Mathematics. — *Ueber die Eigenvektoren und Eigenräume einer Matrix.*
Von R. WEITZENBÖCK.

(Communicated at the meeting of January 28, 1933).

Eine n-dimensionale quadratische Matrix $A = \| a_i^k \|$ $(i, k = 1, 2, \ldots, n)$ erzeugt in einem affinen Raume O $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ eine lineare Vektortransformation, indem dem Vektor x der Vektor Ax mit den Komponenten $a_i^k x_k$ zugeordnet wird. Liegen x und Ax auf derselben Geraden durch den Ursprung O, so heisst x ein *Eigenvektor* von A. Bleibt ein durch O gehender d-dimensionaler linearer Raum bei der Abbildung A invariant, so heisst er *Eigenraum* (oder Fundamentalraum).

Ich gebe im Folgenden eine natürliche Konstruktion der zu einer Matrix A gehörigen Eigenvektoren und Eigenräume, die nur voraussetzt, dass man die Eigenwerte von A kennt.

Für einen Eigenvektor x gilt $Ax = \lambda x$, d.h. $(\lambda E - A)x = 0$; λ muss also ein Eigenwert von A, d.h. eine Wurzel von

$$D_n(\lambda) = det(\lambda E - A) = (\lambda - \lambda_1)^{r_1} (\lambda - \lambda_2)^{r_2} \ldots . (\lambda - \lambda_l)^{r_l} = 0. \quad . \quad (1)$$

sein. Hierbei ist $\lambda_i \neq \lambda_k$, λ_i ist r-fache Wurzel und $r_1 + r_2 + \ldots . + r_l = n$.

Wir nennen

$$\alpha_i^k = \lambda \delta_i^k - a_i^k = \alpha_i^k(\lambda) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2)$$

die Elemente der λ-Matrix $\lambda E - A$ und

$$B(\lambda) = \| \beta_i^k(\lambda) \| \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (3)$$

die Adjungierte von $\lambda E - A$, sodass also

$$(\lambda E - A) B = D_n(\lambda) . E \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (4)$$

ist.

Sei nun zunächst λ_1 ein *einfacher* Eigenwert. Dann ist $D_n(\lambda_1) = 0$, $D_n'(\lambda_1) \neq 0$, $B(\lambda_1) \neq 0$ und aus (4) folgt für $\lambda = \lambda_1$:

$$\lambda_1 B(\lambda_1) = A B(\lambda_1).$$

Für einen willkürlichen Vektor ξ gilt dann $\lambda_1 B(\lambda_1)\xi = A B(\lambda_1)\xi$, d.h.

$$x = B(\lambda_1)\xi \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (5)$$

ist ein zum Eigenwerte λ_1 gehöriger Eigenvektor. Man beweist leicht, dass es, von einem konstanten Faktor abgesehen, zu jedem einfachen Eigenwerte nur *einen* Eigenvektor gibt.

Die Darstellung (5) des Eigenvektors x kann man auch aus der Determinante

$$B^u_\xi = - \begin{vmatrix} \alpha^1_1 & & & \xi_1 \\ & \ddots & & \vdots \\ & & \alpha^n_n & \xi_n \\ u^1 & \cdots & u^n & 0 \end{vmatrix} \qquad \ldots\ldots\ldots (6)$$

entnehmen: die x_i sind die Koeffizienten von u^i in dieser Determinante. Und dass $Ax = \lambda_1 x$ wird, erkennt man so: die Komponenten von Ax erhält man, indem man in (6) u^i durch $a^i_s u^s = \lambda_1 u^i - \alpha^i_s u^s$ ersetzt.

Wir zeigen jetzt, dass die Darstellung (6) auf mehrfache Eigenwerte verallgemeinert werden kann. Es sei λ_1 ein r_1-facher Eigenwert mit $r_1 > 1$. Die Normalform von JORDAN der Matrix A hat dann ein erstes Land mit r_1 Reihen, das in h_1 Felder mit je $e_{11}, e_{21}, \ldots, e_{h_1 1}$ Reihen zerfällt:

$$\left.\begin{Vmatrix} \left.\begin{array}{cccc} \lambda_1 & -1 & & \\ & \lambda_1 & \ddots & \\ & & \ddots & -1 \\ & & & \lambda_1 \end{array}\right\} e_{11} & & \\ & \left.\begin{array}{cccc} \lambda_1 & -1 & & \\ & \lambda_1 & \ddots & \\ & & \ddots & -1 \\ & & & \lambda_1 \end{array}\right\} e_{21} & \\ & & \begin{array}{cc} \ddots & \\ & \lambda_1 \end{array} \end{Vmatrix}\right\} r_1$$

$$e_{11} \geqq e_{21} \geqq \ldots \geqq e_{h_1 1} \geqq 1$$

$$e_{11} + e_{21} + \ldots + e_{h_1 1} = r_1$$

Alle nicht angeschriebenen Elemente sind Null.

Sei $M_k(\lambda)$ ein k-reihiger Minor von $\| a_i^k \| = \det(\lambda E - A)$. Dann ist

$$\begin{array}{lll}
(\lambda-\lambda_1)^{r_1} & \text{die höchste Potenz von } (\lambda-\lambda_1), \text{ die alle } M_n & (\lambda) \text{ teilt,} \\
(\lambda-\lambda_1)^{r_1-e_{11}} & \text{,, \quad ,, \quad ,, \quad ,, } (\lambda-\lambda_1), \text{ ,, \quad ,, } M_{n-1} & (\lambda) \text{ ,, ,} \\
(\lambda-\lambda_1)^{r_1-e_{11}-e_{21}} & \text{,, \quad ,, \quad ,, \quad ,, } (\lambda-\lambda_1), \text{ ,, \quad ,, } M_{n-2} & (\lambda) \text{ ,, ,} \\
\cdots & \cdots & \cdots \\
(\lambda-\lambda_1)^{r_1-e_{11}-\ldots-e_{h_1-1,1}} & \text{die höchste Potenz von } (\lambda-\lambda_1), \text{ die alle } M_{n-h_1+1} & (\lambda) \text{ teilt,} \\
(\lambda-\lambda_1)^{0} & \text{,, \quad ,, \quad ,, \quad ,, } (\lambda-\lambda_1), \text{ ,, \quad ,, } M_{n-h_1} & (\lambda) \text{ ,, ,}
\end{array}$$

d.h. alle $M_{n-h_1+1}(\lambda_1)$ sind Null, während nicht alle $M_{n-h_1}(\lambda_1)$ verschwinden. $\| a_i^k(\lambda_1) \|$ hat also den Rang $n - h_1$.

Analog zu (6) konstruieren wir weitere geränderte Determinanten

$$C_{y\xi}^{vu} = + \begin{vmatrix} a_1^1 \cdot & & & y_1 & \xi_1 \\ & \ddots & & \vdots & \vdots \\ & & \cdot a_n^n & y_n & \xi_n \\ v^1 & \ldots\ldots & v^n & 0 & 0 \\ u^1 & \ldots\ldots & u^n & 0 & 0 \end{vmatrix} = C_i^k u^i \xi_k \; ; \; D_{zy\xi}^{wvu} = - \begin{vmatrix} a_1^1 \cdot & & & z_1 & y_1 & \xi_1 \\ & \ddots & & \vdots & \vdots & \vdots \\ & & \cdot a_n^n & z_n & y_n & \xi_n \\ w^1 & \ldots\ldots & w^n & 0 & 0 & 0 \\ v^1 & \ldots\ldots & v^n & 0 & 0 & 0 \\ u^1 & \ldots\ldots & u^n & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = D_i^k u^i \xi_k \; ; \quad (7)$$

u. s. f.

die, als bilineare Formen in u^i und ξ_k betrachtet, die Matrizen $C(\lambda) = \| C_i^k \|$, $D(\lambda) = \| D_i^k \|, \ldots$ liefern. Für diese Matriezen gelten die Gleichungen:

$$\left.\begin{array}{l} (\lambda E - A) \,.\, B(\lambda) = D_n(\lambda) \,.\, E \\ (\lambda E - A) \,.\, C(\lambda) = \Sigma\, B(\lambda) \\ (\lambda E - A) \,.\, D(\lambda) = \Sigma\, C(\lambda) \\ \cdots\cdots\cdots \end{array}\right\} \quad \ldots\ldots \quad (8)$$

Beweis: Die erste dieser Gleichungen ist (4). Bei der zweiten wird C mit $\| a_i^k \|$ linksseitig miltipliziert, d.h. man hat in der Determinante $C_{y\xi}^{vu}$ die u^i durch $a_s^i u^s$ zu ersetzen. Die Elemente der Matrix $(\lambda E - A) . C(\lambda)$ sind also die Koeffizienten von $u^i \xi_k$ in

$$\begin{vmatrix} a_1^1 \cdot & & & y_1 & \xi_1 \\ & \ddots & & \vdots & \vdots \\ & & \cdot a_n^n & y_n & \xi_n \\ v^1 & \ldots\ldots & v^n & 0 & 0 \\ a_s^1 u^s & \ldots\ldots & a_s^n u^s & 0 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1^1 \cdot & & & y_1 & \xi_1 \\ & \ddots & & \vdots & \vdots \\ & & \cdot a_n^n & y_n & \xi_n \\ v^1 & \ldots\ldots & v^n & 0 & 0 \\ 0 & \ldots\ldots & 0 & -u^i y_i & u^i \xi_i \end{vmatrix}$$

Entwickeln wir die letzte Determinante nach der letzten Zeile, so erhalten wir die zweite der Gleichungen (8). Analog bei den weiteren Gleichungen.

Jetzt differenzieren wir (8) s-mal nach λ; dies gibt:

$$\left.\begin{aligned}(\lambda E - A) \,.\, B^{(s)}(\lambda) &= D_n^{(s)}(\lambda) \,.\, E - s \,.\, B^{(s-1)}(\lambda) \\ (\lambda E - A) \,.\, C^{(s)}(\lambda) &= \Sigma\, B^{(s)}(\lambda) - s \,.\, C^{(s-1)}(\lambda) \\ \ldots &\ldots\ldots\end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots \quad (9)$$

In $(9)_1$ setzen wir der Reihe nach

$$s = r_1 - 1\,,\, r_1 - 2\,, \ldots\ldots, r_1 - e_{11} + 1\,,\, r_1 - e_{11} \quad \text{und} \quad \lambda = \lambda_1 \,.$$

Wegen

$$\left.\begin{aligned}&D_n(\lambda_1) = D_n'(\lambda_1) = \ldots\ldots = D_n^{(r_1-1)}(\lambda_1) = 0\,,\; D_n^{(r_1)}(\lambda_1) \neq 0\,, \\ &B(\lambda_1) = B'(\lambda_1) = \ldots\ldots = B^{(r_1-e_{11}-1)}(\lambda_1) = 0\,, \\ &\qquad\qquad \text{aber wenigstens ein } B^{(r_1-e_{11})}(\lambda_1) \neq 0\,, \\ &C(\lambda_1) = C'(\lambda_1) = \ldots\ldots = C^{(r_1-e_{11}-e_{21}-1)}(\lambda_1) = 0\,, \\ &\qquad\qquad \text{aber wenigstens ein } C^{(r_1-e_{11}-e_{21})}(\lambda_1) \neq 0\,, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\end{aligned}\right\} \quad . \quad (10)$$

ergibt sich aus $(9)_1$:

$$\left.\begin{aligned}(\lambda_1 E - A) \,.\, B^{(r_1-1)}(\lambda_1) &= -(r_1 - 1) \,.\, B^{(r_1-2)}(\lambda_1) \\ \ldots\ldots &\ldots\ldots \\ (\lambda_1 E - A) \,.\, B^{(r_1-e_{11}+1)}(\lambda_1) &= -(r_1 - e_{11} + 1) \,.\, B^{(r_1-e_{11})}(\lambda_1) \\ (\lambda_1 E - A) \,.\, B^{(r_1-e_{11})}(\lambda_1) &= 0.\end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots \quad (11)$$

Aus $(9)_2$ erhalten wir ebenso für

$$s = r_1 - e_{11} - 1\,,\, r_1 - e_{11} - 2\,, \ldots\ldots, r_1 - e_{11} - e_{21} \quad \text{und} \quad \lambda = \lambda_1 :$$

$$\left.\begin{aligned}(\lambda_1 E - A) \,.\, C^{(r_1-e_{11}-1)}(\lambda_1) &= -(r_1 - e_{11} - 1) \,.\, C^{(r_1-e_{11}-2)}(\lambda_1)\,, \\ \ldots\ldots &\ldots\ldots \\ (\lambda_1 E - A) \,.\, C^{(r_1-e_{11}-e_{21}+1)}(\lambda_1) &= -(r_1 - e_{11} - e_{21} + 1) \,.\, C^{(r_1-e_{11}-e_{21})}(\lambda_1)\,, \\ (\lambda_1 E - A) \,.\, C^{(r_1-e_{11}-e_{21})}(\lambda_1) &= 0.\end{aligned}\right\} \quad . \quad (12)$$

und analog mit den weiteren Gleichungen (9).

Setzen wir jetzt, wenn ξ einen willkürlichen Vektor bedeutet:

$$\left.\begin{array}{l} x^{(1)} = B^{(r_1-1)}(\lambda_1)\,.\,\xi \quad , \; x^{(2)} = B^{(r_1-2)}(\lambda_1)\,.\,\xi\,,\;\ldots\,, \quad x^{(e_{11})} = B^{(r_1-e_{11})}(\lambda_1)\,.\,\xi\,; \\ x^{(e_{11}+1)} = C^{(r_1-e_{11}-1)}(\lambda_1)\,.\,\xi \;,\; x^{(e_{11}+2)} = C^{(r_1-e_{11}-2)}(\lambda_1)\,.\,\xi\,,\;\ldots\,,\; x^{(e_{11}+e_{21})} = C^{(r_1-e_{11}-e_{21})}(\lambda_1)\,.\,\xi\,; \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{array}\right\} \quad . \quad (13)$$

so lassen sich die Gleichungen (11) und (12) wie folgt schreiben:

$$\left.\begin{array}{ll} Ax^{(1)} & = \lambda_1\,.\,x^{(1)} + (r_1-1)\,.\,x^{(2)} \\ Ax^{(2)} & = \lambda_1\,.\,x^{(2)} + (r_1-2)\,.\,x^{(3)} \\ \ldots\ldots & \\ Ax^{(e_{11}-1)} & = \lambda_1\,.\,x^{(e_{11}-1)} + (r_1-e_{11}+1)\,.\,x^{(e_{11})} \\ Ax^{(e_{11})} & = \lambda_1\,.\,x^{(e_{11})} \\ Ax^{(e_{11}+1)} & = \lambda_1\,.\,x^{(e_{11}+1)} + (r_1-e_{11}-1)\,.\,x^{(e_{11}+2)} \\ \ldots\ldots & \\ Ax^{(e_{11}+e_{21})} & = \lambda_1\,.\,x^{(e_{11}+e_{21})} \end{array}\right\} \quad . \quad (14)$$

u. s. f.

Man zeigt leicht, dass die Vektoren

$$x^{(1)},\; x^{(2)},\;\ldots\,,\; x^{(e_{11})},\; x^{(e_{11}+1)},\;\ldots$$

linear unabhängig sind; sie spannen den zum ersten Lande gehörigen r_1-dimensionalen Eigenraum auf. Aus (14) entnimmt man dann die zu den Feldern des ersten Landes gehörigen Eigenräume von e_{11}, e_{21}, ..., $e_{h_1 1}$ Dimensionen.

Mathematics. — *Ueber eine algebraische Aufgabe bei der Reduktion von* ABEL*schen Integralen auftretend.* (Zweite Mitteilung). Von W. VAN DER WOUDE.

(Communicated at the meeting of January 28, 1933).

§ 1. Die oben genannte Aufgabe, über welche schon eine frühere Mitteilung[1]) handelte, ist die folgende.

Gegeben sind drei linear unabhängige quadratische Formen

$$\left.\begin{array}{l} \varphi = a_0\,x^2 + 2\,a_1\,x\,y + a_2\,y^2 \\ \psi = b_0\,x^2 + 2\,b_1\,x\,y + b_2\,y^2 \\ \chi = c_0\,x^2 + 2\,c_1\,x\,y + c_2\,y^2 \end{array}\right\} \quad \ldots\ldots \quad (1)$$

[1]) Proceedings 1931, p. 1264—1270.