zwar der projektive Zusammenhang der E_4^*, aber infolge der Abhänkeit der Abbildung der E_4 auf die E_4^* von dieser Wahl *bleibt der projektive Zusammenhang der E_4 invariant.*

Vom Standpunkte der lokalen E_4 bedeutet Aenderung der Wahl von x_λ nur eine Aenderung der projektiven *Koordinaten*; die x_λ sind ja die Koordinaten der unendlichfernen Hyperebene der E_4. Einführung des Bezugssystems (c) von *G. F.* I § 3 genügt schon um den Einfluss der Wahl von x_λ vollständig aus den Gleichungen zu eliminieren, was darin seine Ursache findet, dass x_λ in bezug auf dieses System stets die Bestimmungszahlen $(-\omega^2, 0, 0, 0, 0)$ hat. Alle Gleichungen in Bezug auf dieses System sind also bei Aenderung der Wahl von x_λ invariant und dasselbe gilt somit ebenfalls für alle physikalische Gleichungen in gewöhnlichen nichthomogenen Koordinaten der V_4.

Mathematics. — *Asymptotische Entwicklungen von* BESSEL*schen*, HANKEL*schen und verwandten Funktionen.* II [1]). Von C. S. MEIJER. (Communicated by Prof. J. G. VAN DER CORPUT).

(Communicated at the meeting of June 25, 1932).

Hilfssatz 4. *Ist*

$$-\frac{\pi}{2} < \Im(s_1) < \frac{\pi}{2}, \quad -\frac{\pi}{2} \leqq \Im(s_2) \leqq \frac{\pi}{2} \quad \textit{und} \quad s_1 \neq s_2,$$

so ist $\sinh s_1 \neq \sinh s_2$; *weiter gilt* $\cosh s \neq 0$, *falls* $-\frac{\pi}{2} < \Im(s) < \frac{\pi}{2}$ *ist.*

Beweis. Dieser Satz ist bekannt, siehe z. B. KNOPP, Unendliche Reihen, p. 416 und 417.

Wir definieren nun die Funktion $\zeta = F(z)$ durch die Beziehung

$$\zeta = F(z) = p \sinh qz \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (40)$$

Hierin ist $p \neq 0$, $q > 0$ und p und q sind unabhängig von z. Wir betrachten weiter den Rand C des Rechteckes begrenzt durch die Geraden

$$R_1\left(\Im(z) = \frac{\pi}{2q}\right), R_2\left(\Im(z) = -\frac{\pi}{2q}\right), R_3(\Re(z) = b_1) \text{ und } R_4(\Re(z) = -b_2),$$

worin b_1 und b_2 positiv sind. Dann gilt

---

1) Erste Mitteilung: These Proceedings, Vol. **35** (1932), S. 656—667.

Hilfssatz 5. *Ist N ganz rational $\geqq 0$ und liegt z im Innern von C, so ist*

$$\cosh \nu z \frac{dz}{d\zeta} = \frac{1}{2\pi i} \sum_{l=0}^{N-1} \zeta^{2l} \int\limits_C \frac{\cosh \nu t \, dt}{F(t)^{2l+1}} + \frac{\zeta^{2N}}{2\pi i} \int\limits_C \frac{\cosh \nu t \, dt}{F(t)^{2N}(F(t)-\zeta)} \quad . \quad . \quad . \tag{41}$$

und

$$\sinh \nu z \frac{dz}{d\zeta} = \frac{1}{2\pi i} \sum_{l=0}^{N-1} \zeta^{2l+1} \int\limits_C \frac{\sinh \nu t \, dt}{F(t)^{2l+2}} + \frac{\zeta^{2N+1}}{2\pi i} \int\limits_C \frac{\sinh \nu t \, dt}{F(t)^{2N+1}(F(t)-\zeta)}; \quad . \tag{42}$$

hierbei wird der Rand C in positivem Sinne durchlaufen.

Beweis. Aus (40) und Hilfssatz 4 mit $s = qz$ ergibt sich, dass

$$\frac{\cosh \nu t}{F(t) - F(z)}$$

für jedes z im Innern von C und für alle Punkte $t \neq z$ auf dem Rande und im Innern von C eine analytische Funktion von t ist. Weiter ist $F'(z) \neq 0$ für z im Innern von C. Daher hat man, wegen des Residuensatzes, wenn z innerhalb C liegt,

$$\frac{1}{2\pi i} \int\limits_C \frac{\cosh \nu t \, dt}{F(t) - \zeta} = \frac{\cosh \nu z}{F'(z)} = \cosh \nu z \frac{dz}{d\zeta}.$$

Nun ist

$$\frac{1}{F(t) - \zeta} = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{\zeta^k}{F(t)^{k+1}} + \frac{\zeta^n}{F(t)^n (F(t)-\zeta)},$$

also

$$\cosh \nu z \frac{dz}{d\zeta} = \frac{1}{2\pi i} \sum_{k=0}^{n-1} \zeta^k \int\limits_C \frac{\cosh \nu t \, dt}{F(t)^{k+1}} + \frac{\zeta^n}{2\pi i} \int\limits_C \frac{\cosh \nu t \, dt}{F(t)^n (F(t)-\zeta)} \quad . \tag{43}$$

Ebenso findet man

$$\sinh \nu z \frac{dz}{d\zeta} = \frac{1}{2\pi i} \sum_{k=0}^{n-1} \zeta^k \int\limits_C \frac{\sinh \nu t \, dt}{F(t)^{k+1}} + \frac{\zeta^n}{2\pi i} \int\limits_C \frac{\sinh \nu t \, dt}{F(t)^n (F(t)-\zeta)} \quad . \tag{44}$$

Da $F(t)$ eine ungerade Funktion von t ist, so enthält die Entwicklung von

$$\frac{\cosh \nu t}{F(t)^{k+1}}$$

nach steigenden Potenzen von t, falls k ungerade ist, nur gerade Potenzen von t. Hieraus folgt, mit Rücksicht auf den Residuensatz,

$$\int\limits_C \frac{\cosh \nu t \, dt}{F(t)^{k+1}} = \int\limits_{(0+)} \frac{\cosh \nu t \, dt}{F(t)^{k+1}} = 0.$$

für ungerade k. Auf analoge Weise findet man, falls k gerade ist,

$$\int_C \frac{\sinh \nu t\, dt}{F(t)^{k+1}} = 0.$$

Man bekommt nun (41), wenn man in (43) $n = 2N$ und (42), wenn man in (44) $n = 2N + 1$ setzt.

Hilfssatz 6. *Ist N ganz rational $\geqq 0$, $F(t) \neq d$ für alle Punkte t von C und d unabhängig von t, so ist, wenn b_1 und b_2 unbeschränkt wachsen, falls $N > \frac{|\Re(\nu)|}{2q} - \frac{1}{2}$ ist,*

$$\int_C \frac{\cosh \nu t\, dt}{F(t)^{2N}(F(t)-d)} = \frac{2i\cos\frac{\nu\pi}{2q}}{(-1)^N p^{2N-1}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cosh \nu x\, dx}{(\cosh qx)^{2N-1}(p^2\cosh^2 qx + d^2)} \quad (45)$$

und, falls $N > \frac{|\Re(\nu)|}{2q} - 1$ ist,

$$\int_C \frac{\sinh \nu t\, dt}{F(t)^{2N+1}(F(t)-d)} = \frac{2i\sin\frac{\nu\pi}{2q}}{(-1)^N p^{2N}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cosh \nu x\, dx}{(\cosh qx)^{2N}(p^2\cosh^2 qx + d^2)} \quad (46)$$

Beweis. Aus den Voraussetzungen folgt, dass im Integral

$$\int_C \frac{\cosh \nu t\, dt}{F(t)^{2N}(F(t)-d)}$$

die Beiträge der vertikalen Seiten von C nach Null streben, falls b_1 und b_2 unbeschränkt zunehmen. Also ist, wenn R_1 und R_2 von links nach rechts durchlaufen werden,

$$\int_C \frac{\cosh \nu t\, dt}{F(t)^{2N}(F(t)-d)} = \left(-\int_{R_1} + \int_{R_2}\right) \frac{\cosh \nu t\, dt}{F(t)^{2N}(F(t)-d)}. \quad . \quad . \quad (47)$$

Ebenso hat man

$$\int_C \frac{\sinh \nu t\, dt}{F(t)^{2N+1}(F(t)-d)} = \left(-\int_{R_1} + \int_{R_2}\right) \frac{\sinh \nu t\, dt}{F(t)^{2N+1}(F(t)-d)}. \quad . \quad . \quad (48)$$

Setzt man $t = x \pm i\frac{\pi}{2q}$, je nachdem t auf R_1 oder auf R_2 liegt, so ist wegen

$$\cosh \nu\left(x \pm \frac{i\pi}{2q}\right) = \cosh \nu x \cos\frac{\nu\pi}{2q} \pm i \sinh \nu x \sin\frac{\nu\pi}{2q},$$

$$\sinh q\left(x \pm \frac{i\pi}{2q}\right) = \pm i \cosh qx$$

und (40)

$$\int\limits_{R_1} \frac{\cosh \nu t\, dt}{F(t)^{2N}(F(t)-d)} = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{\left(\cosh \nu x \cos \frac{\nu\pi}{2q} + i \sinh \nu x \sin \frac{\nu\pi}{2q}\right) dx}{(ip)^{2N}(\cosh qx)^{2N}(ip \cosh qx - d)} =$$

$$\frac{\cos \frac{\nu\pi}{2q}}{(-1)^N p^{2N}} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{\cosh \nu x\, dx}{(\cosh qx)^{2N}(ip \cosh qx - d)}.$$

Ebenso hat man

$$\int\limits_{R_2} \frac{\cosh \nu t\, dt}{F(t)^{2N}(F(t)-d)} = \frac{\cos \frac{\nu\pi}{2q}}{(-1)^N p^{2N}} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{\cosh \nu x\, dx}{(\cosh qx)^{2N}(-ip \cosh qx - d)},$$

also

$$\left(-\int\limits_{R_1} + \int\limits_{R_2}\right) \frac{\cosh \nu t\, dt}{F(t)^{2N}(F(t)-d)} =$$

$$\frac{2i \cos \frac{\nu\pi}{2q}}{(-1)^N p^{2N-1}} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{\cosh \nu x\, dx}{(\cosh qx)^{2N-1}(p^2 \cosh^2 qx + d^2)}.$$

Hieraus und aus (47) folgt (45).

Auf analoge Weise findet man

$$\left(-\int\limits_{R_1} + \int\limits_{R_2}\right) \frac{\sinh \nu t\, dt}{F(t)^{2N+1}(F(t)-d)} =$$

$$-\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{\left(\sinh \nu x \cos \frac{\nu\pi}{2q} + i \cosh \nu x \sin \frac{\nu\pi}{2q}\right) dx}{(ip)^{2N+1}(\cosh qx)^{2N+1}(ip \cosh qx - d)} +$$

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{\left(\sinh \nu x \cos \frac{\nu\pi}{2q} - i \cosh \nu x \sin \frac{\nu\pi}{2q}\right) dx}{(-ip)^{2N+1}(\cosh qx)^{2N+1}(-ip \cosh qx - d)} =$$

$$\frac{2i \sin \frac{\nu\pi}{2q}}{(-1)^N p^{2N}} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{\cosh \nu x\, dx}{(\cosh qx)^{2N}(p^2 \cosh^2 qx + d^2)},$$

woraus, mit Rücksicht auf (48), Beziehung (46) folgt.

Hilfssatz 7. *Ist N ganz rational* $> \frac{|\Re(\nu)|}{2q} - \frac{1}{2}$, *so ist, falls* $\frac{\nu}{2q} + \frac{1}{2}$ *keine ganze rationale Zahl ist,*

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cosh \nu x\, dx}{(\cosh qx)^{2N+1}} = \frac{(-1)^N \pi}{q^{2N+1}(2N)!\cos\frac{\nu\pi}{2q}} \prod_{h=0}^{N-1} (\nu^2 - (2h+1)^2 q^2). \quad (49)$$

und, falls $\frac{\nu}{2q} + \frac{1}{2}$ *ganz rational ist,*

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cosh \nu x\, dx}{(\cosh qx)^{2N+1}} = \frac{(-1)^{N+k+1}(8k+4)}{q^{2N-1}(2N)!} \prod_{\substack{h=0 \\ h \neq k}}^{N-1} (\nu^2 - (2h+1)^2 q^2), \quad (50)$$

worin $k = \frac{|\nu|}{2q} - \frac{1}{2}$ [1].

Beweis. Setzt man in (45) von Hilfssatz 6 $p = 1$ und $d = 0$, so findet man

$$\int_C \frac{\cosh \nu t\, dt}{(\sinh qt)^{2N+1}} = \frac{2i}{(-1)^N} \cos\frac{\nu\pi}{2q} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cosh \nu x\, dx}{(\cosh qx)^{2N+1}}.$$

Da $t = 0$ die einzige im Innern von C liegende Nullstelle von $\sinh qt$ ist, hat man also

$$\int_{(0+)} \frac{\cosh \nu t\, dt}{(\sinh qt)^{2N+1}} = \frac{2i}{(-1)^N} \cos\frac{\nu\pi}{2q} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cosh \nu x\, dx}{(\cosh qx)^{2N+1}}.$$

Hieraus ergibt sich, wegen (38) von Hilfssatz 3 mit $a = q$ und $m = 2N$,

$$\cos\frac{\nu\pi}{2q} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cosh \nu x\, dx}{(\cosh qx)^{2N+1}} = \frac{(-1)^N \pi}{q^{2N+1}(2N)!} \prod_{h=0}^{N-1} (\nu^2 - (2h+1)^2 q^2), \quad (51)$$

womit (49) bewiesen ist.

Ist ν reell und $\frac{|\nu|}{2q} = k + \frac{1}{2}$ (k ganz rational), so sind beide Seiten von (51) gleich Null, die linke Seite wegen des Faktors $\cos\frac{\nu\pi}{2q}$, die rechte Seite wegen des Faktors $\nu^2 - (2k+1)^2 q^2$. Da

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cosh \nu x\, dx}{(\cosh qx)^{2N+1}}$$

---

[1]) Man hat also k ganz rational $\geqq 0$ und $N > k$.

eine stetige Funktion von ν ist, und

$$\lim_{\substack{|\nu| \neq 2qk+q \\ |\nu| \to 2qk+q}} \frac{\nu^2 - (2k+1)^2 q^2}{\cos \frac{\nu\pi}{2q}} = \frac{(-1)^{k+1}\, 4 q^2 (2k+1)}{\pi}$$

ist, folgt dann Formel (50) von Hilfssatz 7 aus (51).

Hilfssatz 8. *Ist* N *ganz rational* $> \frac{|\Re(\nu)|}{2q} - 1$, *so ist, falls* $\frac{\nu}{2q}$ *keine ganze rationale Zahl ist,*

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cosh \nu x\, dx}{(\cosh qx)^{2N+2}} = \frac{(-1)^N \pi \nu}{q^{2N+2}(2N+1)!\, \sin \frac{\nu\pi}{2q}} \prod_{h=0}^{N-1} (\nu^2 - (2h+2)^2 q^2) \quad (52)$$

und, falls $\frac{\nu}{2q}$ *eine ganze rationale Zahl* $\neq 0$ *ist,*

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cosh \nu x\, dx}{(\cosh qx)^{2N+2}} = \frac{(-1)^{N+k}\, 16 k^2}{q^{2N-1}(2N+1)!} \prod_{\substack{h=0 \\ h \neq k-1}}^{N-1} (\nu^2 - (2h+2)^2 q^2), \quad . \quad (53)$$

worin $k = \frac{|\nu|}{2q}$ *(*k *ganz rational* > 0*); weiter hat man, falls* N *ganz rational* $\geqq 0$ *ist,*

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{(\cosh qx)^{2N+2}} = \frac{2^{2N+1}(N!)^2}{q(2N+1)!} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (54)$$

Beweis. Setzt man in (46) von Hilfssatz 6 $p = 1$ und $d = 0$ so findet man

$$\int_C \frac{\sinh \nu t\, dt}{(\sinh qt)^{2N+2}} = \frac{2i}{(-1)^N} \sin \frac{\nu\pi}{2q} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cosh \nu x\, dx}{(\cosh qx)^{2N+2}}.$$

Also hat man, wegen (39) von Hilfssatz 3 mit $a = q$ und $m = 2N+1$ angewendet,

$$\sin \frac{\nu\pi}{2q} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cosh \nu x\, dx}{(\cosh qx)^{2N+2}} = \frac{(-1)^N \pi \nu}{q^{2N+2}(2N+1)!} \prod_{h=0}^{N-1} (\nu^2 - (2h+2)^2 q^2), \quad (55)$$

womit (52) bewiesen ist.

Ist $\frac{\nu}{2q}$ ganz rational $\neq 0$ und $\frac{|\nu|}{2q} = k$ (k ganz rational > 0), so sind beide Seiten von (55) gleich Null, die linke Seite wegen des Faktors

$sin\,\frac{\nu\pi}{2q}$, die rechte Seite wegen des Faktors $\nu^2 - 4\,k^2\,q^2$. Da

$$\lim_{\substack{|\nu| \neq 2qk \\ |\nu| \to 2qk}} \frac{\nu\,(\nu^2 - 4\,k^2\,q^2)}{sin\,\frac{\nu\pi}{2q}} = (-1)^k\,\frac{16\,k^2\,q^3}{\pi}$$

ist, folgt dann aus (55) Formel (53) von Hilfssatz 8. Werden beide Seiten von (55) durch $sin\,\frac{\nu\pi}{2q}$ gekürzt, und strebt ν nach Null, so erhält man (54).

Hilfssatz 9. *Ist* α *reell,* N *ganz rational* $> |\alpha| - \frac{1}{2}$, *so ist, falls* $\alpha + \frac{1}{2}$ *nicht ganz rational ist,*

$$\int\limits_0^\infty e^{-\zeta^2}\,\zeta^{2N}\,d\zeta \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{cosh\,\alpha x\,dx}{\left(cosh\,\frac{x}{2}\right)^{2N+1}} = \frac{(-1)^N\,\pi\sqrt{\pi}}{N!\,2^{2N}\,cos\,\alpha\pi} \prod_{h=0}^{N-1} (4\,\alpha^2 - (2\,h+1)^2) \quad (56)$$

und, falls $|\alpha| = k + \frac{1}{2}$ (k *ganz rational) ist,*

$$\left.\begin{aligned} &\int\limits_0^\infty e^{-\zeta^2}\,\zeta^{2N}\,d\zeta \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{cosh\,\alpha x\,dx}{\left(cosh\,\frac{x}{2}\right)^{2N+1}} = \\ &\frac{(-1)^{N+k+1}\,(8\,k+4)\sqrt{\pi}}{N!\,2^{2N}} \prod_{\substack{h=0 \\ h \neq k}}^{N-1} (4\,\alpha^2 - (2\,h+1)^2). \end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad (57)$$

Beweis. Setzt man in Hilfssatz 7 $\nu = \alpha$ und $q = \frac{1}{2}$, dann findet man, falls $\alpha + \frac{1}{2}$ nicht ganz rational ist,

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{cosh\,\alpha x\,dx}{\left(cosh\,\frac{x}{2}\right)^{2N+1}} = \frac{(-1)^N\,2\pi}{(2N)!\,cos\,\alpha\pi} \prod_{h=0}^{N-1} (4\,\alpha^2 - (2\,h+1)^2)$$

und, falls $|\alpha| = k + \frac{1}{2}$ (k ganz rational) ist,

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{cosh\,\alpha x\,dx}{\left(cosh\,\frac{x}{2}\right)^{2N+1}} = \frac{(-1)^{N+k+1}\,(16\,k+8)}{(2N)!} \prod_{\substack{h=0 \\ h \neq k}}^{N-1} (4\,\alpha^2 - (2\,h+1)^2).$$

Wegen

$$\int\limits_0^\infty e^{-\zeta^2}\,\zeta^{2N}\,d\zeta = \tfrac{1}{2}\,\Gamma(N+\tfrac{1}{2}) = \frac{(2N)!\sqrt{\pi}}{2^{2N+1}\,N!}$$

folgen hieraus (56) und (57).

Hilfssatz 10. *Ist a reell $\neq 0$, N ganz rational $> |a| - 1$, so ist, falls a nicht ganz rational ist,*

$$\int_0^\infty e^{-\zeta^2} \zeta^{2N+1} d\zeta \int_{-\infty}^\infty \frac{\cosh ax\, dx}{\left(\cosh \frac{x}{2}\right)^{2N+2}} = \frac{(-1)^N N!\, 2\pi a}{(2N+1)!\sin a\pi} \prod_{h=0}^{N-1} (4a^2 - (2h+2)^2) \quad (58)$$

und, falls $|a| = k$ (k ganz rational > 0) ist,

$$\int_0^\infty e^{-\zeta^2} \zeta^{2N+1} d\zeta \int_{-\infty}^\infty \frac{\cosh ax\, dx}{\left(\cosh \frac{x}{2}\right)^{2N+2}} = \frac{(-1)^{N+k} N!\, 16 k^2}{(2N+1)!} \prod_{\substack{h=0 \\ h \neq k-1}}^{N-1} (4a^2 - (2h+2)^2). \quad (59)$$

Weiter ist, falls N ganz rational $\geqq 0$ ist,

$$\int_0^\infty e^{-\zeta^2} \zeta^{2N+1} d\zeta \int_{-\infty}^\infty \frac{dx}{\left(\cosh \frac{x}{2}\right)^{2N+2}} = \frac{2^{2N+1} (N!)^3}{(2N+1)!} \quad . \quad . \quad . \quad (60)$$

Beweis. Setzt man in Hilfssatz 8 $\nu = a$ und $q = \frac{1}{2}$ dann findet man, falls a nicht ganz rational ist,

$$\int_{-\infty}^\infty \frac{\cosh ax\, dx}{\left(\cosh \frac{x}{2}\right)^{2N+2}} = \frac{(-1)^N 4\pi a}{(2N+1)!\sin a\pi} \prod_{h=0}^{N-1} (4a^2 - (2h+2)^2)$$

und, falls $|a| = k$ (k ganz rational > 0) ist,

$$\int_{-\infty}^\infty \frac{\cosh ax\, dx}{\left(\cosh \frac{x}{2}\right)^{2N+2}} = \frac{(-1)^{N+k} 32 k^2}{(2N+1)!} \prod_{\substack{h=0 \\ h \neq k-1}}^{N-1} (4a^2 - (2h+2)^2).$$

Ist N ganz rational $\geqq 0$. dann hat man

$$\int_{-\infty}^\infty \frac{dx}{\left(\cosh \frac{x}{2}\right)^{2N+2}} = \frac{2^{2N+2} (N!)^2}{(2N+1)!}.$$

Wegen

$$\int_0^\infty e^{-\zeta^2} \zeta^{2N+1} d\zeta = \frac{1}{2} N!$$

folgen hieraus (58), (59) und (60).

Hilfssatz 11. *Ist a reell, N ganz rational $> \frac{|a|}{2} - \frac{1}{2}$, so ist, falls a keine ungerade ganze Zahl ist,*

$$\int_0^\infty e^{-u} u^{2N} du \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cosh ax\, dx}{(\cosh x)^{2N+1}} = \frac{(-1)^N \pi}{\cos \frac{a\pi}{2}} \prod_{h=0}^{N-1} (a^2 - (2h+1)^2) \,. \qquad (61)$$

und, falls $|a| = 2k + 1$ (k ganz rational) ist,

$$\int_0^\infty e^{-u} u^{2N} du \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cosh ax\, dx}{(\cosh x)^{2N+1}} = (-1)^{N+k+1} (8k+4) \prod_{\substack{h=0 \\ h \neq k}}^{N-1} (a^2 - (2h+1)^2) \,. \qquad (62)$$

Beweis. Setzt man in Hilfssatz 7 $\nu = a$ und $q = 1$, dann findet man, falls a keine ungerade ganze Zahl ist,

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cosh ax\, dx}{(\cosh x)^{2N+1}} = \frac{(-1)^N \pi}{(2N)!\, \cos \frac{a\pi}{2}} \prod_{h=0}^{N-1} (a^2 - (2h+1)^2)$$

und, falls $|a| = 2k + 1$ (k ganz rational) ist,

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cosh ax\, dx}{(\cosh x)^{2N+1}} = \frac{(-1)^{N+k+1} (8k+4)}{(2N)!} \prod_{\substack{h=0 \\ h \neq k}}^{N-1} (a^2 - (2h+1)^2).$$

Wegen

$$\int_0^\infty e^{-u} u^{2N} du = (2N)!$$

folgen hieraus (61) und (62).

Hilfssatz 12. *Ist a reell $\neq 0$ und N ganz rational $> \frac{|a|}{2} - 1$, so ist, falls a keine gerade ganze Zahl ist,*

$$\int_0^\infty e^{-u} u^{2N+1} du \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cosh ax\, dx}{(\cosh x)^{2N+2}} = \frac{(-1)^N \pi a}{\sin \frac{a\pi}{2}} \prod_{h=0}^{N-1} (a^2 - (2h+2)^2) \qquad (63)$$

und, falls $|a| = 2k$ (k ganz rational > 0) ist,

$$\int_0^\infty e^{-u} u^{2N+1} du \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cosh ax\, dx}{(\cosh x)^{2N+2}} = (-1)^{N+k}\, 16 k^2 \prod_{\substack{h=0 \\ h \neq k-1}}^{N-1} (a^2 - (2h+2)^2) \qquad (64)$$

Weiter ist, falls N ganz rational $\geqq 0$ ist,

$$\int_0^\infty e^{-u}\, u^{2N+1}\, du \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{(\cosh x)^{2N+2}} = 2^{2N+1}\,(N!)^2 \quad . \quad . \quad . \quad (65)$$

Beweis. Setzt man in Hilfssatz 8 $\nu = a$ und $q = 1$, dann findet man, falls a keine gerade ganze Zahl ist,

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cosh a x\, dx}{(\cosh x)^{2N+2}} = \frac{(-1)^N \pi a}{(2N+1)!\, \sin \frac{a\pi}{2}} \prod_{h=0}^{N-1} (a^2 - (2h+2)^2)$$

und, falls $|a| = 2k$ (k ganz rational > 0) ist,

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cosh a x\, dx}{(\cosh x)^{2N+2}} = \frac{(-1)^{N+k}\, 16 k^2}{(2N+1)!} \prod_{\substack{h=0 \\ h \neq k-1}}^{N-1} (a^2 - (2h+2)^2).$$

Ist N ganz rational $\geqq 0$, so hat man

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{(\cosh x)^{2N+2}} = \frac{2^{2N+1}\,(N!)^2}{(2N+1)!}.$$

Wegen

$$\int_0^\infty e^{-u}\, u^{2N+1}\, du = (2N+1)!$$

folgen hieraus (63), (64) und (65).

Hilfssatz 13. *Es sei* $w \neq 0$, $-\pi < \arg w < 2\pi$, $\arg w^{1/2} = \frac{1}{2} \arg w$,

$$\mathit{Max}\left(-\frac{\pi}{2}, -\frac{3\pi}{2} + \arg w\right) < \mu < \mathit{Min}\left(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} + \arg w\right), \quad . \quad (66)$$

dann kann:

1. *Für jedes ganze* $N > |\Re(\nu)| - \frac{1}{2}$ *die Funktion* $H_\nu^{(1)}(w)$ *auf die Gestalt*

$$H_\nu^{(1)}(w) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\, \frac{e^{i\left(w - \frac{1}{2}\nu\pi - \frac{\pi}{4}\right)}}{w^{1/2}} \left\{ \sum_{l=0}^{N-1} \frac{(i)^l \prod_{h=0}^{l-1} (4\nu^2 - (2h+1)^2)}{l!\,(8w)^l} + \frac{(-i)^N \cos \nu\pi}{\pi \sqrt{\pi}\,(2w)^N} \int_0^{\infty e^{\frac{i\mu}{2}}} e^{-\zeta^2} \zeta^{2N}\, d\zeta \int_{-\infty}^{\infty} \frac{2 i w \cosh^2 \frac{x}{2} \cosh \nu x\, dx}{\left(\cosh \frac{x}{2}\right)^{2N+1} \left(2 i w \cosh^2 \frac{x}{2} - \zeta^2\right)} \right\} \quad . \quad (67)$$

gebracht werden.

2. *Für jedes ganze* $N > |\Re(\nu)| - 1$ *die in* (13) *definierte Funktion* $G_\nu(w)$ *auf die Gestalt*

$$\left.\begin{aligned} G_\nu(w) &= e^{iw}\, 2\nu \sum_{l=0}^{N-1} \frac{(i)^{l+1}\, l!\, \prod_{h=0}^{l-1} \left(4\nu^2 - (2h+2)^2\right)}{(2w)^{l+1}\,(2l+1)!} \\ &- \frac{e^{iw} \sin \nu\pi}{\pi (i)^{N+1} (2w)^{N+1}} \int_0^{\infty e^{\frac{i\mu}{2}}} e^{-\zeta^2} \zeta^{2N+1}\, d\zeta \int_{-\infty}^{\infty} \frac{2iw \cosh^2 \frac{x}{2} \cosh \nu x\, dx}{\left(\cosh \frac{x}{2}\right)^{2N+2} \left(2iw\cosh^2 \frac{x}{2} - \zeta^2\right)} \end{aligned}\right\} \quad (68)$$

gebracht werden.

Beweis. 1. Wir gehen von der Integraldarstellung (30) von $H_\nu^{(1)}(w)$ aus und setzen

$$\varphi(z) = iw \cosh z, \quad \ldots \ldots \ldots \quad (69)$$

$z = x + iy$ und benutzen die Methode der Sattelpunkte [1]). Wir betrachten nur den Streifen der z-Ebene zwischen den Geraden R_5 und R_6, worauf $y = \pi$ bez. $y = -\pi$ (einschliesslich R_5 und R_6). Der Punkt $z = 0$ ist ein Sattelpunkt von $\varphi(z)$. Die Gleichung der Kurve $\Im(e^{-i\mu}\varphi(z)) = \Im(e^{-i\mu}\varphi(0))$ ist

$$(\cosh x \cos y - 1) \cos(\arg w - \mu) - \sinh x \sin y \sin(\arg w - \mu) = 0 \;. \quad (70)$$

Diese Kurve hat einen Doppelpunkt in $z = 0$ und ist symmetrisch in Bezug auf diesen Punkt; die zwei Tangenten in $z = 0$ bilden Winkel von $\frac{\pi}{4} - \frac{1}{2} \arg w + \frac{\mu}{2}$ bez. $\frac{3\pi}{4} - \frac{1}{2} \arg w + \frac{\mu}{2}$ mit der positiven x-Achse.

Ist $\arg w - \mu = \frac{\pi}{2}$, dann besteht der im betrachteten Streifen liegende Teil der Kurve (70) aus der reellen und der imaginären Achse und ausserdem aus den Geraden R_5 und R_6.

Ist $\arg w - \mu \neq \frac{\pi}{2}$, dann schneidet die Gerade $x = 0$ die Kurve (70) zwischen R_5 und R_6 nur im Punkte $z = 0$. Die Gerade $x = a$ schneidet, falls $a \neq 0$ und $\arg w - \mu \neq \frac{\pi}{2}$ ist, die Kurve (70) zwischen R_5 und R_6 in zwei Punkte z_1 und z_2, von denen der eine zwischen der reellen Achse und R_5, der andre zwischen der reellen Achse und R_6 liegt. Denn setzt man die linke Seite von (70) gleich $g(x, y)$, dann hat [2]) $g(a, y)$ höchstens zwei Nullstellen im Intervall $-\pi < y < \pi$; $g(a, \pi)$ und $g(a, -\pi)$ haben dasselbe Vorzeichen wie $-\cos(\arg w - \mu)$, und $g(a, 0)$ hat dasselbe Vorzeichen wie $\cos(\arg w - \mu)$, sodass [3]) $g(a, y)$ im Intervall

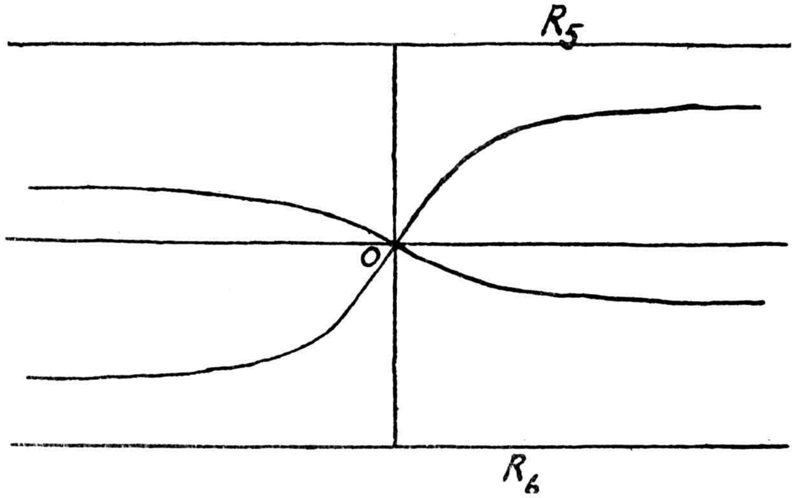
[1]) Ein Punkt z_0 heisst Sattelpunkt von $f(z)$, falls $f'(z_0) = 0$ ist.

[2]) Die Funktion $\chi(y) = A_1 \cos y + A_2 \sin y + A_3$ hat, falls A_1, A_2 und A_3 reell sind, höchstens zwei Nullstellen im Intervall $-\pi < y < \pi$.

[3]) Wegen (66) ist $\cos(\arg w - \mu) \neq 0$, falls $\arg w - \mu \neq \frac{\pi}{2}$ ist.

$-\pi < y < \pi$ zwei Nullstellen besitzt, von denen die eine im Intervall $-\pi < y < 0$, die andre im Intervall $0 < y < \pi$ liegt. Ist $arg\, w - \mu \neq \frac{\pi}{2}$, dann besteht also der im betrachteten Streifen liegende Teil der Kurve (70) aus zwei Zweigen, die die reelle Achse nur im Punkte $z = 0$ schneiden und die Geraden R_5 und R_6 weder schneiden noch berühren.

Aus (70) geht hervor, dass bei unbeschränkt wachsendem x y nach einem Grenzwert η strebt mit $\cos(\eta + arg\, w - \mu) = 0$. Bezeichnen $\infty + i y_1$ und $\infty + i y_2\, (y_1 > y_2)$ die im Unendlichen liegenden Punkte der obengemeinten Zweige, dann sind also y_1 und y_2 Nullstellen von $\cos(y + arg\, w - \mu) = 0$. Hieraus ergibt sich: Ist $-\frac{\pi}{2} < arg\, w - \mu < \frac{\pi}{2}$, dann ist $y_1 = -arg\, w + \mu + \frac{\pi}{2}$, $y_2 = -arg\, w + \mu - \frac{\pi}{2}$; ist $\frac{\pi}{2} < arg\, w - \mu < \frac{3\pi}{2}$, dann ist $y_1 = -arg\, w + \mu + \frac{3\pi}{2}$, $y_2 = -arg\, w + \mu + \frac{\pi}{2}$. Stets verbindet also einer der Zweige von (70) den Punkt $z = 0$ mit



$\infty + i\left(\frac{\pi}{2} - arg\, w + \mu\right)$. Wir werden diesen Zweig L nennen. Ist $arg\, w - \mu = \frac{\pi}{2}$, dann ist L die positive x-Achse. Ist $\frac{\pi}{2} < arg\, w - \mu < \frac{3\pi}{2}$, dann ist $\frac{\pi}{2} - arg\, w + \mu < 0$; da L die reelle Achse nur in $z=0$ schneidet, liegt also L, falls $x > 0$ ist, zwischen der reellen Achse und R_6, sodass L diejenige Zweige der Kurve (70) ist, welche in $z = 0$ einen Winkel von $\frac{\pi}{4} - \frac{1}{2} arg\, w + \frac{\mu}{2}$ mit der positiven x-Achse bildet. Ist $-\frac{\pi}{2} < arg\, w - \mu < \frac{\pi}{2}$ dann liegt L, falls $x > 0$ ist, zwischen der reellen Achse und R_5, sodass auch dann L diejenige Zweige von (70) ist, die in $z = 0$ einen Winkel von $\frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}\, arg\, w + \frac{\mu}{2}$ mit der positiven x-Achse bildet.

Nehmen wir in (30) L als Integrationsweg, dann erhalten wir wegen (69)

$$H_\nu^{(1)}(w) = \frac{2\, e^{i(w - \frac{1}{2}\nu\pi)}}{\pi i} \int_L e^{\varphi(z) - \varphi(0)} \cosh \nu z \, dz. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (71)$$

Ist $f(z)$ eine analytische Funktion von z, dann ändert sich bekanntlich $\Re f(z)$ monoton auf den Teilen der Kurve $\Im f(z) = 0$, die keinen Sattelpunkt von $f(z)$ enthalten.

Wird jetzt

$$\zeta^2 = \varphi(0) - \varphi(z) = -iw(\cosh z - 1) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (72)$$

gesetzt, dann ist für jedes z auf L $\Im(e^{-i\mu}(\varphi(0) - \varphi(z))) = 0$; im Punkte $z = 0$ ist $\zeta^2 = 0$, und im Punkte $z = \infty + i\left(\frac{\pi}{2} - \arg w + \mu\right)$ ist $\zeta^2 = \infty e^{i\mu}$. Da der Koordinatenursprung der einzige auf L liegende Sattelpunkt von $\varphi(z)$ ist, ändert sich also $\zeta^2 e^{-i\mu}$ monoton von 0 nach ∞, wenn z den Zweig L von 0 nach $\infty + i\left(\frac{\pi}{2} - \arg w + \mu\right)$ durchläuft.

Wenn man (siehe (72))

$$\zeta = \Phi(z) = e^{-\frac{\pi i}{4}} \sqrt{2}\, w^{1/2} \sinh \frac{z}{2} \qquad (\arg w^{1/2} = \tfrac{1}{2} \arg w) \quad . \quad . \quad (73)$$

setzt, dann ist, da die Tangente von L in $z = 0$ einen Winkel von $\frac{\pi}{4} - \frac{1}{2} \arg w + \frac{\mu}{2}$ mit der positiven Achse bildet, auch $\zeta e^{-\frac{i\mu}{2}} \geqq 0$ für jedes z auf L. Man findet daher wegen (71) und (72)

$$H_\nu^{(1)}(w) = \frac{2\, e^{i(w - \frac{1}{2}\nu\pi)}}{\pi i} \int_0^{\infty e^{\frac{i\mu}{2}}} e^{-\zeta^2} \cosh \nu z \frac{dz}{d\zeta} d\zeta \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (74)$$

Wir betrachten nun die Kurve C_1, bestehend aus R_5, R_6 und den Geraden $x = d_1$ und $x = -d_2$, worin d_1 und d_2 unbeschränkt wachsen ($x = d_1$ verbindet $\infty - \pi i$ mit $\infty + \pi i$, $x = -d_2$ verbindet $-\infty - \pi i$ mit $-\infty + \pi i$). Wir wenden (41) von Hilfssatz 5 an mit $C = C_1$ und $F(z) = \Phi(z)$, also mit $p = e^{-\frac{\pi i}{4}} \sqrt{2}\, w^{1/2}$ und $q = \frac{1}{2}$. Wir finden dann für jedes z im Innern von C_1

$$\cosh \nu z \frac{dz}{d\zeta} = \frac{1}{2\pi i} \sum_{l=0}^{N-1} \zeta^{2l} \int_{C_1} \frac{\cosh \nu t \, dt}{\Phi(t)^{2l+1}} + \frac{\zeta^{2N}}{2\pi i} \int_{C_1} \frac{\cosh \nu t \, dt}{\Phi(t)^{2N}(\Phi(t) - \zeta)}.$$

Aus Hilfssatz 4 folgt, dass $\Phi(t) \neq \Phi(z)$ ist, falls t auf C_1 und z im Innern von C_1 liegt. Man hat somit wegen (45) von Hilfssatz 6 mit

$p = e^{-\frac{\pi i}{4}} \sqrt{2}\, w^{1/2}$, $q = \frac{1}{2}$ und $d = \Phi(z) = \zeta$ für jedes z innerhalb C_1 und für jedes ganze $N > |\Re(\nu)| - \frac{1}{2}$

$$\int\limits_{C_1} \frac{\cosh \nu t\, dt}{\Phi(t)^{2N}(\Phi(t)-\zeta)} = - \frac{e^{-\frac{\pi i}{4}}(-i)^N \cos \nu\pi}{2^{\frac{2N-1}{2}} w^{\frac{2N+1}{2}}} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{2\, iw \cosh^2 \frac{x}{2} \cosh \nu x\, dx}{\left(\cosh \frac{x}{2}\right)^{2N+1} \left(2\, iw \cosh^2 \frac{x}{2} - \zeta^2\right)}.$$

Weiter gilt wegen (38) von Hilfssatz 3, mit $\alpha = \frac{1}{2}$ und $m = 2l$ angewendet,

$$\int\limits_{C_1} \frac{\cosh \nu t\, dt}{\Phi(t)^{2l+1}} = \frac{e^{\frac{\pi i}{4}(2l+1)}}{2^{\frac{2l+1}{2}} w^{\frac{2l+1}{2}}} \int\limits_{(0+)} \frac{\cosh \nu t\, dt}{\left(\sinh \frac{t}{2}\right)^{2l+1}} =$$

$$\frac{4\pi i\, e^{\frac{\pi i}{4}(2l+1)}}{2^{\frac{2l+1}{2}} w^{\frac{2l+1}{2}} (2l)!} \prod_{h=0}^{l-1} (4\nu^2 - (2h+1)^2);$$

also

$$\cosh \nu z \frac{dz}{d\zeta} = \sum_{l=0}^{N-1} \frac{e^{\frac{\pi i}{4}} (i)^l \zeta^{2l}}{2^{\frac{2l-1}{2}} w^{\frac{2l+1}{2}} (2l)!} \prod_{h=0}^{l-1} (4\nu^2 - (2h+1)^2)$$

$$+ \frac{e^{\frac{\pi i}{4}} (-i)^N \zeta^{2N} \cos \nu\pi}{\pi\, 2^{\frac{2N+1}{2}} w^{\frac{2N+1}{2}}} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{2\, iw \cosh^2 \frac{x}{2} \cosh \nu x\, dx}{\left(\cosh \frac{x}{2}\right)^{2N+1} (2\, iw \cosh^2 \frac{x}{2} - \zeta^2)}.$$

Hieraus und aus (74) folgt, wegen

$$\int\limits_0^{\infty e^{\frac{i\mu}{2}}} e^{-\zeta^2} \zeta^{2l}\, d\zeta = \frac{(2l)!\sqrt{\pi}}{2^{2l+1}\, l!}$$

die erste Behauptung des Satzes

2. Wir gehen aus von der Definition (13) und nehmen als Integrationsweg die Kurve L. Wir erhalten dann wegen (69)

$$G_\nu(w) = \int\limits_L e^{iw \cosh z} \sinh \nu z\, dz = e^{iw} \int\limits_L e^{\varphi(z) - \varphi(0)} \sinh \nu z\, dz$$

oder, wenn wir (72) benutzen

$$G_\nu(w) = e^{iw} \int_0^{\infty e^{\frac{i\mu}{2}}} e^{-\zeta^2} \sinh \nu z \frac{dz}{d\zeta} d\zeta, \quad \ldots \ldots \quad (75)$$

worin $\zeta = \Phi(z)$ durch (73) definiert ist.

Wegen (42) von Hilfssatz 5 mit $C = C_1$ und $F(z) = \Phi(z)$ also $p = e^{-\frac{\pi i}{4}} \sqrt{2}\, w^{1/2}$ und $q = \frac{1}{2}$, hat man, falls z im Innern von C_1 liegt,

$$\sinh \nu z \frac{dz}{d\zeta} = \frac{1}{2\pi i} \sum_{l=0}^{N-1} \zeta^{2l+1} \int_{C_1} \frac{\sinh \nu t\, dt}{\Phi(t)^{2l+2}} + \frac{\zeta^{2N+1}}{2\pi i} \int_{C_1} \frac{\sinh \nu t\, dt}{\Phi(t)^{2N+1}(\Phi(t) - \zeta)}.$$

Wegen (46) von Hilfssatz 6, mit $p = e^{-\frac{\pi i}{4}} \sqrt{2}\, w^{1/2}$, $q = \frac{1}{2}$ und $d = \Phi(z) = \zeta$ angewendet, hat man für jedes z innerhalb C_1 und für jedes ganze $N > |\Re(\nu)| - 1$

$$\int_{C_1} \frac{\sinh \nu t\, dt}{\Phi(t)^{2N+1}(\Phi(t) - \zeta)} = \frac{-2 \sin \nu\pi}{(i)^N (2w)^{N+1}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{2iw \cosh^2 \frac{x}{2} \cosh \nu x\, dx}{\left(\cosh \frac{x}{2}\right)^{2N+2} \left(2iw \cosh^2 \frac{x}{2} - \zeta^2\right)}.$$

Weiter hat man wegen (39) von Hilfssatz 3, mit $a = \frac{1}{2}$ und $m = 2l + 1$ angewendet,

$$\int_{C_1} \frac{\sinh \nu t\, dt}{\Phi(t)^{2l+2}} = \frac{(i)^{l+1}}{(2w)^{l+1}} \int_{(0+)} \frac{\sinh \nu t\, dt}{\left(\sinh \frac{t}{2}\right)^{2l+2}} = \frac{8\pi\nu (i)^{l+2}}{(2w)^{l+1}(2l+1)!} \prod_{h=0}^{l-1} (4\nu^2 - (2h+2)^2)$$

also

$$\sinh \nu z \frac{dz}{d\zeta} = \sum_{l=0}^{N-1} \frac{4\nu (i)^{l+1} \zeta^{2l+1}}{(2w)^{l+1}(2l+1)!} \prod_{h=0}^{l-1} (4\nu^2 - (2h+2)^2)$$

$$- \frac{\zeta^{2N+1} \sin \nu\pi}{\pi (i)^{N+1} (2w)^{N+1}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{2iw \cosh^2 \frac{x}{2} \cosh \nu x\, dx}{\left(\cosh \frac{x}{2}\right)^{2N+2} \left(2iw \cosh^2 \frac{x}{2} - \zeta^2\right)}.$$

Wegen

$$\int_0^{\infty e^{\frac{i\mu}{2}}} e^{-\zeta^2} \zeta^{2l+1} d\zeta = \frac{l!}{2}$$

folgt hieraus und aus (75) die zweite Behauptung des Satzes.