**Mathematics.** — *Ein mengentheoretischer Satz aus dem Gebiete der diophantischen Approximationen.* Von J. F. KOKSMA. (Communicated by Prof. J. G. VAN DER CORPUT).

(Communicated at the meeting of September 24, 1932.)

Bekanntlich heisst eine Folge reeller Zahlen

$$z(1),\ z(2),\ z(3), \ldots\ldots$$

gleichverteilt modulo 1, wenn für jedes feste $\gamma\ (0 \leqq \gamma \leqq 1)$ die Anzahl $N_\gamma$ der natürlichen Zahlen $x \leqq N$ mit[1])

$$0 \leqq z(x) - [z(x)] < \gamma \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (1)$$

die Eigenschaft

$$\lim_{N \to \infty} \frac{N_\gamma}{N} = \gamma \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (2)$$

besitzt. Statt (1) schreiben wir immer die *diophantische Ungleichung* (in $x$)

$$0 \leqq z(x) < \gamma \quad (mod.\ 1).$$

Ist $\theta$ eine reelle irrationale Zahl und $f(x)$ eine für jedes ganze $x > 0$ definierte ganzzahlige positive Funktion mit

$$f(1) < f(2) < f(3) < \ldots\ldots, \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (3)$$

so braucht die Folge

$$\theta f(1),\quad \theta f(2),\quad \theta f(3), \ldots\ldots \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (4)$$

nicht gleichverteilt modulo 1 zu sein. In der Tat, man konstruiert z. B. zu $f(x) = 10^x$ leicht einen Dezimalbruch $\theta$, mit der Eigenschaft[2])

$$\lim_{x \to \infty} \theta f(x) - [\theta f(x)] = 0.$$

---

[1]) $[u]$ bezeichne für reelles $u$ die grösste ganze Zahl $\leqq u$.

[2]) Vgl. z. B. G. H. HARDY and J. E. LITTLEWOOD. Some problems op diophantine approximation. Acta Math. **37** (1914) S. 155—190, i.B. S. 156.

Herr A. KHINTCHINE [1]) bewies sogar, dass es zu jeder positiven ganzzahligen Funktion $f(x)$ mit (3), die schneller wächst als eine gewisse geometrische Progression, wenigstens ein irrationales $\theta$ gibt, derart, dass die Folge (4) nicht gleichverteilt *mod.* 1 ist, sogar derart, dass die Zahlen der Folge

$$\theta f(1) - [\theta f(1)], \quad \theta f(2) - [\theta f(2)], \ldots \ldots \quad (5)$$

nicht einmal in Einheitsintervall überall dicht liegen.

Herr H. WEYL [2]) jedoch bewies, dass für fast alle $\theta$, bei beliebig gegebenem ganzzahligem positivem $f(x)$ mit (3), die Folge (4) gleichverteilt *mod.* 1 ist.

"Fast alle $\theta$" heisst: die Ausnahme-Zahlen $\theta$ sind enthalten in einer Menge vom Mass Null im BORELschen Sinne. Nach Herrn WEYLs Kriterium ist die Folge (4) gleichverteilt *mod.* 1, wenn für jedes ganze $h \neq 0$

$$\lim_{N \to \infty} \frac{1}{N} \sum_{x=1}^{N} e^{2\pi i h \theta f(x)} = 0 \quad \ldots \ldots \quad (6)$$

ist. Der Nachweis von (6) geschieht mit einer Methode, wobei das RIESZ-FISCHERsche Theorem benutzt wird.

Es wird hier jetzt bewiesen:

**Satz 1.** *Ist $f(x)$ für positives ganzes $x$ eine beliebige ganzzahlige positive Funktion mit (3) und ist $w(x)$ eine für hinreichend grosses ganzes $x$ definierte, unbeschränkt wachsende Funktion, dann hat für jedes reelle $\alpha$ und für fast jedes reelle $\theta$ die diophantische Ungleichung*

$$\alpha < \theta f(x) < \alpha + \frac{\log x}{\sqrt[3]{x}}\, w(x) \,(mod.\ 1) \quad \ldots \ldots \quad (7)$$

*unendlich viele ganzzahlige Lösungen.*

*Bemerkung I*: Genau gesagt: *Es gibt eine Menge $\mathfrak{M}$ vom Mass Null im Sinne von* BOREL, *die durch die Definition von $f(x)$ und $w(x)$ völlig bestimmt ist, derart, dass für jedes reelle, nicht zu $\mathfrak{M}$ gehörige $\theta$ und für jedes reelle $\alpha$ die Ungleichung* (7) *unendlich viele ganzzahlige Lösungen $x$ hat.*

*Bemerkung II*: Ich beweise Satz 1 sogar unter der weniger fordernden Voraussetzung für $f(x)$, *dass $f(x)$ für jedes ganze $x > 0$ einen ganzzahligen Wert hat mit $f(x) \neq f(x')$ für $x \neq x'$.*

Satz 1 besagt also, wie dicht jedes $\alpha$ im Intervall $0 \leqq \alpha < 1$ wenigstens durch unendlich viele Glieder der Folge (5) angenähert wird.

Der Beweis beruht auf zwei Sätzen: Hilfssatz 1, und dem grundlegenden

[1]) A. KHINTCHINE. Ueber eine Klasse linearer diophantischer Approximationen. Rendic. di Palermo **50** (1926) S. 170—195, i.B. S. 182.

[2]) H. WEYL. Ueber die Gleichverteilung von Zahlen mod. Eins. Math. Ann. **77** (1916) S. 312—352.

VAN DER CORPUTschen Satz 2 [1]). Ich beweise Hilfssatz 1, ausgehend von dem Ansatz, der Herrn WEYL zu dem schon genannten Beweis der Limesbeziehung (6) für fast alle $\theta$ führte.

**Hilfssatz 1.** *Ist* $(I_\sigma)$ *eine Folge von Intervallen*

$$I_\sigma \ldots . a_\sigma \leqq x < b_\sigma \quad (\sigma = 1, 2, \ldots .),$$

*wo* $a_\sigma$ *und* $b_\sigma$ *ganz sind mit* $a_\sigma < b_\sigma$, *ist* $(\Lambda_\sigma)$ *eine Folge von positiven Zahlen* $\Lambda_1, \Lambda_2, \ldots$ *mit der Eigenschaft, dass*

$$\sum_{\sigma=1}^{\infty} \frac{1}{\Lambda_\sigma} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (8)$$

*konvergiert, bezeichnet* $(r_\sigma)$ *eine Folge natürlicher Zahlen* $r_1, r_2, \ldots,$ *und ist* $(S_\sigma)$ *eine Folge von Funktionensystemen*

$$S_\sigma = (f_{\sigma 1}(x), f_{\sigma 2}(x), \ldots, f_{\sigma r_\sigma}(x)) \quad (\sigma = 1, 2, \ldots),$$

*wo* $f_{\sigma\rho}(x)$ *für* $\sigma \geqq 1$, $1 \leqq \rho \leqq r_\sigma$ *eine für jedes ganze, in* $I_\sigma$ *liegende* $x$ *definierte, ganzzahlige Funktion bedeutet mit* $f_{\sigma\rho}(x) \neq f_{\sigma\rho}(x')$ *für* $x \neq x'$, *dann gibt es eine im Intervall* $0 \leqq \theta \leqq 1$ *liegende Menge* $\mathfrak{M}$ *vom Mass Null im Sinne von* BOREL, *die durch die Definition der genannten Folgen eindeutig bestimmt ist, mit folgender Eigenschaft:*

*Jedem* $\theta$ $(0 \leqq \theta \leqq 1)$, *das nicht zu* $\mathfrak{M}$ *gehört, kann man einen durch* $\theta$ *und die Definition der genannten Folgen eindeutig bestimmten Index* $\sigma_0$ *zuordnen, derart, dass für* $\sigma \geqq \sigma_0$ *und* $1 \leqq \rho \leqq r_\sigma$ *die Ungleichung*

$$\left| \frac{1}{b_\sigma - a_\sigma} \sum_{x=a_\sigma}^{b_\sigma - 1} e^{2\pi i \theta f_{\sigma\rho}(x)} \right| < \sqrt{\frac{r_\sigma \Lambda_\sigma}{b_\sigma - a_\sigma}} \quad \ldots \ldots \quad (9)$$

*gilt.*

*Beweis.* Wird für jedes $\theta$ im Intervall $0 \leqq \theta \leqq 1$

$$\Omega_{\sigma\rho}(\theta) = \frac{1}{b_\sigma - a_\sigma} \sum_{x=a_\sigma}^{b_\sigma - 1} e^{2\pi i f_{\sigma\rho}(x)} \quad (\sigma = 1, 2, \ldots; \ \rho = 1, 2, \ldots, r_\sigma) \quad (10)$$

gesetzt, dann ist

$$\left.\begin{aligned} \int_0^1 | \Omega_{\sigma\rho}(\theta)|^2 d\theta &= \frac{1}{(b_\sigma - a_\sigma)^2} \int_0^1 \left\{ \sum_{x=a_\sigma}^{b_\sigma - 1} e^{2\pi i \theta f_{\sigma\rho}(x)} \cdot \sum_{x=a_\sigma}^{b_\sigma - 1} e^{-2\pi i \theta f_{\sigma\rho}(x)} \right\} d\theta = \\ &= \frac{b_\sigma - a_\sigma}{(b_\sigma - a_\sigma)^2} = \frac{1}{b_\sigma - a_\sigma}, \end{aligned}\right\} (11)$$

---

[1]) Den Beweis von Satz 2 wird Herr J. G. VAN DER CORPUT demnächst veröffentlichen in den Acta Math. und zwar im dritten Teil seiner Abhandlung: Diophantische Ungleichungen. Erschienen sind schon:

Teil 1. Zur Gleichverteilung modulo Eins. Acta **56** (1931) S. 373—456.

Teil 11, Abschnitte *A* und *B*. Rhytmische Systeme. Acta **59**, (1932) S. 210—328.

denn in $I_\sigma$ ist $f_{\sigma\rho}(x) \neq f_{\sigma\rho}(x')$ für $x \neq x'$, sodass bei Ausmultiplizierung und Integration genau $b_\sigma - a_\sigma$ Glieder den Wert 1, und die übrigen Glieder den Wert 0 ergeben.

Bedeutet $\mathfrak{M}_{\sigma\rho}$ für jedes Zahlenpaar $\sigma$ und $\varrho$ mit $\sigma \geqq 1$; $1 \leqq \varrho \leqq r_\sigma$ die Menge aller $\theta$ in $0 \leqq \theta \leqq 1$ mit

$$|\Omega_{\sigma\rho}(\theta)| \geqq \sqrt{\frac{r_\sigma \Lambda_\sigma}{b_\sigma - a_\sigma}} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (12)$$

dann ist weil $|\Omega_{\sigma\rho}(\theta)|$ wegen (10) eine stetige Funktion ist, $\mathfrak{M}_{\sigma\rho}$ messbar. Also gilt, wenn wir das Mass einer Menge $\mathfrak{E}$ mit $\mathfrak{m}(\mathfrak{E})$ andeuten

$$\int_0^1 |\Omega_{\sigma\rho}(\theta)|^2 \, d\theta \geqq \mathfrak{m}(\mathfrak{M}_{\sigma\rho}) \cdot \frac{r_\sigma \Lambda_\sigma}{b_\sigma - a_\sigma} \; (\sigma \geqq 1; 1 \leqq \varrho \leqq r_\sigma),$$

sodass aus (11) folgt

$$\mathfrak{m}(\mathfrak{M}_{\sigma\rho}) \leqq \frac{1}{b_\sigma - a_\sigma} \cdot \frac{b_\sigma - a_\sigma}{r_\sigma \Lambda_\sigma} = \frac{1}{r_\sigma \Lambda_\sigma} \quad (\sigma \geqq 1;\; 1 \leqq \varrho \leqq r_\sigma) \; . \quad (13)$$

Es sei jetzt $\sigma_1$ eine beliebige natürliche Zahl und es bezeichne $\mathfrak{M}_{\sigma_1}$ die Menge der $\theta$ die wenigstens einer der Mengen $\mathfrak{M}_{\sigma\rho}$ ($\sigma \geqq \sigma_1$; $1 \leqq \varrho \leqq r_\sigma$) angehören. Für das äussere Mass $\overline{\mathfrak{m}}(\mathfrak{M}_{\sigma_1})$ dieser Menge gilt

$$\overline{\mathfrak{m}}(\mathfrak{M}_{\sigma_1}) \leqq \sum_{\sigma=\sigma_1}^{\infty} \sum_{\rho=1}^{r_\sigma} \mathfrak{m}(\mathfrak{M}_{\sigma}) \quad (\sigma_1 \geqq 1),$$

also wegen (13)

$$\overline{\mathfrak{m}}(\mathfrak{M}_{\sigma_1}) \leqq \sum_{\sigma=\sigma_1}^{\infty} \frac{1}{\Lambda_\sigma} \quad (\sigma_1 \geqq 1) \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (14)$$

Ueberdies gilt wegen der Definition von $\mathfrak{M}_{\sigma_1}$ $(\sigma_1 \geqq 1)$

$$\mathfrak{M}_{\sigma_1} > \mathfrak{M}_{\sigma_1+1} > \mathfrak{M}_{\sigma_1+2} > \ldots\ldots \; (\sigma_1 \geqq 1) \; . \; . \; . \; . \quad (15)$$

Ist nun $\varepsilon$ eine beliebige feste positive Zahl, so kann man, weil die Summe (8) konvergiert, nach (14) $\sigma_1$ immer so gross wählen, dass

$$\overline{\mathfrak{m}}(\mathfrak{M}_{\sigma_1}) < \varepsilon$$

ist. Wegen (15) hat also die Durchschnittmenge $\mathfrak{M}$ der Mengen

$$\mathfrak{M}_1, \mathfrak{M}_2, \mathfrak{M}_3, \ldots\ldots \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (16)$$

das BORELsche Mass Null. Wir zeigen nun, dass $\mathfrak{M}$ uns das im Hilfssatz 1 Behauptete liefert.

1. $\mathfrak{M}$ ist nach der obigen Konstruktion durch die Definition der Folgen $(I_\sigma), (\Lambda_\sigma), (r_\sigma)$ und $(S_\sigma)$ eindeutig bestimmt.

2. $\mathfrak{M}$ hat das BORELsche Mass Null.

3. Es sei $\theta$ eine Zahl mit $0 \leqq \theta \leqq 1$, aber nicht zu $\mathfrak{M}$ gehörig. Wegen der Tatsache, dass $\mathfrak{M}$ Durchschnittmenge der Mengen (16) ist, gibt es eine durch $\theta$ und die Definition der Folgen $(I_\sigma), (\Lambda_\sigma), (r_\sigma)$ und $(S_\sigma)$ eindeutig bestimmte natürliche Zahl $\sigma_0$ derart, dass $\theta$ in keinem $\mathfrak{M}_\sigma$ liegt für $\sigma \geqq \sigma_0$. Wegen der Definition von $\mathfrak{M}_\sigma$ kann also $\theta$ in keinem $\mathfrak{M}_{\sigma\varrho}$ liegen mit $\sigma \geqq \sigma_0$ und $1 \leqq \varrho \leqq r_\sigma$. Dies besagt aber, dass es zu $\theta$ kein Zahlenpaar $\sigma$ und $\varrho$ mit $\sigma \geqq \sigma_0$; $1 \leqq \varrho \leqq r_\sigma$ gibt mit (12). Also gilt

$$|\Omega_{\sigma\varrho}(\theta)| < \sqrt{\frac{r_\sigma \Lambda_\sigma}{b_\sigma - a_\sigma}} \qquad (\sigma \geqq \sigma_0;\ 1 \leqq \varrho \leqq r_\sigma).$$

Wegen (10) ist diese Ungleichung identisch mit (9), sodass Hilssatz 1 völlig bewiesen ist.

**Satz 2.** *Es sei eine Folge natürlicher Zahlen $m_1, m_2, \ldots$ gegeben, und es sei $F$ eine Folge von $m_\sigma$-dimensionalen Quadern*

$$Q_\sigma \ldots a_{\sigma\mu} \leqq x_\mu < b_{\sigma\mu} \quad (\sigma = 1, 2, \ldots;\ \mu = 1, 2, \ldots, m_\sigma),$$

*wo $a_{\sigma\mu}$ und $b_{\sigma\mu}$ ganz sind und $a_{\sigma\mu} < b_{\sigma\mu}$ ist. Jedem $Q_\sigma$ seien zugeordnet eine natürliche Zahl $n_\sigma$, $2n_\sigma$ reelle Zahlen $\alpha_{\sigma\nu}$ und $\beta_{\sigma\nu}$ mit $\alpha_{\sigma\nu} < \beta_{\sigma\nu} \leqq \alpha_{\sigma\nu} + 1$ und $n_\sigma$ Funktionen*

$$f_{\sigma\nu}(x) = f_{\sigma\nu}(x_1, x_2, \ldots, x_{m_\sigma}) \quad (\sigma = 1, 2, \ldots;\ \nu = 1, 2, \ldots n_\sigma),$$

*definiert für jeden Gitterpunkt $(x) = (x_1, x_2, \ldots, x_{m_\sigma})$ von $Q_\sigma$.*

*Es werde für $\sigma \geqq 1$*

$$T_\sigma(c) = \sum_{(h)}{}' \left| \frac{1}{A(Q_\sigma)} \sum_{(x) \text{ in } Q_\sigma} e^{2\pi i (h_1 f_{\sigma 1}(x) + h_2 f_{\sigma 2}(x) + \ldots + h_{n_\sigma} f_{\sigma n_\sigma}(x))} \right| \quad . \quad . \quad (17)$$

*gesetzt, wo $A(Q_\sigma)$ die Anzahl der Gitterpunkte $(x)$ in $Q_\sigma$ bedeutet, und wo $\sum\limits_{(h)}{}'$ erstreckt wird über alle Gitterpunkte $(h) = (h_1, h_2, \ldots, h_{n_\sigma}) \neq$ $(0, 0, \ldots, 0)$ mit*

$$|h_\nu| \leqq \frac{c\, n_\sigma}{\beta_{\sigma\nu} - \alpha_{\sigma\nu}} \log \frac{2\, n_\sigma}{\beta_{\sigma\nu} - \alpha_{\sigma\nu}} \quad (\sigma \geqq 1;\ 1 \leqq \nu \leqq n_\sigma). \quad . \quad . \quad (18)$$

Wir nehmen an

$$\lim_{\sigma \to \infty} T_\sigma(c) = 0. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (19)$$

*für jedes feste* $c > 0$. *Es sei* $A^*(Q_\sigma)$ *die Anzahl der Gitterpunkte* $(x)$ *in* $Q_\sigma$, *die dem diophantischen System*

$$\alpha_{\sigma\nu} < f_{\sigma\nu}(x) < \beta_{\sigma\nu} \pmod{1} \quad (\sigma \geqq 1;\ \nu = 1, 2, \ldots, n_\sigma) \quad . \quad . \quad (20)$$

*genügen. Unter diesen Bedingungen ist*

$$\lim_{\sigma \to \infty} \frac{A^*(Q_\sigma)}{A(Q_\sigma)(\beta_{\sigma 1} - \alpha_{\sigma 1}) \ldots\ldots (\beta_{\sigma n_\sigma} - \alpha_{\sigma n_\sigma})} = 1 \quad . \quad . \quad . \quad (21)$$

*Beweis von Satz 1.* Ohne Beschränkung der Allgemeinheit kann ich bei dem Beweis von Satz 1

$$0 \leqq \theta \leqq 1$$

annehmen. Gemäss Satz 1 kann ich die ganze Zahl $x_0 > e^3$ so wählen, dass $w(x)$ für jedes ganze $x \geqq x_0$ definiert und $\geqq 1$ ist. Wird nun für jedes ganze $x \geqq x_0$ gesetzt

$$\varphi(x) = \frac{\sqrt[3]{x}}{\log x} \cdot \frac{\underset{\substack{x_0 \leqq y \leqq x \\ y \text{ ganz}}}{\mathrm{Min}} \dfrac{\log y}{\sqrt[3]{y}}\, w(y)}{1 + \dfrac{\log x_0}{\sqrt[3]{x_0}}\, w(x_0)}, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (22)$$

dann ist für jedes ganze $x \geqq x_0$

$$\frac{\log x}{\sqrt[3]{x}}\, \varphi(x) < \frac{\underset{\substack{x_0 \leqq y \leqq x \\ y \text{ ganz}}}{\mathrm{Min}} \dfrac{\log y}{\sqrt[3]{y}}\, w(y)}{\dfrac{\log x_0}{\sqrt[3]{x_0}}\, w(x_0)} \leqq 1. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (23)$$

Unser nächstes Ziel ist jetzt die Relation

$$\lim_{x \to \infty} \varphi(x) = \infty. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (24)$$

zu zeigen. Ich bemerke dazu zuerst, dass die Funktion $\dfrac{\log y}{\sqrt[3]{y}}$ für $y > e^3$ monoton abnimmt, weil ihre Ableitung gleich

$$\frac{1}{3\, y^{4/3}} (3 - \log y) < 0$$

ist. Für jedes $y$ im Intervall $x_0 \leqq y \leqq x$ gilt somit

$$\frac{\log y}{\sqrt[3]{y}} \geqq \frac{\log x}{\sqrt[3]{x}} \qquad (x_0 \leqq y \leqq x). \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (25)$$

Weiter bemerke ich, dass man nach der Definition (22) von $\varphi(x)$, jedem ganzen $x \geqq x_0$ ein ganzes $y_x$ zuordnen kann mit

$$\varphi(x) = \frac{\sqrt[3]{x}}{\log x} \cdot \frac{\frac{\log y_x}{\sqrt[3]{y_x}} \cdot w(y_x)}{1 + \frac{\log x_0}{\sqrt[3]{x_0}} w(x_0)}; \quad x_0 \leqq y_x \leqq x, \quad . \quad . \quad . \quad (26)$$

sodass wegen (25)

$$\varphi(x) \geqq \frac{w(y_x)}{1 + \frac{\log x_0}{\sqrt[3]{x_0}} w(x_0)} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (27)$$

ist.

Weil $w(x)$ mit $x$ unbeschränkt wächst, kann man jedem konstanten $K$ ein ganzes $\xi \geqq x_0$ zuordnen, mit der Eigenschaft, dass für jedes ganze $x \geqq \xi$

$$w(x) \geqq K$$

ist. Es sei jetzt $K$ eine beliebige positive Konstante. Wir unterscheiden zwei verschiedene Fälle.

1. Es sei in (26) $y_x \geqq \xi$. Dann ist also wegen (27)

$$\varphi(x) \geqq \frac{K}{1 + \frac{\log x_0}{\sqrt[3]{x_0}} w(x_0)} \quad (x \geqq x_0;\ y_x \geqq \xi) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (28)$$

2. Es sei in (26) $y_x < \xi$, sodass $\xi$ eine der Zahlen $x_0, x_0 + 1, \ldots, \xi - 1$ ist. Es gibt dann wegen $x_0 > e^3$ eine nur von $K$ und von der Definition von $w(x)$ abhängige positive Zahl $K_1$, derart dass

$$\frac{\log y_x}{\sqrt[3]{y_x}} w(y_x) \geqq K_1$$

ist, sodass aus (26) folgt

$$\varphi(x) \geqq \frac{K_1}{1 + \frac{\log x_0}{\sqrt[3]{x_0}} w(x_0)} \cdot \frac{\sqrt[3]{x}}{\log x} \quad (x \geqq x_0;\ y_x < \xi) \quad . \quad . \quad . \quad (29)$$

Man hat also für jedes ganze $x \geqq x_0$, wegen (28) und (29)

$$\varphi(x) \geqq \frac{1}{1 + \frac{\log x_0}{\sqrt[3]{x_0}} w(x_0)} \, Min\left(K, \frac{K_1 \sqrt[3]{x}}{\log x}\right)$$

d. h. weil $K_1$ von $x$ unabhängig ist, $x_0$

$$\underset{x \to \infty}{Lim}\ \varphi(x) \geqq \frac{K}{1 + \frac{\log x_0}{\sqrt[3]{x_0}} w(x_0)}$$

Weil diese Ungleichung für jede positive Konstante $K$ gilt, folgt aus ihr erst recht die zu beweisende Beziehung (24).

Bezeichnet $c$ irgend eine positive Zahl, bezeichnet $b_\sigma$ für $\sigma \geqq 1$ die kleinste ganze Zahl $> x_0$ mit $\varphi(b_\sigma) \geqq \sigma$ ($b_\sigma$ existiert wegen (24)), bezeichnet $(I_\sigma)$ die Folge der Intervalle

$$I_\sigma \ldots a_\sigma = x_0 \leqq x < b_\sigma \quad (\sigma = 1, 2 \ldots),$$

bezeichnet $\Lambda_\sigma$ die Folge der Zahlen

$$\Lambda_\sigma = \{\varphi(b_\sigma)\}^2 \quad (\sigma = 1, 2, \ldots), \quad \ldots \ldots \quad (30)$$

bezeichnet $(r_\sigma)$ die Folge der Zahlen

$$r_\sigma = \left[\frac{c\sqrt[3]{b_\sigma}}{\varphi(b_\sigma)\log b_\sigma} \log \frac{2\sqrt[3]{b_\sigma}}{\varphi(b_\sigma)\log b_\sigma} + 1\right] (\sigma = 1, 2, \ldots) \quad , \quad (31)$$

und bedeutet $(S_\sigma)$ die Folge der Funktionensysteme

$$S_\sigma = (f_{\sigma 1}(x), f_{\sigma 2}(x), \ldots, f_{\sigma r_\sigma}(x)),$$

wo

$$f_{\sigma\varrho}(x) = \varrho f(x) \quad (\sigma \geqq 1, \varrho = 1, 2, \ldots, r_\sigma) \quad \ldots . \quad (32)$$

gesetzt ist, so können wir zeigen, dass die Bedingungen von Hilfssatz 1 erfüllt sind. In der Tat es sind $a_\sigma$ und $b_\sigma$ ganze Zahlen mit $a_\sigma < b_\sigma$, es sind $\Lambda_1, \Lambda_2, \ldots$ wegen (30) positiv und es konvergiert die Summe (8) wegen $\Lambda_\sigma = \{\varphi(b_\sigma)\}^2 \geqq \sigma^2$, es sind wegen (31) $r_1, r_2, \ldots$ natürliche Zahlen und es ist wegen (32) und Bemerkung II bei Satz 1 $f_{\sigma\varrho}(x) = \varrho f(x)$ eine für jedes ganze $x$ in $I_\sigma$ definierte, ganzzahlige Funktion mit $f_{\sigma\varrho}(x) \neq f_{\sigma\varrho}(x')$ für $x \neq x'$.

Hilfssatz 1 lehrt also die Existenz einer in $0 \leqq \theta \leqq 1$ liegender Menge $\mathfrak{M}$ vom Mass Null, die durch die obige Definition der Folgen $(I_\sigma)$, $(\Lambda_\sigma)$, $(r_\sigma)$ und $(S_\sigma)$, also durch die Definition der Funktionen $f(x)$ und $w(x)$ in Satz 1 eindeutig bestimmt ist, mit folgender Eigenschaft:

Jedem $\theta$ $(0 \leqq \theta \leqq 1)$, das nicht zu $\mathfrak{M}$ gehört, kann ein Index $\sigma_0$ zugeordnet werden, derart, dass für $\sigma \geqq \sigma_0$ und $1 \leqq \varrho \leqq r_\sigma$

$$\left|\frac{1}{b_\sigma - x_0} \sum_{x = x_0}^{b_\sigma - 1} e^{2\pi i \theta \varrho f(x)}\right| < \sqrt{\frac{r_\sigma \{\varphi(b_\sigma)\}^2}{b_\sigma - x_0}}$$

ist. Die linke Seite ändert sich nicht, wenn $\varrho$ durch $-\varrho$ ersetzt wird, sodass

$$\left.\begin{aligned}\sum_{\substack{|h| \leqq r_\sigma \\ h \neq 0,\, ganz}} \left| \frac{1}{b_\sigma - x_0} \sum_{x = x_0}^{b_\sigma - 1} e^{2\pi i h \theta f(x)} \right| < 2\, r_\sigma \sqrt{\frac{r_\sigma \{\varphi(b_\sigma)\}^2}{b_\sigma - x_0}} = \\ = 2 \sqrt{\frac{r_\sigma^3 \{\varphi(b_\sigma)\}^2}{b_\sigma - x_0}}\end{aligned}\right\} \quad (33)$$

ist.

Wegen $b_\sigma > e^3$ ist $2 < b_\sigma^{\frac{2}{3}}$; wegen der Definition von $b_\sigma$ ist $\varphi(b_\sigma) \geqq \sigma \geqq 1$, sodass aus (31) folgt

$$r_\sigma \leqq \frac{c \sqrt[3]{b_\sigma}}{\varphi(b_\sigma) \log b_\sigma} \log \frac{b_\sigma^{2/3} \,.\, b_\sigma^{1/3}}{1} + 1 = c \frac{\sqrt[3]{b_\sigma}}{\varphi(b_\sigma)} + 1 \leqq (c+1) \frac{\sqrt[3]{b_\sigma}}{\varphi(b_\sigma)} \quad (34)$$

wegen $b_\sigma > x_0 > e^3$ und (23) mit $x = b_\sigma$.

Aus (33) und (34) geht hervor

$$\sum_{\substack{|h| \leqq r_\sigma \\ h \neq 0,\, ganz}} \left| \frac{1}{b_\sigma - x_0} \sum_{x = x_0}^{b_\sigma - 1} e^{2\pi i h \theta f(x)} \right| < 2 \sqrt{\frac{(c+1)^3 b_\sigma}{\{\varphi(b_\sigma)\}^3} \cdot \frac{\{\varphi(b_\sigma)\}^2}{b_\sigma - x_0}} =$$

$$= 2 \sqrt{(c+1)^3 \cdot \frac{b_\sigma}{b_\sigma - x_0} \cdot \frac{1}{\varphi(b_\sigma)}} \leqq 2 \sqrt{(c+1)^3 \cdot \frac{b_\sigma}{b_\sigma - x_0} \cdot \frac{1}{\sigma}},$$

weil $b_\sigma$ so gewählt worden ist, dass $\varphi(b_\sigma) \geqq \sigma$ $(\sigma \geqq 1)$. Es gilt also, weil $\frac{b_\sigma}{b_\sigma - x_0}$ beschränkt ist

$$\sum_{\substack{|h| \leqq r_\sigma \\ h \neq 0,\, ganz}} \left| \frac{1}{b_\sigma - x_0} \sum_{x = x_0}^{b_\sigma - 1} e^{2\pi i h \theta f(x)} \right| \to 0 \text{ für } \sigma \to \infty, \quad . \quad . \quad (35)$$

und zwar für jedes $\theta$ $(0 \leqq \theta \leqq 1)$, dass nicht zu $\mathfrak{M}$ gehört.

Ich behaupte jetzt, dass die Voraussetzungen von Satz 2 erfüllt sind, wenn

$$\left.\begin{aligned} & m_\sigma = 1,\ a_{\sigma\mu} = x_0,\ b_{\sigma\mu} = b_\sigma,\ n_\sigma = 1, \\ & \alpha_{\sigma\nu} = \alpha,\ \beta_{\sigma\nu} = \alpha + \frac{\log b_\sigma}{\sqrt[3]{b_\sigma}} \varphi(b_\sigma),\ f_{\sigma\nu}(x) = \theta f(x) \end{aligned}\right\} \quad (36)$$

gesetzt wird, sodass jetzt die Folge $F$ der Quader $Q_\sigma$ die Folge $(I_\sigma)$ der Intervalle $I_\sigma$ bedeutet. In (36) bezeichnet $\theta$ eine beliebige Zahl in

$0 \leqq \theta \leqq 1$, aber nicht zu $\mathfrak{M}$ gehörig. Die Behauptung ist wahr, denn es ist $m_\sigma \geqq 1$; $a_{\sigma\mu}$ und $b_{\sigma\mu}$ sind ganze Zahlen mit $a_{\sigma\mu} < b_{\sigma\mu}$, $n_\sigma$ ist eine natürliche Zahl; wegen $b_\sigma > x_0$ gilt (23) mit $x = b_\sigma$, sodass $\alpha_{\sigma\nu} < \beta_{\sigma\nu} \leqq \alpha_{\sigma\nu} + 1$ ist; die Funktionen $f_{\sigma\nu}(x) = \theta f(x)$ sind für jedes ganze $x$ im Intervall $I_\sigma \ldots a_\sigma \leqq x < b_\sigma$ definiert. Es braucht also nur noch gezeigt zu werden, dass (19) gilt, wo man wegen (36) die in Satz 2 definierte Summe

$$T_\sigma(c) = \sum_{(h)}{}' \left| \frac{1}{b_\sigma - x_0} \sum_{x=x_0}^{b_\sigma - 1} e^{2\pi i h \theta f(x)} \right|$$

für beliebiges feste $c > 0$ zu erstrecken hat über alle ganzen $h \neq 0$ mit

$$|h| \leqq \frac{c \sqrt[3]{b_\sigma}}{\varphi(b_\sigma) \log b_\sigma} \log \frac{2 \sqrt[3]{b_\sigma}}{\varphi(b_\sigma) \log b_\sigma} \quad (\sigma \geqq 1),$$

sodass wegen (31) $h$ erst recht an

$$h \neq 0, \, ganz; \; |h| \leqq r_\sigma$$

genügt. Aus (35) folgt somit a fortiori (19), womit gezeigt worden ist, dass alle Bedingungen von Satz 2 erfüllt sind.

Wegen (36) lehrt Satz 2 für jedes $\theta$ in $0 \leqq \theta \leqq 1$, dass nicht zu der oben konstruierten, durch die Definition von $f(x)$ und $w(x)$ eindeutig bestimmten Menge $\mathfrak{M}$ vom Mass Null gehört, die folgende Tatsache: die Anzahl $A^*(I_\sigma)$ der im Intervall $I_\sigma$ liegenden ganzzahligen Lösungen der diophantischen Ungleichung

$$\alpha < \theta f(x) < \alpha + \frac{\log b_\sigma}{\sqrt[3]{b_\sigma}} \varphi(b_\sigma) \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (37)$$

besitzt die Eigenschaft

$$\lim_{\sigma \to \infty} \frac{A^*(I_\sigma)}{(b_\sigma - x_0) \dfrac{\log b_\sigma}{\sqrt[3]{b_\sigma}} \varphi(b_\sigma)} = 1.$$

Wegen $\varphi(b_\sigma) \geqq \sigma$ wächst der Nenner

$$(b_\sigma - x_0) \frac{\log b_\sigma}{\sqrt[3]{b_\sigma}} \varphi(b_\sigma)$$

unbeschränkt mit $\sigma$, sodass also auch der Zähler $A^*(I_\sigma)$ unbeschränkt mit $\sigma$ zunimmt, d.h. es ist

$$\lim_{\sigma \to \infty} A^*(I_\sigma) = \infty \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (38)$$

Aus der Definition (22) von $\varphi(x)$ folgt für jedes Paar ganzer Zahlen $x$ und $\bar{y}$ mit $x_0 \leqq \bar{y} \leqq x$

$$\frac{\log x}{\sqrt[3]{x}}\, \varphi(x) \leqq \frac{\log \bar{y}}{\sqrt[3]{\bar{y}}}\, w(\bar{y}).$$

Für jedes ganze $x$ im Intervall $x_0 \leqq x < b_\sigma$ ist somit

$$\frac{\log b_\sigma}{\sqrt[3]{b_\sigma}}\, \varphi(b_\sigma) \leqq \frac{\log x}{\sqrt[3]{x}}\, w(x).$$

Eine ganzzahlige, im Intervall $I_\sigma$ liegende Lösung $x$ von (37) ist also erst recht eine ganzzahlige Lösung der diophantischen Ungleichung (7). Wegen (38) wächst also a fortiori die Anzahl der in $I_\sigma$ liegenden ganzzahligen Lösungen $x$ von (7) mit $\sigma$ unbeschränkt ins Unendliche, sodass Satz 1 bewiesen ist.

---

Mathematics. — *Die Doppelfünfen von* R. WEITZENBÖCK *und* D. BARBILIAN. Von E. A. WEISS in Bonn. (Communicated by Prof. R WEITZENBÖCK.)

(Communicated at the meeting of Sept. 24, 1932.)

Es wird eine Parameterdarstellung aller regulären $M_3^2$ des $R_4$ angegeben, die dem Koordinatensimplex gleichzeitig ein- und umbeschrieben sind. Indem die Punkte einer solchen $M_3^2$ einerseits auf die Geraden eines linearen Komplexes, andererseits auf die orientierten Kreise einer Ebene abgebildet werden, ergeben sich im Linienraume die WEITZENBÖCKsche [1]), in der Ebene der orientierten Kreise die BARBILIANsche [2]) Doppelfünf.

I. In letzter Zeit sind von verschiedenen Seiten zwei spezielle Doppelfünfen untersucht worden: *Im Linienraume* ist die WEITZENBÖCKsche Doppelfünf dadurch ausgezeichnet, dass je vier windschiefe ihrer Geraden ein „singuläres Quadrupel" derart bilden, dass die Gerade der Doppelfünf, welche sie schneidet, die *einzige* gemeinsame Trefflinie der vier Geraden ist. Die 10 Geraden der Konfiguration gehören einem linearen Komplex an und je vier zusammengehörige Geraden bilden ein äquianharmonisches

[1]) R. WEITZENBÖCK, Über eine Konfiguration von 10 Geraden im projektiven $R_3$. Proc. Amsterdam Ak. d. Wet. **31**, 1928, S. 133—137. Ferner: G. SCHAAKE, ebenda, S. 715—717.

[2]) D. BARBILIAN, Les cas d'exception de certaines propriétés quadratiques. Bul. de Math. et de Phys. de l'Ecole Polyt. I. Bucarest, 1929. S. 12—16.

G. TZITZÉICA, Sur certaines propriétés quadratiques. Ebenda, S. 16—21.