$

Dann ist

$$\left. \begin{aligned} A_\alpha^k &= \frac{1}{x^0} \delta_\alpha^k \\ A_0^k &= -\frac{x^\gamma}{x^0 x^0} \delta_\gamma^k \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (35)$$

$$\varphi_\alpha = \frac{1}{x^0} \delta_\alpha^k \varphi_k \quad ; \quad \varphi_0 = -\frac{x^\gamma}{x^0 x^0} \delta_\gamma^k \varphi_k \dots \dots \dots (36)$$

$$\left. \begin{aligned} \frac{1}{\lambda} x_\alpha &= \frac{1}{x^0} \delta_\alpha^k \varphi_k - \frac{1}{\lambda} \omega^2 \partial_\alpha \log x^0 = \frac{1}{x^0} \delta_\alpha^k \varphi_k = \varphi_\alpha, \\ \frac{1}{\lambda} x_0 &= -\frac{x^\gamma}{x^0 x^0} \delta_\gamma^k \varphi_k - \frac{1}{\lambda} \frac{\omega^2}{x^0} = \varphi_0 - \frac{\omega^2}{\lambda x^0}. \end{aligned} \right\} \dots \dots (37)$$

Aus obenstehendem folgt, dass der projektive Zusammenhang durch  $g_{ij}$  und  $\varphi_i$  nicht eindeutig bestimmt ist. Namentlich ist der kovariante Punkt  $x_\lambda$ , dessen Wahl alles festlegt, nur bis auf einen Vektorgradienten bestimmt; der projektive Zusammenhang gestattet also die Transformation

$$'x_\lambda = x_\lambda - \omega^2 \chi_\lambda \dots \dots \dots (38)$$

1)  $\delta_\gamma^k$  ist das erweiterte Kroneckes Symbol, das 0 oder 1 darstellt je nachdem  $k$  und  $\gamma$  durch entsprechende oder nicht entsprechende Zeichen aus den Reihen 1, 2, 3, 4 und 1, 2, 3, 4 ersetzt werden. Wir können für  $x^\gamma \delta_\gamma^k$  natürlich nicht  $x^k$  schreiben, weil z.B.  $x^1 = x^1 (= 0)$  ist.

2) In Gleichungen, die nicht differenziert werden, kann  $x^0$  durch 1 ersetzt werden, weil die Projektoren doch nur bis auf einen beliebigen Faktor bestimmt sind. Diese spezialisierte Form der Gleichungen ist natürlich nicht mehr bei  $\mathfrak{F}$  invariant.

wo  $\chi_\lambda$  Vektorgradient eines beliebigen Skalars von Exzess Null ist, d.h. den Bedingungen

$$\left. \begin{aligned} \partial_{[\mu} \chi_{\lambda]} &= 0, \\ x^\nu \chi_\nu &= 0 \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (39)$$

zu genügen hat. Daraus geht hervor dass sämtliche kontra-bzw. kovariante Vektoren sich bei (38) folgendermassen transformieren:

$$\left. \begin{aligned} {}'v^\nu &= T^\nu_{\cdot\lambda} v^\lambda; & T^\nu_{\cdot\lambda} &= \mathcal{N}^\nu_\lambda - \chi_\lambda x^\nu; \\ {}'w_\lambda &= \bar{T}^{-1}_{\cdot\lambda} w_\nu; & \bar{T}^{-1}_{\cdot\lambda} &= \mathcal{N}^\nu_\lambda + \chi_\lambda x^\nu \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (40)$$

Es ist also z.B. 1)

$$\left. \begin{aligned} {}'G_{\lambda\mu} &= G_{\lambda\mu} + 2 x^{(\lambda} \chi^{\mu)} - \omega^2 \chi_\lambda \chi_\mu; \\ {}'G^{\mu\nu} &= G^{\mu\nu} - 2 x^{(\mu} \chi^{\nu)} + \chi_\rho \chi^\rho x^\mu x^\nu \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (41)$$

$$\left. \begin{aligned} {}'i^\nu &= i^\nu - \chi_\lambda i^\lambda x^\nu; & {}'p^\nu &= p^\nu - m \chi_\lambda i^\lambda x^\nu \\ {}'i_\lambda &= i_\lambda; & {}'p_\lambda &= p_\lambda - \omega \frac{e}{k} \chi_\lambda \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (42)$$

und

$${}'\nabla_\mu T^\nu_{\cdot\lambda} v^\lambda = T^\nu_{\cdot\rho} (\nabla_\sigma v^\rho) \bar{T}^{-1}_{\cdot\mu} \dots \dots \dots (43)$$

wo  ${}'\nabla_\mu$  der zu  ${}'G_{\lambda\mu}$  und  ${}'x_\lambda$  gehörige kovariante Differentialoperator ist. Aus dieser Gleichung folgt leicht

$$\left. \begin{aligned} {}'H^\nu_{\lambda\mu} &= H^\nu_{\lambda\mu} + (\nabla_\mu \chi_\lambda) x^\nu - 2 x^\nu_{\cdot\mu} \chi_\lambda - 4 x^\nu_{\cdot\lambda} \chi_\mu + \\ &+ 4 \chi_\mu \chi_\rho x^\rho_{\cdot\lambda} x^\nu + 2 \chi_\lambda \chi_\rho x^\rho_{\cdot\mu} x^\nu \end{aligned} \right\} \dots \dots (44)$$

In jeder  $E_4^*$  erleiden also alle Objekte die Punkttransformation  $T$ , auch die Quadrik und die „unendlichferne“ Hyperebene  $x_\lambda$ . Der Nullkegel, der seine Spitze in  $x^\nu$  hat und die Quadrik tangiert, bleibt aber invariant. Der projektive Zusammenhang der  $E_4^*$  transformiert sich aber ebenfalls mit, und zwar in solcher Weise, dass alle Beziehungen zwischen den transformierten Objekten dieselben sind wie zwischen den ursprünglichen. Bei einer bestimmten Wahl der  $x_\lambda$  wird jede lokale (affine)  $E_4^*$  eindeutig auf die lokale (projektive)  $E_4^*$  abgebildet. Der projektive Zusammenhang der  $E_4^*$  induziert also einen projektiven Zusammenhang der  $E_4$ , der natürlich nicht mit den affinen (RIEMANNschen) Zusammenhang identisch ist. Bei Aenderung der Wahl der  $x_\lambda$  ändert sich nun

1) Bei den *gestrichelten* Grössen hat das Herauf- und Herunterziehen der Indizes natürlich mit  ${}'G^{\mu\nu}$  bzw.  ${}'G_{\lambda\nu}$  zu erfolgen.

zwar der projektive Zusammenhang der  $E_4^*$ , aber infolge der Abhängigkeit der Abbildung der  $E_4$  auf die  $E_4^*$  von dieser Wahl *bleibt der projektive Zusammenhang der  $E_4$  invariant*.

Vom Standpunkte der lokalen  $E_4$  bedeutet Aenderung der Wahl von  $x_i$  nur eine Aenderung der projektiven *Koordinaten*; die  $x_i$  sind ja die Koordinaten der unendlichfernen Hyperebene der  $E_4$ . Einführung des Bezugssystems (c) von G. F. I § 3 genügt schon um den Einfluss der Wahl von  $x_i$  vollständig aus den Gleichungen zu eliminieren, was darin seine Ursache findet, dass  $x_i$  in bezug auf dieses System stets die Bestimmungszahlen  $(-\omega^2, 0, 0, 0, 0)$  hat. Alle Gleichungen in bezug auf dieses System sind also bei Aenderung der Wahl von  $x_i$  invariant und dasselbe gilt somit ebenfalls für alle physikalische Gleichungen in gewöhnlichen nichthomogenen Koordinaten der  $V_4$ .

---

**Mathematics.** — *Asymptotische Entwicklungen von BESSELSchen, HANKELschen und verwandten Funktionen.* II <sup>1)</sup>. Von C. S. MEIJER. (Communicated by Prof. J. G. VAN DER CORPUT).

(Communicated at the meeting of June 25, 1932).

**Hilfssatz 4.** *Ist*

$$-\frac{\pi}{2} < \Im(s_1) < \frac{\pi}{2}, \quad -\frac{\pi}{2} \leq \Im(s_2) \leq \frac{\pi}{2} \quad \text{und} \quad s_1 \neq s_2,$$

so ist  $\sinh s_1 \neq \sinh s_2$ ; weiter gilt  $\cosh s \neq 0$ , falls  $-\frac{\pi}{2} < \Im(s) < \frac{\pi}{2}$  ist.

*Beweis.* Dieser Satz ist bekannt, siehe z. B. KNOPP, *Unendliche Reihen*, p. 416 und 417.

Wir definieren nun die Funktion  $\zeta = F(z)$  durch die Beziehung

$$\zeta = F(z) = p \sinh qz \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (40)$$

Hierin ist  $p \neq 0$ ,  $q > 0$  und  $p$  und  $q$  sind unabhängig von  $z$ . Wir betrachten weiter den Rand  $C$  des Rechteckes begrenzt durch die Geraden

$$R_1 \left( \Im(z) = \frac{\pi}{2q} \right), R_2 \left( \Im(z) = -\frac{\pi}{2q} \right), R_3 (\Re(z) = b_1) \text{ und } R_4 (\Re(z) = -b_2),$$

worin  $b_1$  und  $b_2$  positiv sind. Dann gilt

---

<sup>1)</sup> Erste Mitteilung: These Proceedings, Vol. 35 (1932), S. 656—667.