

**Mathematics.** — *Asymptotische Entwicklungen von BESSELSchen, HANKELschen und verwandten Funktionen.* III <sup>1)</sup>. Von C. S. MEIJER.  
(Communicated by Prof. J. G. VAN DER CORPUT).

(Communicated at the meeting of September 24, 1932).

**Hilfssatz 14.** *Ist  $w \neq 0$ ,  $-\pi < \arg w < \pi$  und*

$$\text{Max} \left( -\frac{\pi}{2}, -\frac{\pi}{2} + \arg w \right) < \mu < \text{Min} \left( \frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} + \arg w \right). \quad (76)$$

dann kann:

1. Für jedes ganze  $N > \frac{|\Re(\nu)|}{2} - \frac{1}{2}$  die in (9) definierte Funktion  $A_\nu(w)$  auf die Gestalt

$$\left. \begin{aligned} A_\nu(w) = & \sum_{l=0}^{N-1} \frac{1}{w^{2l+1}} \prod_{h=0}^{l-1} (\nu^2 - (2h+1)^2) + \\ & \frac{\cos \frac{\nu\pi}{2}}{(-1)^N \pi w^{2N+1}} \int_0^\infty e^{-u} u^{2N} du \int_{-\infty}^\infty \frac{w^2 \cosh^2 x \cosh \nu x dx}{(\cosh x)^{2N+1} (w^2 \cosh^2 x + u^2)} \end{aligned} \right\} (77)$$

gebracht werden.

2. Für jedes ganze  $N > \frac{|\Re(\nu)|}{2} - 1$  die in (10) definierte Funktion  $B_\nu(w)$  auf die Gestalt

$$\left. \begin{aligned} B_\nu(w) = & \nu \sum_{l=0}^{N-1} \frac{1}{w^{2l+2}} \prod_{h=0}^{l-1} (\nu^2 - (2h+2)^2) + \\ & \frac{\sin \frac{\nu\pi}{2}}{(-1)^N \pi w^{2N+2}} \int_0^\infty e^{-u} u^{2N+1} du \int_{-\infty}^\infty \frac{w^2 \cosh^2 x \cosh \nu x dx}{(\cosh x)^{2N+2} (w^2 \cosh^2 x + u^2)} \end{aligned} \right\} (78)$$

gebracht werden.

*Beweis.* 1. Wir gehen von der Integraldarstellung (9) von  $A_\nu(w)$  aus. Wir setzen  $z = x + iy$  und betrachten nur den Streifen der  $z$ -Ebene zwischen den Geraden  $R_7$  und  $R_8$ , worauf  $y = \frac{\pi}{2}$  bez.  $y = -\frac{\pi}{2}$  (einschliesslich  $R_7$  und  $R_8$ ). Die Gleichung der Kurve  $\Im(e^{-i\mu} w \sinh z) = 0$  ist

$$\cos(\arg w - \mu) \cosh x \sin y + \sin(\arg w - \mu) \sinh x \cos y = 0. \quad (79)$$

<sup>1)</sup> Erste und zweite Mitteilung: These Proceedings, Vol. 35 (1932), S. 656–667 und S. 852–866.

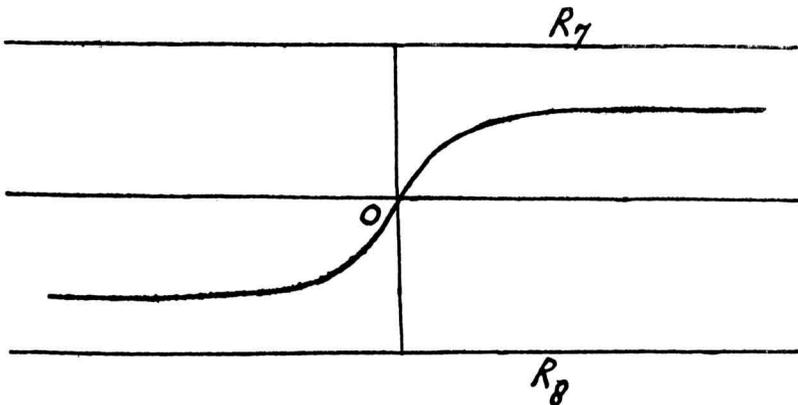
Diese Kurve geht durch  $z=0$  und ist symmetrisch in Bezug auf diesen Punkt. Die Tangente in  $z=0$  bildet einen Winkel gleich  $-\arg w + \mu$  mit der positiven Achse.

Ist  $\arg w - \mu = 0$ , dann besteht der im betrachteten Streifen liegende Teil der Kurve nur aus der reellen Achse.

Ist  $\arg w - \mu \neq 0$ , dann schneidet die Gerade  $x=0$  die Kurve (79) zwischen  $R_7$  und  $R_8$  nur im Punkte  $z=0$ . Die Gerade  $x=a$  schneidet, falls  $a > 0$  und  $0 < \arg w - \mu < \frac{\pi}{2}$  ist, die Kurve (79) nur in einem Punkt und dieser Punkt liegt zwischen der reellen Achse und  $R_8$ . Denn setzt man die linke Seite von (79) gleich  $f(x, y)$ , dann ist  $f(a, y) > 0$  für  $0 \leq y < \frac{\pi}{2}$  und  $f(a, y)$  monoton steigend im Intervall  $-\frac{\pi}{2} < y \leq 0$ .

Wegen  $f\left(a, -\frac{\pi}{2}\right) < 0$  und  $f(a, 0) > 0$  hat  $f(a, y)$  also eine und nur eine Nullstelle im Intervall  $-\frac{\pi}{2} < y < 0$ . Ebenso beweist man, dass die

Gerade  $x=a$ , falls  $a > 0$  und  $-\frac{\pi}{2} < \arg w - \mu < 0$  ist, die Kurve (79) nur in einem Punkt schneidet und zwar in einem Punkt zwischen der reellen Achse und  $R_7$ . Der zwischen  $R_7$  und  $R_8$  liegende Teil der Kurve (79) besteht also, falls  $\arg w - \mu \neq 0$  ist, nur aus einem Zweig, der die reelle Achse nur im Punkte  $z=0$  schneidet und  $R_7$  und  $R_8$  weder schneidet noch berührt. Aus (79) folgt, dass bei unbeschränkt wachsendem  $x$   $y$  nach einem Grenzwert  $\eta$  strebt mit  $\sin(\eta + \arg w - \mu) = 0$ ; wegen (76) ist  $-\frac{\pi}{2} < \arg w - \mu < \frac{\pi}{2}$ . Also sind die Punkte  $\infty - i(\arg w - \mu)$



und (wegen der Symmetrie in Bezug<sup>e</sup> auf  $z=0$ )  $-\infty + i(\arg w - \mu)$  die im Unendlichen liegenden Punkte des obengemeinten Zweiges.

Wir nennen jetzt  $N$  den Teil der Kurve (79), der die Punkte  $0$  und  $\infty - i(\arg w - \mu)$  verbindet. Ist  $\arg w - \mu = 0$ , dann ist  $N$  die positive Achse.

Nehmen wir nun in (9)  $N$  als Integrationsweg, dann bekommen wir

$$A_r(w) = \int_N e^{-w \sinh z} \cosh rz \, dz \dots \dots \dots (80)$$

Setzt man

$$u = \Psi(z) = w \sinh z, \dots \dots \dots (81)$$

dann ist  $e^{-i u} u$  reell für jedes  $z$  auf  $N$ ; im Punkte  $z = 0$  ist  $u = 0$ , und im Punkte  $z = \infty - i(\arg w - \mu)$  ist  $u = \infty e^{i \mu}$ . Da auf  $N$  kein Sattelpunkt von  $\sinh z$  liegt, läuft also  $u e^{-i u}$  monoton von 0 nach  $\infty$ , wenn  $z$  die Kurve  $N$  von 0 nach  $\infty - i(\arg w - \mu)$  durchläuft. Aus (80) und (81) folgt daher

$$A_r(w) = \int_0^{\infty e^{i \mu}} e^{-u} \cosh rz \frac{dz}{du} du \dots \dots \dots (82)$$

Wir betrachten nun die Kurve  $C_2$ , bestehend aus  $R_7, R_8$  und den Geraden  $x = k_1$  und  $x = -k_2$ , worin  $k_1$  und  $k_2$  unbeschränkt wachsen ( $x = k_1$  verbindet  $\infty - \frac{\pi i}{2}$  mit  $\infty + \frac{\pi i}{2}$ ,  $x = -k_2$  verbindet  $-\infty - \frac{\pi i}{2}$  mit  $-\infty + \frac{\pi i}{2}$ ). Wir wenden (41) von Hilfssatz 5 an mit  $C = C_2$  und  $F(z) = \Psi(z)$ , also mit  $p = w$  und  $q = 1$ , und finden dann für jedes  $z$  innerhalb  $C_2$

$$\cosh rz \frac{dz}{du} = \frac{1}{2 \pi i} \sum_{l=0}^{N-1} u^{2l} \int_{C_2} \frac{\cosh rt \, dt}{\Psi(t)^{2l+1}} + \frac{u^{2N}}{2 \pi i} \int_{C_2} \frac{\cosh rt \, dt}{\Psi(t)^{2N} (\Psi(t) - u)}$$

Aus Hilfssatz 4 folgt, dass  $\Psi(t) \neq \Psi(z)$  ist, falls  $t$  auf  $C_2$  und  $z$  innerhalb  $C_2$  liegt; daher ist wegen (45) von Hilfssatz 6, mit  $p = w$ ,  $q = 1$  und  $d = \Psi(z) = u$  angewendet, für jedes  $z$  innerhalb  $C_2$  und jedes ganze  $N > \frac{|\Re(\nu)|}{2} - \frac{1}{2}$

$$\int_{C_2} \frac{\cosh rt \, dt}{\Psi(t)^{2N} (\Psi(t) - u)} = \frac{2i \cos \frac{\nu \pi}{2}}{(-1)^N w^{2N+1}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{w^2 \cosh^2 x \cosh vx \, dx}{(\cosh x)^{2N+1} (w^2 \cosh^2 x + u^2)}$$

Aus (38) von Hilfssatz 3 mit  $a = 1$  und  $m = 2l$  ergibt sich

$$\int_{C_2} \frac{\cosh rt \, dt}{\Psi(t)^{2l+1}} = \frac{1}{w^{2l+1}} \int_{(0+)} \frac{\cosh rt \, dt}{(\sinh t)^{2l+1}} = \frac{2 \pi i}{w^{2l+1} (2l)!} \prod_{h=0}^{l-1} (\nu^2 - (2h + 1)^2)$$

also

$$\cosh v z \frac{dz}{du} = \sum_{l=0}^{N-1} \frac{u^{2l}}{w^{2l+1} (2l)!} \prod_{h=0}^{l-1} (v^2 - (2h+1)^2) + \frac{u^{2N} \cos \frac{v\pi}{2}}{(-1)^N \pi w^{2N+1}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{w^2 \cosh^2 x \cosh vx dx}{(\cosh x)^{2N+1} (w^2 \cosh^2 x + u^2)}.$$

Hieraus und aus (82) folgt wegen

$$\int_0^{\infty e^{i\theta}} e^{-u} u^{2l} du = (2l)!$$

die erste Behauptung von Hilfssatz 14.

2. Wir gehen von der Integraldarstellung (10) aus und nehmen als Integrationsweg die Kurve  $N$ . Wir erhalten dann

$$B_v(w) = \int_N e^{-w \sinh z} \sinh v z dz$$

also, wenn wir (81) benutzen,

$$B_v(w) = \int_0^{\infty e^{i\theta}} e^{-u} \sinh v z \frac{dz}{du} du, \dots \dots \dots (83)$$

worin  $u = \Psi(z)$  durch (81) definiert ist.

Wegen (42) von Hilfssatz 5, mit  $C = C_2$  und  $F(z) = \Psi(z)$ , also mit  $p = w$  und  $q = 1$  angewendet, hat man für jedes  $z$  innerhalb  $C_2$

$$\sinh v z \frac{dz}{du} = \frac{1}{2\pi i} \sum_{l=0}^{N-1} u^{2l+1} \int_{C_2} \frac{\sinh vt dt}{\Psi(t)^{2l+2}} + \frac{u^{2N+1}}{2\pi i} \int_{C_2} \frac{\sinh vt dt}{\Psi(t)^{2N+1} (\Psi(t) - u)}.$$

Wegen (46) von Hilfssatz 6, mit  $p = w$ ,  $q = 1$  und  $d = \Psi(z) = u$  angewendet, hat man für jedes  $z$  innerhalb  $C_2$  und jedes ganze  $N > \frac{|\Re(v)|}{2} - 1$

$$\int_{C_2} \frac{\sinh vt dt}{\Psi(t)^{2N+1} (\Psi(t) - u)} = \frac{2i \sin \frac{v\pi}{2}}{(-1)^N w^{2N+2}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{w^2 \cosh^2 x \cosh vx dx}{(\cosh x)^{2N+2} (w^2 \cosh^2 x + u^2)}.$$

Aus (39) von Hilfssatz 3 mit  $a = 1$  und  $m = 2l + 1$  folgt

$$\int_{C_2} \frac{\sinh vt dt}{\Psi(t)^{2l+2}} = \frac{1}{w^{2l+2}} \int_{(0+)} \frac{\sinh vt dt}{(\sinh t)^{2l+2}} = \frac{2\pi vi}{w^{2l+2} (2l+1)!} \prod_{h=0}^{l-1} (v^2 - (2h+2)^2);$$

also

$$\sinh v z \frac{dz}{du} = \sum_{l=0}^{N-1} \frac{v u^{2l+1}}{w^{2l+2} (2l+1)!} \prod_{h=0}^{l-1} (v^2 - (2h+2)^2) + \frac{u^{2N+1} \sin \frac{v\pi}{2}}{(-1)^N \pi w^{2N+2}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{w^2 \cosh^2 x \cosh vx \, dx}{(\cosh x)^{2N+2} (w^2 \cosh^2 x + u^2)}$$

Hieraus und aus (83) folgt wegen

$$\int_0^{\infty} e^{-u} u^{2l+1} \, du = (2l+1)!$$

die zweite Behauptung des Hilfssatzes.

**Hilfssatz 15.** Ist  $r > 0$ ,  $d \geq 0$  und  $-\pi < \beta < \pi$ , dann hat man

$$\left| \frac{re^{\beta i}}{re^{\beta i} + d} \right| \leq \frac{1}{|\sin \beta|}, \dots \dots \dots (84)$$

und sogar, falls  $-\frac{\pi}{2} \leq \beta \leq \frac{\pi}{2}$  ist,

$$\left| \frac{re^{\beta i}}{re^{\beta i} + d} \right| \leq 1. \dots \dots \dots (85)$$

*Beweis.* Man hat

$$\left. \begin{aligned} \left| \frac{re^{\beta i} + d}{re^{\beta i}} \right| &= \left| 1 + \frac{d}{r} e^{-\beta i} \right| = \sqrt{1 + 2 \frac{d}{r} \cos \beta + \frac{d^2}{r^2}} \\ &= \sqrt{\sin^2 \beta + \left( \frac{d}{r} + \cos \beta \right)^2} \geq |\sin \beta|, \end{aligned} \right\} \dots \dots (86)$$

womit (84) bewiesen ist. Ist  $-\frac{\pi}{2} \leq \beta \leq \frac{\pi}{2}$ , dann ist  $\cos \beta \geq 0$ , sodass dann aus (86) ausserdem noch folgt

$$\left| \frac{re^{\beta i} + d}{re^{\beta i}} \right| \geq 1.$$

Hiermit ist Hilfssatz 15 bewiesen.

**Hilfssatz 16.** Ist  $r > 0$ ,  $d \geq 0$  und  $-\pi < \beta < \pi$ , dann ist

$$0 \leq \arg \left( \frac{re^{\beta i}}{re^{\beta i} + d} \right) \leq \beta, \text{ falls } 0 \leq \beta < \pi \text{ ist, } \dots \dots (87)$$

und

$$\beta \equiv \arg \left( \frac{re^{\beta i}}{re^{\beta i} + d} \right) \equiv 0, \text{ falls } -\pi < \beta \leq 0 \text{ ist.} \quad \dots \quad (88)$$

*Beweis.* Falls  $d=0$ , und auch falls  $\beta=0$  ist, hat  $\frac{re^{\beta i}}{re^{\beta i} + d}$  einen positiven Wert, also ein Argument  $=0$ . Ich darf also  $d > 0$  und  $\beta \neq 0$  annehmen. Ich betrachte im Dreieck mit den Eckpunkten  $0$ ,  $re^{\beta i}$  und  $re^{\beta i} + d$  den Winkel  $\alpha$ , dessen Spitze mit dem Koordinatenursprung zusammenfällt. Ist  $0 < \beta < \pi$ , dann ist dieser Winkel  $\alpha$  absolut genommen gleich  $\arg(re^{\beta i}) - \arg(re^{\beta i} + d) = \arg \left( \frac{re^{\beta i}}{re^{\beta i} + d} \right)$ , sodass dieses Argument dann positiv und kleiner als  $\beta$  ist. Hiermit ist (87) bewiesen. Der Beweis von (88) geht auf analoge Weise.

**Hilfssatz 17.** Es sei  $\kappa > 0$ ,  $-\frac{3\pi}{2} < \sigma < \frac{3\pi}{2}$ ,

$$\text{Max} \left( -\frac{\pi}{2}, -\pi + \sigma \right) < \mu < \text{Min} \left( \frac{\pi}{2}, \pi + \sigma \right), \quad \dots \quad (89)$$

$A = 1$ , falls  $-\frac{\pi}{2} \leq \sigma - \mu \leq \frac{\pi}{2}$  ist,

$A = |\sin(\sigma - \mu)|$ , falls  $-\pi < \sigma - \mu < -\frac{\pi}{2}$  und falls  $\frac{\pi}{2} < \sigma - \mu < \pi$  ist,

$$K(\mu) = A \cdot (\cos \mu)^\kappa, \quad M = \text{Max}_{\text{Max} \left( -\frac{\pi}{2}, -\pi + \sigma \right) < \mu < \text{Min} \left( \frac{\pi}{2}, \pi + \sigma \right)} K(\mu)^1).$$

*Behauptungen:*

1. Ist  $-\frac{\pi}{2} \leq \sigma \leq \frac{\pi}{2}$ , dann ist  $M = 1$ .
2. Ist  $-\frac{3\pi}{2} < \sigma < -\frac{\pi}{2}$ , dann ist

$$M = \sin(\mu_1 - \sigma) (\cos \mu_1)^\kappa;$$

hierin bezeichnet  $\mu_1$  den durch

$$\cos(\sigma - 2\mu_1) = \frac{\kappa - 1}{\kappa + 1} \cos \sigma \quad \dots \quad (90)$$

<sup>1)</sup> D. h.:  $M$  ist der grösste Wert von  $K(\mu)$  im Intervall

$$\text{Max} \left( -\frac{\pi}{2}, -\pi + \sigma \right) < \mu < \text{Min} \left( \frac{\pi}{2}, \pi + \sigma \right).$$

eindeutig bestimmten, im Falle  $-\frac{3\pi}{2} < \sigma \leq -\pi$  zwischen  $-\frac{\pi}{2}$  und  $\pi + \sigma$  und im Falle  $-\pi < \sigma < -\frac{\pi}{2}$  zwischen  $\frac{\pi}{2} + \sigma$  und 0 liegenden Winkel.

3. Ist  $\frac{\pi}{2} < \sigma < \frac{3\pi}{2}$ , dann ist

$$M = \sin(\sigma - \mu_2) (\cos \mu_2)^\kappa;$$

hierin bezeichnet  $\mu_2$  den durch

$$\cos(\sigma - 2\mu_2) = \frac{\kappa - 1}{\kappa + 1} \cos \sigma$$

eindeutig bestimmten, im Falle  $\pi \leq \sigma < \frac{3\pi}{2}$  zwischen  $-\pi + \sigma$  und  $\frac{\pi}{2}$  und im Falle  $\frac{\pi}{2} < \sigma < \pi$  zwischen 0 und  $-\frac{\pi}{2} + \sigma$  liegenden Winkel.

*Beweis.* Wir unterscheiden drei Fälle:

1. Es sei  $-\frac{\pi}{2} \leq \sigma \leq \frac{\pi}{2}$ . Man hat  $K(0) = 1$ , wegen  $K(\mu) \leq 1$  folgt hieraus die erste Behauptung von Hilfssatz 17.

2. Es sei  $-\frac{3\pi}{2} < \sigma < -\frac{\pi}{2}$ . Hierbei unterscheiden wir wiederum zwei Fälle:

2\*. Es sei  $-\frac{3\pi}{2} < \sigma \leq -\pi$ . Wegen (89) ist dann  $-\frac{\pi}{2} < \mu < \pi + \sigma$ , also  $-\pi < \sigma - \mu < \frac{\pi}{2} + \sigma \leq -\frac{\pi}{2}$ , somit

$$K(\mu) = \sin(\mu - \sigma) (\cos \mu)^\kappa.$$

Hieraus ergibt sich

$$\left. \begin{aligned} K'(\mu) &= \cos(\mu - \sigma) (\cos \mu)^{\kappa - \kappa} \sin(\mu - \sigma) (\cos \mu)^{\kappa - 1} \sin \mu = \\ &(\cos \mu)^{\kappa - 1} (\cos(\mu - \sigma) \cos \mu - \kappa \sin(\mu - \sigma) \sin \mu) = \\ &\frac{1}{2} (\cos \mu)^{\kappa - 1} ((\kappa + 1) \cos(\sigma - 2\mu) - (\kappa - 1) \cos \sigma). \end{aligned} \right\} \quad (91)$$

Es existiert ein eindeutig bestimmter zwischen  $-\sigma - 2\pi$  und  $\sigma + \pi$  liegender Winkel  $\varphi$  mit der Eigenschaft

$$\cos \varphi = \frac{\kappa - 1}{\kappa + 1} \cos \sigma . . . . . (92)$$

Wegen  $-\frac{\pi}{2} < \mu < \pi + \sigma$  ist  $-\sigma - 2\pi < \sigma - 2\mu < \sigma + \pi$ ; es gibt also

einen eindeutig bestimmten zwischen  $-\frac{\pi}{2}$  und  $\pi + \sigma$  liegenden Winkel  $\mu_1$  mit (90). Aus (91) folgt nun

$$\text{Max}_{-\frac{\pi}{2} < \mu < \pi + \sigma} K(\mu) = K(\mu_1).$$

2\*\*. Es sei  $-\pi < \sigma < -\frac{\pi}{2}$ , also wegen (89)  $-\frac{\pi}{2} < \mu < \sigma + \pi$ . Nun hat man, falls  $-\frac{\pi}{2} < \mu \leq \sigma + \frac{\pi}{2}$ , also  $-\frac{\pi}{2} \leq \sigma - \mu < \sigma + \frac{\pi}{2}$  ist,

$$K(\mu) = (\cos \mu)^\nu \leq \left( \cos \left( \sigma + \frac{\pi}{2} \right) \right)^\nu = K \left( \sigma + \frac{\pi}{2} \right). \quad \dots \quad (93)$$

und, falls  $0 \leq \mu < \sigma + \pi$ , also  $-\pi < \sigma - \mu \leq \sigma < -\frac{\pi}{2}$  ist,

$$K(\mu) = -\sin(\sigma - \mu) (\cos \mu)^\nu \leq -\sin \sigma = K(0) \quad \dots \quad (94)$$

Aus (93) und (94) folgt, dass  $K(\mu)$  seinen grössten Wert erreicht im Intervall  $\sigma + \frac{\pi}{2} \leq \mu \leq 0$ . Liegt  $\mu$  in diesem Intervall, dann ist

$$\begin{aligned} K(\mu) &= \sin(\mu - \sigma) (\cos \mu)^\nu, \\ K'(\mu) &= \frac{1}{2} (\cos \mu)^{\nu-1} ((\nu + 1) \cos(\sigma - 2\mu) - (\nu - 1) \cos \sigma). \quad \dots \quad (95) \end{aligned}$$

Es existiert nun ein eindeutig bestimmter zwischen  $\sigma$  und  $-\pi - \sigma$  liegender Winkel  $\varphi$  mit (92). Ist  $\sigma + \frac{\pi}{2} < \mu < 0$ , dann ist  $\sigma < \sigma - 2\mu < -\sigma - \pi$ ; es gibt also einen eindeutig bestimmten zwischen  $\sigma + \frac{\pi}{2}$  und 0 liegenden Winkel  $\mu_1$  mit (90). Aus (95) folgt jetzt

$$\text{Max}_{\sigma + \frac{\pi}{2} \leq \mu \leq 0} K(\mu) = K(\mu_1).$$

Hiermit ist die zweite Behauptung des Hilfssatzes bewiesen.

3. Es sei  $\frac{\pi}{2} < \sigma < \frac{3\pi}{2}$ . Die dritte Behauptung von Hilfssatz 17 folgt aus der zweiten, wenn man  $\sigma$  durch  $-\sigma$  und  $\mu$  durch  $-\mu$  ersetzt.

**Hilfssatz 18.** Es sei  $\kappa > 0$ ,  $-2\pi < \sigma < 2\pi$ ,

$$\text{Max}\left(-\frac{\pi}{2}, -\frac{\pi}{2} + \frac{\sigma}{2}\right) < \mu < \text{Min}\left(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} + \frac{\sigma}{2}\right), \dots \quad (96)$$

$$B = 1, \text{ falls } -\frac{\pi}{2} \leq \sigma - 2\mu \leq \frac{\pi}{2} \text{ ist,}$$

$$B = |\sin(\sigma - 2\mu)|, \text{ falls } -\pi < \sigma - 2\mu < -\frac{\pi}{2} \text{ und falls } \frac{\pi}{2} < \sigma - 2\mu < \pi \text{ ist,}$$

$$L(\mu) = B \cdot (\cos \mu)^\kappa, \quad M^* = \text{Max}_{\text{Max}\left(-\frac{\pi}{2}, -\frac{\pi}{2} + \frac{\sigma}{2}\right) < \mu < \text{Min}\left(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} + \frac{\sigma}{2}\right)} L(\mu)^1).$$

*Behauptungen:*

1. Ist  $-\frac{\pi}{2} \leq \sigma \leq \frac{\pi}{2}$ , dann ist  $M^* = 1$ .

2. Ist  $-2\pi < \sigma < -\frac{\pi}{2}$ , dann ist

$$M^* = \sin(2\mu_3 - \sigma) (\cos \mu_3)^\kappa;$$

hierin bezeichnet  $\mu_3$  den durch

$$(\kappa + 2) \cos(3\mu_3 - \sigma) = (\kappa - 2) \cos(\mu_3 - \sigma) \dots \quad (97)$$

eindeutig bestimmten, im Falle  $-2\pi < \sigma \leq -\frac{3\pi}{2}$  zwischen  $-\frac{\pi}{2}$  und  $\frac{\pi}{2} + \frac{\sigma}{2}$ , im Falle  $-\frac{3\pi}{2} < \sigma \leq -\pi$  zwischen  $\frac{\pi}{4} + \frac{\sigma}{2}$  und  $\frac{\pi}{2} + \frac{\sigma}{2}$  und im Falle  $-\pi < \sigma < -\frac{\pi}{2}$  zwischen  $\frac{\pi}{4} + \frac{\sigma}{2}$  und 0 liegenden Winkel.

3. Ist  $\frac{\pi}{2} < \sigma < 2\pi$ , dann ist

$$M^* = \sin(\sigma - 2\mu_4) (\cos \mu_4)^\kappa;$$

hierin bezeichnet  $\mu_4$  den durch

$$(\kappa + 2) \cos(3\mu_4 - \sigma) = (\kappa - 2) \cos(\mu_4 - \sigma)$$

eindeutig bestimmten, im Falle  $\frac{3\pi}{2} \leq \sigma < 2\pi$  zwischen  $-\frac{\pi}{2} + \frac{\sigma}{2}$  und  $\frac{\pi}{2}$ , im Falle  $\pi \leq \sigma < \frac{3\pi}{2}$  zwischen  $-\frac{\pi}{2} + \frac{\sigma}{2}$  und  $-\frac{\pi}{4} + \frac{\sigma}{2}$  und im Falle  $\frac{\pi}{2} < \sigma < \pi$  zwischen 0 und  $-\frac{\pi}{4} + \frac{\sigma}{2}$  liegenden Winkel.

<sup>1)</sup> D. h.:  $M^*$  ist der grösste Wert von  $L(\mu)$  im Intervall

$$\text{Max}\left(-\frac{\pi}{2}, -\frac{\pi}{2} + \frac{\sigma}{2}\right) < \mu < \text{Min}\left(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} + \frac{\sigma}{2}\right).$$

**Beweis.** Wir unterscheiden drei Fälle:

1. Es sei  $-\frac{\pi}{2} \leq \sigma \leq \frac{\pi}{2}$ . Man hat  $L(0) = 1$ , wegen  $L(\mu) \leq 1$  folgt hieraus die erste Behauptung des Hilfssatzes.

2. Es sei  $-2\pi < \sigma < -\frac{\pi}{2}$ . Hierbei unterscheiden wir wiederum drei Fälle:

2\*. Es sei  $-2\pi < \sigma \leq -\frac{3\pi}{2}$ . Wegen (96) ist dann  $-\frac{\pi}{2} < \mu < \frac{\pi}{2} + \frac{\sigma}{2}$ , also  $-\pi < \sigma - 2\mu < \pi + \sigma \leq -\frac{\pi}{2}$ , somit

$$L(\mu) = \sin(2\mu - \sigma) (\cos \mu)^\kappa.$$

Hieraus folgt

$$\left. \begin{aligned} L'(\mu) &= 2 \cos(2\mu - \sigma) (\cos \mu)^\kappa - \kappa \sin(2\mu - \sigma) (\cos \mu)^{\kappa-1} \sin \mu = \\ &(\cos \mu)^{\kappa-1} (2 \cos(2\mu - \sigma) \cos \mu - \kappa \sin(2\mu - \sigma) \sin \mu) = \\ &\frac{1}{2} (\cos \mu)^{\kappa-1} ((\kappa + 2) \cos(3\mu - \sigma) - (\kappa - 2) \cos(\mu - \sigma)). \end{aligned} \right\} \quad (98)$$

Nun ist

$$\frac{d}{d\mu} ((\kappa + 2) \cos(3\mu - \sigma) - (\kappa - 2) \cos(\mu - \sigma)) =$$

$$-(2\kappa + 4) \sin(3\mu - \sigma) - 2\kappa \cos(2\mu - \sigma) \sin \mu - 4 \sin(2\mu - \sigma) \cos \mu$$

und dieser Ausdruck ist  $< 0$ , falls  $-\frac{\pi}{2} < \mu < \frac{\pi}{2} + \frac{\sigma}{2}$  ist, da dann

$$0 \leq -\frac{3\pi}{2} - \sigma < 3\mu - \sigma < \frac{\sigma}{2} + \frac{3\pi}{2} \leq \frac{3\pi}{4}$$

und

$$\frac{\pi}{2} \leq -\sigma - \pi < 2\mu - \sigma < \pi$$

ist. Wegen  $(\kappa + 2) \cos(3\mu - \sigma) - (\kappa - 2) \cos(\mu - \sigma) > 0$  für  $\mu = -\frac{\pi}{2}$  und  $< 0$  für  $\mu = \frac{\pi}{2} + \frac{\sigma}{2}$  liegt also im Intervall  $-\frac{\pi}{2} < \mu < \frac{\pi}{2} + \frac{\sigma}{2}$  ein und nur ein Punkt  $\mu_3$  mit (97) und aus (98) folgt

$$\begin{aligned} \text{Max} \quad L(\mu) &= L(\mu_3). \\ -\frac{\pi}{2} < \mu < \frac{\pi}{2} + \frac{\sigma}{2} \end{aligned}$$

2\*\*. Es sei  $-\frac{3\pi}{2} < \sigma \leq -\pi$ , also wegen (96)  $-\frac{\pi}{2} < \mu < \frac{\pi}{2} + \frac{\sigma}{2}$ .

Nun hat man, falls  $-\frac{\pi}{2} < \mu \leq \frac{\pi}{4} + \frac{\sigma}{2}$ , also  $-\frac{\pi}{2} \leq \sigma - 2\mu < \sigma + \pi \leq 0$  ist,

$$L(\mu) = (\cos \mu)^r \leq \left( \cos \left( \frac{\sigma}{2} + \frac{\pi}{4} \right) \right)^r = L \left( \frac{\sigma}{2} + \frac{\pi}{4} \right).$$

Hieraus folgt, dass  $L(\mu)$  seinen grössten Wert erreicht im Intervall  $\frac{\pi}{4} + \frac{\sigma}{2} \leq \mu < \frac{\pi}{2} + \frac{\sigma}{2}$ . Auf analoge Weise wie im Falle 2\* beweist man nun, dass im Intervall  $\frac{\pi}{4} + \frac{\sigma}{2} < \mu < \frac{\pi}{2} + \frac{\sigma}{2}$  ein und nur ein Punkt  $\mu_3$  mit (97) liegt und dass

$$\begin{aligned} \text{Max} \quad L(\mu) &= L(\mu_3) \\ \frac{\pi}{4} + \frac{\sigma}{2} \leq \mu &< \frac{\pi}{2} + \frac{\sigma}{2} \end{aligned}$$

ist.

2\*\*\*. Es sei  $-\pi < \sigma < -\frac{\pi}{2}$ , also wegen (96)  $-\frac{\pi}{2} < \mu < \frac{\pi}{2} + \frac{\sigma}{2}$ . Ebenso wie im Falle 2\*\* hat man, falls  $-\frac{\pi}{2} < \mu \leq \frac{\pi}{4} + \frac{\sigma}{2}$  ist,

$$L(\mu) \leq L \left( \frac{\pi}{4} + \frac{\sigma}{2} \right) \dots \dots \dots (99)$$

Ist  $0 \leq \mu < \frac{\pi}{2} + \frac{\sigma}{2}$ , dann ist  $-\pi < \sigma - 2\mu \leq \sigma < -\frac{\pi}{2}$ , also

$$L(\mu) = \sin(2\mu - \sigma) (\cos \mu)^k \leq -\sin \sigma = L(0) \dots \dots (100)$$

Aus (99) und (100) folgt, dass  $L(\mu)$  seinen grössten Wert erreicht im Intervall  $\frac{\pi}{4} + \frac{\sigma}{2} \leq \mu \leq 0$ . Auf analoge Weise wie im Falle 2\* beweist man jetzt, dass zwischen  $\frac{\pi}{4} + \frac{\sigma}{2}$  und 0 ein und nur ein Punkt  $\mu_3$  mit (97) liegt und dass

$$\begin{aligned} \text{Max} \quad L(\mu) &= L(\mu_3) \\ \frac{\pi}{4} + \frac{\sigma}{2} \leq \mu &\leq 0 \end{aligned}$$

ist. Hiermit ist die zweite Behauptung von Hilfssatz 18 bewiesen.

3. Es sei  $\frac{\pi}{2} < \sigma < 2\pi$ . Die dritte Behauptung des Hilfssatzes folgt aus der zweiten, wenn man  $\sigma$  durch  $-\sigma$  und  $\mu$  durch  $-\mu$  ersetzt.