Mathematics.—*Ueber den Reduktionssatz bei affinem und projektivem Zusammenhang.* VON R. WEITZENBÖCK.

(Communicated at the meeting of December 17, 1932).

§ 1. *Die A_n mit der Gruppe P.*

In einer n-dimensionalen Mannigfaltigkeit $X_n(x^1, x^2, \ldots, x^n)$ mit der Gruppe P aller topologischen Abbildungen $x \rightarrow \bar{x}$ oder $\bar{x}^i = \bar{x}^i(x^1, x^2, \ldots, x^n)$ spricht man von einem "affinen Zusammenhang Γ", wenn ein System von n^3 Funktionen $\Gamma^k_{ij}(x^1, x^2, \ldots, x^n)$ gegeben ist, das bei einer Transformation $x \rightarrow \bar{x}$ aus P vermöge der Gleichungen transformiert wird:

$$\left.\begin{aligned} \bar{\Gamma}^k_{ij} &= \Gamma^t_{rs} \frac{\partial x^r}{\partial \bar{x}^i} \frac{\partial x^s}{\partial \bar{x}^j} \frac{\partial \bar{x}^k}{\partial x^t} + \frac{\partial^2 x^t}{\partial \bar{x}^i \partial \bar{x}^j} \frac{\partial \bar{x}^k}{\partial x^t} \quad \text{oder [1]} \\ \frac{\partial^2 t}{\bar{i}\,\bar{j}} &= \bar{\Gamma}^k_{ij} \frac{t}{\bar{k}} - \Gamma^t_{rs} \frac{r}{\bar{i}} \frac{s}{\bar{j}}. \end{aligned}\right\} \quad . \; . \; . \quad (1)$$

Diese Transformationsweise der Γ^k_{ij} ergibt sich am einfachsten aus der Forderung, dass für jeden kovarianten Vektor v_i der Ausdruck

$$dv_i\, dx^i - \Gamma^t_{rs}\, v_t\, dx^r\, dx^s \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (2)$$

bei der Gruppe P absolut-invariant ist. Statt (2) kann man auch fordern, dass für jeden kontravarianten Vektor w^i

$$\delta w^i = \frac{\partial w^i}{\partial x^s} dx^s + \Gamma^i_{rs}\, w^r\, dx^s \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (3)$$

wieder ein kontravarianter Vektor ist.

Die Zusammenhangskomponenten Γ^i_{rs} bestimmen in der X_n in bekannter Weise [2]) die infinitesimale Parallelverschiebung von Vektoren und die geodätischen Linien (paths). Letztere sind durch die Differentialgleichungen

$$\frac{d^2 x^i}{dt^2} + \Gamma^i_{rs} \frac{dx^r}{dt} \frac{dx^s}{dt} = \lambda(x) \,.\, \frac{dx^i}{dt} \qquad x^i = x^i(t) \quad . \; . \; . \; . \quad (4)$$

---

[1]) Wir schreiben im Folgenden kurz $\frac{r}{\bar{i}}$ statt $\frac{\partial x^r}{\partial \bar{x}^i}$ und $\frac{\alpha}{\beta}$ statt $\frac{\partial \bar{x}^\alpha}{\partial x^\beta}$, ebenso $\frac{\partial^2 m}{\bar{i}\,\bar{k}}$ an Stelle von $\frac{\partial^2 x^m}{\partial \bar{x}^i\, \partial \bar{x}^k}$ u.s.w.

[2]) Vgl. etwa H. WEYL, Raum-Zeit-Materie, 5. Aufl. Springer (1923), p. 113 oder J. A. SCHOUTEN, Der Ricci-Kalkül, Springer (1924), p. 76.

gegeben. Die n-dimensionale Mannigfaltigkeit X_n mit den in ihr gegebenen Γ^k_{ij} zusammen bilden eine affin-zusammenhängende Mannigfaltigkeit A_n.

Die Theorie der Differentialinvarianten Φ dieser A_n gegenüber der Gruppe P beruht dann auf dem *Reduktionssatz* [1]: die Φ sind affine Invarianten von Tensoren S^k_{ij}, $U^k_{i.mn}$ und deren kovarianten Ableitungen $S^k_{ij(\alpha)}$, $S^k_{ij(\alpha)(\beta)}$, ..., $U^k_{i.mn(\alpha)}$, ... Dabei ist

$$S^k_{ij} = \Gamma^k_{ij} - \Gamma^k_{ji} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (5)$$

und U ist der "Krümmungstensor"

$$U^k_{i.mn} = \frac{\partial \Gamma^k_{in}}{\partial x^m} - \frac{\partial \Gamma^k_{im}}{\partial x^n} + \Gamma^\lambda_{in}\, \Gamma^k_{\lambda m} - \Gamma^\lambda_{im}\, \Gamma^k_{\lambda n} \quad \ldots\ldots \quad (6)$$

Weiter ist

$$S_{ij(\alpha)} = \frac{\partial S^k_{ij}}{\partial x^\alpha} + \Gamma^k_{\lambda\alpha}\, S^\lambda_{ij} - \Gamma^\lambda_{i\alpha}\, S^k_{\lambda j} - \Gamma^\lambda_{j\alpha}\, S^k_{\lambda i}$$

und analog für die weiteren Ableitungen.

Sind die Γ^k_{ij} bezgl. i und j symmetrisch so fällt S^k_{ij} weg und es bleiben nur der Krümmungstensor und dessen kovariante Ableitungen im Reduktionssystem. Sind in der A_n weitere Tensoren gegeben, so sind diese und deren Ableitungen in ein Reduktionssystem aufzunehmen.

Nach (4) bestimmen Γ^i_{rs} und Γ^i_{sr} dieselben geodätischen Linien; wir wollen deshalb im Nachfolgenden stets die Symmetrie $\Gamma^i_{rs} = \Gamma^i_{sr}$ voraussetzen.

§ 2. *Die A_n mit den Gruppen P und B.*

Differentialinvarianten Φ der A_n sind Funktionen der Γ^k_{ij}, $\dfrac{\partial \Gamma^k_{ij}}{\partial x^\alpha}$, $\dfrac{\partial^2 \Gamma^k_{ij}}{\partial x^\alpha\, \partial x^\beta}$, ... (und allenfalls von Tensorkomponenten und deren Ableitungen), die bei der Gruppe P und bei den Transformationen (1a) die Invarianteneigenschaft haben. Wir verlangen nun ausserdem bei den Funktionen Φ noch Invarianz bei den Transformationen der Gestalt

$$\hat{\Gamma}^k_{ij} = \Gamma^k_{ij} + \delta^k_i\, \psi_j + \delta^k_j\, \psi_i \quad \ldots\ldots\ldots \quad (7)$$

wo ψ_i einen willkürlichen kovarianten Vektor bedeutet. Alle diese „bahntreuen" Abänderungen der Γ^k_{ij} bilden eine unendliche additive Gruppe B. Der Name „bahntreu" stammt daher [2], dass Γ^k_{ij} und $\hat{\Gamma}^k_{ij}$ in der A_n diesel-

---

[1]) Vgl. meine "Invariantentheorie", Groningen (1923), p. 356.

[2]) Vgl. J. A. SCHOUTEN, Der Ricci-Kalkül, Springer (1924), p. 76, 129.

ben geodätischen Linien bestimmen und dass umgekehrt auch jedes $\hat{\Gamma}_{ij}^{k}$ mit dieser Eigenschaft die Form (7) haben muss [1]).

Zur Ermittlung aller Φ liegt es auf der Hand vorerst die Gruppe B auszuschalten. Dies gelingt leicht durch Elimination der ψ_i aus (7) und liefert nach T. Y. THOMAS [2]) die bei B absolut-invarianten Funktionen

$$\Pi_{ij}^{k} = \hat{\Pi}_{ij}^{k} = \Gamma_{ij}^{k} - \frac{1}{n+1} (\delta_i^k \Gamma_{hj}^{h} + \delta_j^k \Gamma_{hi}^{h}) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (8)$$

Sie werden „Komponenten eines projektiven Zusammenhanges" genannt und wir setzen im Folgenden voraus, dass nicht alle $\Pi_{ij}^{k} = 0$ sind.

Eine Mannigfaltigkeit X_n in der die Π_{ij}^{k} nebst ihrer Transformationsweise gegeben sind, wollen wir eine B_n nennen. Für die bei $x \rightarrow \bar{x}$ enstehenden $\bar{\Pi}_{ij}^{k}$ findet [3]) man nach (8) und (1):

$$\frac{\partial^2 \alpha}{\bar{i}\ \bar{j}} = \bar{\Pi}_{ij}^{h} \frac{\alpha}{h} - \Pi_{\beta\gamma}^{\alpha} \frac{\beta}{\bar{i}} \frac{\gamma}{\bar{j}} + \frac{\partial \vartheta}{\partial \bar{x}^i} \frac{\alpha}{\bar{j}} + \frac{\partial \vartheta}{\partial \bar{x}^j} \frac{\alpha}{\bar{i}} \quad . \quad . \quad . \quad (9)$$

wobei gesetzt ist:

$$\vartheta = \frac{1}{n+1} \log \triangle \ , \ \triangle = \left| \frac{\partial x^i}{\partial \bar{x}^k} \right| , \ \vartheta_i = \frac{1}{n+1} \frac{\partial \log \triangle}{\partial \bar{x}^i} = \frac{1}{n+1} \frac{\partial_r^2}{\bar{i}\ \bar{s}} \frac{s}{r}. \quad (10)$$

Die Differentialinvarianten Φ der B_n sind dann Funktionen der Π_{ij}^{k}, $\frac{\partial \Pi_{ij}^{k}}{\partial x^\alpha}, \ldots.$ mit Invarianteneigenschaft bei (9) und ergeben sich durch Elimination der Ableitungen $\frac{\partial^2 \alpha}{\bar{i}\ \bar{j}}, \frac{\partial^3 \alpha}{\bar{i}\ \bar{j}\ \bar{k}}, \ldots..$ aus den Gleichungen (9) und den daraus durch Differenzieren entstehenden Gleichungen.

Aus (8) folgen noch die Gleichungen [4])

$$\Pi_{ij}^{k} = \Pi_{ji}^{k} \ , \ \Pi_{hj}^{h} = \Pi_{jh}^{h} = 0. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (11)$$

§ 3. *Die Projektivkrümmung.*

Bezüglich des im vorigen § formulierten Eliminationsproblem bemerken wir vorerst, dass es keine Differentialinvarianten nullter Ordnung der Π_{ij}^{k} allein gibt, denn aus (9) allein ist eine Elimination der $\frac{\partial^2 \alpha}{\bar{i}\bar{j}}$ nicht möglich. Auch eine Auflösung der Gleichungen (9) nach den $\frac{1}{2} n^2 (n+1)$

---

1) H. WEYL, Göttinger Nachr. (28. 1. 1921).

2) Proceed. Nat. Acad. of Sciences **11** (1925), p. 199—203.

3) Vgl. L. P. EISENHART, Non-Riemannian Geometry, New-York (1927), p. 99.

4) Auch bei nicht-symmetrischen Γ_{ij}^{k} würde man hier (11) erhalten.

zweiten Ableitungen $\dfrac{\partial^2 \nu}{\lambda\ \mu}$ ist nicht möglich. Man hat zwar ebensoviele Gleichungen (9), sie sind aber nicht linear-unabhängig, da z.B. (9) mal $\dfrac{j}{\alpha}$ wegen (11) zu $0 = 0$ führt.

Die Bestimmung der Differentialinvarianten erster Ordnung erfordert zunächst einmaliges Differenzieren von (9) nach $\bar{x}^k$ und Elimination der dritten Ableitungen $\dfrac{\partial^3 \alpha}{\overline{i\,j\,k}}$ durch Vertauschung von j mit k. Man erhält so den WEYL'schen projektiven Krümmungstensor

$$W^h_{ijk} = \Pi^h_{ijk} + \frac{1}{n-1}\left(\delta^h_j\, \Pi_{ik} - \delta^h_k\, \Pi_{ij}\right). \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (12)$$

Hierbei bedeuten:

$$\Pi^h_{ijk} = \frac{\partial \Pi^h_{ik}}{\partial x^j} - \frac{\partial \Pi^h_{ij}}{\partial x^k} + \Pi^\nu_{ik}\, \Pi^h_{\nu j} - \Pi^\nu_{ij}\, \Pi^h_{\nu k} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (13)$$

$$\Pi_{ij} = \Pi^h_{ijh}\,; \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (14)$$

dies sind keine Tensoren, denn man findet die Transformationsgleichungen

$$\bar{\Pi}^h_{ijk} = \Pi^\alpha_{\beta\gamma\delta}\, \frac{\bar{h}}{\alpha}\, \frac{\beta}{\bar{i}}\, \frac{\gamma}{\bar{j}}\, \frac{\delta}{\bar{k}} - \delta^h_j\, c_{ik} + \delta^h_k\, c_{ij} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (15)$$

mit

$$c_{ij} = \frac{1}{n-1}\left(\bar{\Pi}_{ij} - \Pi_{\alpha\beta}\, \frac{\alpha}{\bar{i}}\, \frac{\beta}{\bar{j}}\right) = \bar{\Pi}^h_{ij}\, \frac{\partial\theta}{\bar{h}} + \frac{\partial\theta}{\bar{i}}\, \frac{\partial\theta}{\bar{j}} - \frac{\partial^2\theta}{\overline{i\,j}} \quad . \quad (16)$$

Die letzte dieser Gleichungen kann man auch so schreiben[1]):

$$\frac{\partial^2 e^{-\theta}}{\overline{i\,j}} = \bar{\Pi}^\nu_{ij}\, \frac{\partial e^{-\theta}}{\bar{\nu}} + \frac{e^{-\theta}}{n-1}\left(\bar{\Pi}_{ij} - \Pi_{\beta\gamma}\, \frac{\beta}{\bar{i}}\, \frac{\gamma}{\bar{j}}\right) \quad . \quad . \quad . \quad (17)$$

und statt (15) erhält man vermöge der ersten der Gleichungen (16) die Transformationsgleichungen für W^h_{ijk}:

$$\bar{W}^h_{ijk} = W^\alpha_{\beta\gamma\delta}\, \frac{\bar{h}}{\alpha}\, \frac{\beta}{\bar{i}}\, \frac{\gamma}{\bar{j}}\, \frac{\delta}{\bar{k}} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (18)$$

Für diesen Tensor gilt:

$$\left.\begin{aligned} W^h_{ijk} = -\, W^h_{ikj}\ ;\ W^h_{ijk} + W^h_{jki} + W^h_{kij} = 0\ ; \\ W^i_{ijk} = W^j_{ijk} = W^k_{ijk} = 0. \end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (19)$$

[1]) EISENHART, l.c. p. 100.

Dagegen haben wir für die Π^h_{ijk}:

$$\Pi^h_{ijk} = -\Pi^h_{ikj} \quad ; \quad \Pi^h_{ijk} + \Pi^h_{jki} + \Pi^h_{kij} = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \tag{20}$$

$$\Pi^i_{ijk} = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \tag{21}$$

$$\Pi^j_{ijk} = \frac{\partial \Pi^j_{ik}}{\partial x^j} - \Pi^\nu_{ij}\, \Pi^j_{\nu k} = -\Pi^j_{ikj} = -\Pi_{ik} \quad . \quad . \quad . \quad . \tag{22}$$

Differenziert man (17) nach $\bar{x}^k$, vertauscht j mit k und subtrahiert, so entsteht:

$$\Pi_{i.jk} = \Pi_{\alpha,\beta\gamma} \frac{\alpha}{\bar{i}} \frac{\beta}{\bar{j}} \frac{\gamma}{\bar{k}} + (1-n)\, \overline{W}^h_{ijk} \frac{\partial \vartheta}{\bar{h}} \quad . \quad . \quad . \quad . \tag{23}$$

$$\Pi_{i.jk} = \frac{\partial \Pi_{ij}}{k} - \frac{\partial \Pi_{ik}}{j} + \Pi^\nu_{ij}\, \Pi_{\nu k} - \Pi^\nu_{ik}\, \Pi_{\nu j} \quad . \quad . \quad . \tag{24}$$

$$\Pi_{i.jk} = -\Pi_{i.kj}\ ,\ \Pi_{i.jk} + \Pi_{j.ki} + \Pi_{k.ij} = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \tag{25}$$

§ 4. *Die skalare Dichte* $\mathfrak{T}$.

Wenn man über eine skalare Dichte $\mathfrak{T}$ (= relative Invarianten vom $\triangle$-Gewichte Eins) verfügt, lässt sich das Reduktionsproblem für die Differentialinvarianten Φ der Π^h_{ij} leicht lösen. Dabei kann $\mathfrak{T}$ auch von den Π^h_{ij} und deren Ableitungen selbst abhängig sein. Wir haben bei der Gruppe P: $\bar{\mathfrak{T}} = \triangle \,.\, \mathfrak{T}$ und daher

$$\theta_i = \frac{\partial \theta}{\partial \bar{x}^i} = \frac{1}{n+1} \frac{\partial \log \triangle}{\partial \bar{x}^i} = \frac{1}{n+1} \left(\frac{\partial \log \bar{\mathfrak{T}}}{\partial \bar{x}^i} - \frac{\partial \log \mathfrak{T}}{\partial x^\nu} \frac{\nu}{\bar{i}} \right) . \tag{26}$$

Hiermit wird es möglich, die Ableitungen von θ in (9) zu eliminieren. Man erhält dann die Transformationsgleichungen für die Komponenten T^h_{ij} eines *affinen Zusammenhanges*:

$$T^h_{ij} = \Pi^h_{ij} + \frac{1}{n+1} \left(\delta^h_i \frac{\partial \log \mathfrak{T}}{j} + \delta^h_j \frac{\partial \log \mathfrak{T}}{i} \right) \quad . \quad . \quad . \tag{27}$$

Jetzt ist es möglich, das partielle Differenzieren $\dfrac{\partial}{\partial x^\nu}$ durch kovariantes Ableiten mit Hilfe dieser T^h_{ij} zu ersetzen.

Auf diese Weise erhält man aus (16) statt der Π_{ij} den symmetrischen *Tensor*

$$\left. \begin{aligned} A_{ij} = \frac{1}{n-1} \Pi_{ij} - \frac{1}{n+1} \Pi^h_{ij} \frac{\partial \log \mathfrak{T}}{h} - \frac{1}{(n+1)^2} \frac{\partial \log \mathfrak{T}}{i} \frac{\partial \log \mathfrak{T}}{j} + \\ + \frac{1}{n+1} \frac{\partial^2 \log \mathfrak{T}}{ij} \end{aligned} \right\} \quad . \quad . \tag{28}$$

Dagegen tritt an die Stelle der $\Pi_{i.jk}$ nach (23) und (26) der *Tensor*

$$U_{ijk} = \frac{1}{n-1} \Pi_{i.jk} + \frac{1}{n+1} W^{\alpha}_{ijk} \frac{\partial \log \mathfrak{T}}{\alpha} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (29)$$

Er weist dieselben Symmetrieeigenschaften auf wie W^{h}_{ijk}.

Bildet man von einem Tensor S die kovarianten Ableitungen mit Hilfe der T^{h}_{ij} von (27), so entsteht ein Tensor $S_{(k)}$. Nimmt man bei diesem Prozesse die Π^{h}_{ij} statt der T^{h}_{ij}, so entsteht *i. A.* kein Tensor, sondern [1]) ein System von Funktionen $S_{|k}$. Der Zusammenhang zwischen $S_{(k)}$ und $S_{|k}$ wird dann durch (27) festgelegt. Man findet [2])

$$\Pi_{i.jk} = \Pi_{ij|k} - \Pi_{ik|j} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (30)$$

und mit Hilfe dieser Beziehung lässt sich dann der Tensor U_{ijk} von (29) auf $A_{ij(k)} - A_{ik(j)}$ zurückführen. Damit gewinnt man den *Reduktionssatz: Die Differentialinvarianten Φ der Π^{h}_{ij} sind Invarianten der Tensoren W^{h}_{ijk}, A_{ij} und der hieraus durch kovariantes Ableiten mit Hilfe der T^{h}_{ij} entstehenden Tensoren.*

Es liegt nahe, die hier gebrauchte Tensordichte $\mathfrak{T}$ aus den Π^{h}_{ij} allein aufzubauen. Es gibt, wenn W^{h}_{ijk} nicht identisch verschwindet, wofür *z. B.* $n > 2$ notwendig ist, ausser dem projektiven Krümmungstensor keine weiteren Tensoren erster Differentiationsordnung. Differentialinvarianten erster Ordnung Φ_1 sind dann aus den W^{h}_{ijk} allein zu konstruieren. Ist Φ_1 ganz-rational vom Grade p in den W^{h}_{ijk}, dann hat man $3p$ untere und p obere Indizes, also ist

$$q = \frac{1}{n}(3p - p) = \frac{2p}{n} = ganz, \geqq 2$$

das $\triangle$-Gewicht von Φ_1 und

$$\mathfrak{T} = \Phi_1^{\frac{1}{q}} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (31)$$

ist eine Tensordichte, die bei (27) verwendet werden kann.

Für den Fall, dass bei $n > 2$ der Tensor W^{h}_{ijk} wenigstens eine nichtverschwindende Invariante Φ_1 besitzt, haben wir also die Tensoren W^{h}_{ijk}, A_{ij} und deren kovariante Ableitungen im Reduktionssystem [3]).

Wir behandeln vorerst den Fall $n = 2$.

---

[1]) O. VEBLEN und J. M. THOMAS nennen $S_{|k}$ die "projektive Ableitung" von S. Vgl. Annals of Math. **27** (1926), p. 279—296.

[2]) EISENHART, l.c. p. 101.

[3]) Man kann dies auch so ausdrücken: Im Raume B_n mit dem projektiven Zusammenhang Π^{h}_{ij} wird durch Φ_1 ein topologisch-invarianter *affiner* Zusammenhang T^{h}_{ij} ausgezeichnet. Vgl. J. A. SCHOUTEN und ST. GOLAB, Mathem. Zeitschr. **32** (1930), p. 207, Anmerkung.

§ 5. $n = 2$.

Hier ist $W^h_{ijk} \equiv 0$ und nach (25) ist $\Pi_{\alpha,\beta\gamma}$ ein Tensor 3. Stufe, der wegen $n = 2$ und $\Pi_{\alpha,\beta\gamma} = -\Pi_{\alpha,\gamma\beta}$ auf die *kovariante Vektordichte*

$$J_i = \Pi_{i,12} \quad , \quad \bar{J}_i = \triangle . J_\alpha \frac{\alpha}{\bar{i}} . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (32)$$

führt. Wir setzen voraus dass $J_i \neq 0$, dass also der Raum B_2 nicht projektiv-eben sei.

Nach (24), (12) und (14) haben wir:

$$J_i = \frac{\partial \Pi_{i1}}{2} - \frac{\partial \Pi_{i2}}{1} + \Pi^\nu_{i1} \Pi_{\nu 2} - \Pi^\nu_{i2} \Pi_{\nu 1} \qquad (i = 1, 2) \quad . \quad . \quad (33)$$

$$\Pi_{ij} = -\frac{\partial \Pi^\nu_{ij}}{\nu} + \Pi^\lambda_{\mu i} \Pi^\mu_{\lambda j} ; \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (34)$$

J_i ist also von zweiter Differentiationsordnung.

Wir trachten wieder eine skalare Dichte niedrigster Ordnung zu finden. Hierzu gehen wir vorerst aus vom Produkte $\Pi^h_{ij} J_r J_s$, alternieren über ir und ebenso über js und überschieben mit J_h, d.h. wir bilden

$$J = (\Pi^h_{11} J_2 J_2 - 2 \Pi^h_{12} J_1 J_2 + \Pi^h_{22} J_1 J_1) J_h \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (35)$$

Setzen wir zur Abkürzung

$$[a_i\, b_k\, c_r\, d_s] = a_i\, b_k\, c_r\, d_s - a_r\, b_k\, c_i\, d_s - a_i\, b_s\, c_r\, d_k + a_r\, b_s\, c_i\, d_k , \quad . \quad (36)$$

so kann man statt (35) schreiben:

$$J = [\Pi^h_{ik} J_r J_s] J_h .$$

Nach (9) und (32) erhält man für dieses J die Transformationsgleichung

$$\bar{J} = \triangle^5 . J + \triangle \left[\frac{\partial^2 \alpha}{\bar{i}\,\bar{j}} \bar{J}_r \bar{J}_s \right] J_\alpha \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (37)$$

Gehen wir andererseits von (32) aus, so haben wir

$$\frac{\partial \bar{J}_i}{\bar{j}} = 3 \bar{J}_i\, \theta_j + \triangle \frac{\partial J_\alpha}{\beta} \frac{\alpha}{\bar{i}} \frac{\beta}{\bar{j}} + \triangle \frac{\partial^2 \alpha}{\bar{i}\,\bar{j}} J_\alpha .$$

Hiermit finden wir

$$\left[\frac{\partial \bar{J}_i}{\bar{j}} \bar{J}_r \bar{J}_s \right] = \triangle^5 \left[\frac{\partial J_\alpha}{\beta} J_\gamma J_\delta \right] + \triangle \left[\frac{\partial^2_\alpha}{\bar{i}\,\bar{j}} \bar{J}_r \bar{J}_s \right] J_\alpha \quad . \quad . \quad . \quad (38)$$

Aus (37) und (38) lassen sich die zweiten Ableitungen $\frac{\partial^2 \alpha}{i\,j}$ eliminieren und geben die einzige Invariante dritter Ordnung vom $\triangle$-Gewicht 5:

$$\left.\begin{aligned} K &= [\,\Pi^h_{ij} J_r\, J_s\,]\, J_h - \left[\frac{\partial J_i}{j} J_r\, J_s\right] = \left[\left(\Pi^h_{ij} J_h - \frac{\partial J_i}{j}\right) J_r\, J_s\right] \\ \overline{K} &= \triangle^5 . K \end{aligned}\right\} \quad . \quad (39)$$

Setzen wir also

$$\mathfrak{T} = K^{\frac{1}{5}}, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (40)$$

so wird $\mathfrak{T}$ eine skalare Dichte und für den Fall $K \neq 0$ kann man sie nach (27) zum kovarianten Ableiten verwenden. *Das Reduktionssystem besteht dann aus $\mathfrak{T}$, dem Vektor J_i und dessen kovarianten Ableitungen.*

Ist $J_i = 0$, dann ist der Raum B_2 projektiv-eben und umgekehrt.

§ 6. $n \geqq 3$, $W^h_{ijk} \neq 0$.

Hier hat man zwei Fälle zu unterscheiden, je nach dem der WEYL'sche Krümmungstensor W^h_{ijk} eine Invariante $\Phi_1 \neq 0$ besitzt oder nicht. Für den ersten Fall ist der Reduktionssatz am Schlusse des § 4 formuliert worden. Wir wollen hieran anschliessend zeigen, dass im Allgemeinen ein Φ_1 existiert. Sei nämlich $n = 3$. Dann kann man statt des Tensors W^h_{ijk} die Tensordichte $V^{h\,l}_i = W^h_{i.jk}$ einführen, wobei $j\,k\,l$ die Indizes 123 sind. Hieraus konstruieren wir die Invariante vom $\triangle$-Gewicht zwei:

$$\Phi_1 = \sum_{\alpha,\beta\gamma} \pm\, V^{\alpha,j}_i\, V^{\beta,k}_j\, V^{\gamma,i}_k \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (41)$$

wobei über α, β und γ alterniert wird.

Nehmen wir nun $V^{1,3}_2$, $V^{2,1}_3$ und $V^{3,2}_1$ verschieden von Null, alle anderen $V^{i,k}_j$ aber $= 0$, so ergibt sich

$$\Phi_1 = -3\, V^{1,3}_2 \,.\, V^{2,1}_3 \,.\, V^{3,2}_1 \neq 0 \,.$$

Der zweite Fall stellt sich ein, wenn alle algebraischen Invarianten von W^h_{ijk} verschwinden; hier muss man zu Differentialinvarianten von wenigstens zweiter Ordnung übergehen. Wenn wir $W^h_{ijk(l)}$ die mit den Γ^t_{rs} und $W^h_{ijk|l}$ die mit den Π^t_{rs} gebildeten „kovarianten" Ableitungen von W^h_{ijk} nennen, so ergibt sich die Beziehung

$$W^h_{ijk(l)} = W^h_{ijk|l} - 2\, W^h_{ijk}\, v_l + W^\alpha_{ijk}\, v_\alpha\, \delta^h_l - \sum_{ijk} W^h_{ljk}\, v_i \quad . \quad (42)$$

wobei $v_i = \Gamma^h_{hi}$ gesetzt ist. Hieraus folgen weiter

$$W^h_{ijk(h)} = W^h_{ijk|h} + (n-2)\, W^h_{ijk}\, v_h \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (43)$$

$$\left.\begin{aligned} & W^h_{ijk(l)} - \frac{1}{n-2}\, W^\alpha_{ijk(\alpha)}\, \delta^h_l = \\ & = W^h_{ijk|l} - \frac{1}{n-2}\, W^\alpha_{ijk|\alpha}\, \delta^h_l - 2\, W^h_{ijk}\, v_l - \sum_{ijk} W^h_{ljk}\, v_i \end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad (44)$$

Für die durch (24) gegebenen Funktionen $\Pi_{i.jk}$ ergibt sich (30) und [1])

$$W^h_{ijk|h} = \frac{n-2}{n-1}\, \Pi_{i.jk}\,, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (45)$$

woraus wir entnehmen können, dass wir bei der weiteren Konstruktion von Differentialinvarianten von (44) allein Gebrauch machen müssen. Auch die Identität von BIANCHI, die aus der zyklischen Summe $\sum_{jkl} W^h_{ijk(l)}$ entsteht, liefert keinen neuen Tensor.

Aus (42) entsteht:

$$\sum_{jkl} W^h_{ijk|l} = \frac{1}{n-2} \sum_{jkl} W^\alpha_{ijk|\alpha}\, \delta^h_l \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (46)$$

Von (42) kommt man zu Differentialinvarianten zweiter Ordnung der Π^k_{ij} auf die folgende Weise. Wir schreiben statt (42)

$$W^h_{ijk(l)} = W^h_{ijk|l} - a^{hr}_{ijkl}\, v_r, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (47)$$

wo a^{hr}_{ijkl} den Tensor

$$a^{hr}_{ijkl} = 2\, W^h_{ijk}\, \delta^r_l + W^\lambda_{ijk}\, \delta^r_\lambda\, \delta^h_l - \sum_{ijk} W^h_{ljk}\, \delta^r_i \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (48)$$

bedeutet. Nun nennen wir S irgend eine Indexanordnung ${}^{h}_{ijkl}$ und setzen:

$$W^h_{ijk(l)} = \hat{U}_S\,, \quad W^h_{ijk|l} = U_S\,, \quad a^{hr}_{ijkl} = a^r_S\,;$$

dann kann man (48) kürzer so schreiben:

$$\hat{U}_S - U = a^r_S\, v_r \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (49)$$

Schreiben wir diese Gleichung für $n+1$ verschiedene Indexgruppen $S_1, S_2, \ldots, S_{n+1}$ an und eliminieren die v_r, so entsteht

$$\begin{vmatrix} \hat{U}_{S_1} - U_{S_1} & a^1_{S_1} & a^2_{S_1} & \ldots\ldots & a^n_{S_1} \\ \hat{U}_{S_2} - U_{S_2} & a^1_{S_2} & a^2_{S_2} & \ldots\ldots & a^n_{S_2} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots\ldots & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots\ldots & \ldots \\ \hat{U}_{S_{n+1}} - U_{S_{n+1}} & a^1_{S_{n+1}} & a^2_{S_{n+1}} & \ldots\ldots & a^n_{S_{n+1}} \end{vmatrix} = 0$$

[1]) EISENHART, l.c. p. 102.

oder auch

$$\begin{vmatrix} \hat{U}_{S_1} & a^1_{S_1} & a^2_{S_1} & \dots & a^n_{S_1} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} U_{S_1} & a^1_{S_1} & a^2_{S_1} & \dots & a^n_{S_1} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \end{vmatrix},$$

d.h., wenn wir die Indexgruppen S_i wieder auflösen: Die Determinanten

$$\Omega = \begin{vmatrix} W^{h_1}_{i_1 j_1 k_1 | l_1} & a^{h_1 1}_{i_1 j_1 k_1 l_1} & \dots & a^{h_1 n}_{i_1 j_1 k_1 l_1} \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ W^{h_{n+1}}_{i_{n+1} j_{n+1} k_{n+1} | l_{n+1}} & a^{h_{n+1} 1}_{i_{n+1} j_{n+1} k_{n+1} l_{n+1}} & \dots & a^{h_{n+1} n}_{i_{n+1} j_{n+1} k_{n+1} l_{n+1}} \end{vmatrix} \tag{50}$$

stellen Tensordichten zweiter Ordnung vor [1]).

§ 7. *Zusammenfassung.*

Wir fassen unsere Ergebnisse zusammen. Sind alle $\Pi^k_{ij} \equiv 0$ (für alle x_i), so gibt es keine Invarianten. Wir setzen also $\Pi^k_{ij} \not\equiv 0$ voraus und haben dann die Fälle:

I. $n = 2$, $W^h_{ijk} \equiv 0$ mit den Unterfällen:

Ia. $J_i \equiv 0$ (Gleichung (33)). Die Mannigfaltigkeit B_2 ist projektiv-eben. Keine Differentialinvarianten.

Ib. $J_i \not\equiv 0$, $K \not\equiv 0$ (Gleichung (39)). Der Reduktionssatz für diesen Fall wurde am Ende des § 5 gegeben. Unerledigt bleibt die Frage was $K \equiv 0$ bedeutet und wie man dann zu den Differentialinvarianten höherer Ordnung kommt.

II. $n > 2$, $W^h_{ijk} \equiv 0$. B_n ist projektiv-eben; nach (46) verschwinden auch alle $\Pi_{i.jk}$ und es gibt keine Differentialinvarianten der Π^k_{ij}.

III. $n > 2$, $W^h_{ijk} \not\equiv 0$, aber alle algebraischen Invarianten des WEYL'schen Tensors W^h_{ijk} verschwinden. Hier enstehen weitere Differentialinvarianten der Π^k_{ij} aus den Tensordichten Ω (Gleichung (50)). Ungelöst bleibt die Frage nach der besonderen Struktur, die ein Tensor W^h_{ijk} aufweist, wenn alle seine algebraischen Invarianten verschwinden.

IV. $n > 2$, $W^h_{ijk} \not\equiv 0$ und wenigstens eine Invariante Φ_1 von W^h_{ijk} ist $\not\equiv 0$. Dann gilt der am Schlusse des § 4 formulierte Reduktionssatz. Dass ein $\Phi_1 \not\equiv 0$ im allgemeinen existiert, haben wir im § 6 an einem Beispiele für $n = 3$ durch besondere Wahl der W^h_{ijk} gezeigt. Unerledigt bleibt dabei noch die Frage ob auch die Π^k_{ij} so wählbar sind, dass ein $\Phi_1 \not\equiv 0$ existiert.

---

[1]) Die Aufstellung der Tensordichten Ω und der sich daraus ergebenden Invarianten ist der erste Schritt, den ein allgemeines Aequivalenztheorem von VEBLEN und THOMAS vorschreibt. Vgl. Annals of Mathem. ser. 2, Vol. **27** (1926), p. 279—298.