Mathematics. — *Stieltjessche Integrale.* By J. RIDDER. (Communicated by Prof. W. VAN DER WOUDE.)

(Communicated at the meeting of October 29, 1949.)

Die Lektüre der in diesen Proceedings erschienenen Arbeit von DENISTON führte mich zu nachfolgenden Betrachtungen. Sie zeigen (siehe insbes. § 5) zu welchen Vereinfachungen der Gebrauch von *ε-Teilungen eines Intervalls in bezug auf eine zugehörige Funktion von beschränkter Variation* (Def. 3) in den Definitionen der Stieltjesschen Integrale, gegenüber dem Gebrauch der gewöhnlichen Teilungen, führen kann.

§ 1. **Definition 1.** $\alpha(x)$ sei von beschränkter Variation in $[a, b]$. Ein Punkt x von $[a, b]$ heisse *Doppelpunkt in bezug auf* $\alpha(x)$, wenn $\alpha(x)$ unstetig ist in x; wir denken uns zwei *uneigentliche* Punkte $\overline{x-0}$ und $\overline{x+0}$ mit x zusammengefallen, und definieren α in diesen Punkten wie folgt:

$$\alpha(\overline{x-0}) = \alpha(x-0) \quad \text{oder} \quad \lim_{x' \to x;\, x' < x} \alpha(x'), \text{ und}$$

$$\alpha(\overline{x+0}) = \alpha(x+0) \quad \text{oder} \quad \lim_{x' \to x;\, x' > x} \alpha(x'). \text{ [1]}$$

Wir schreiben $\xi_1 < \overline{x-0} < x < \overline{x+0} < \xi_2$, wenn $\xi_1 < x < \xi_2$ ist; die Axiome der linearen Anordnung behalten dadurch ihre Gültigkeit im neuen Punktbereich, gebildet von den Punkten der Zahlengeraden und den zu den Doppelpunkten (x) von $\alpha(x)$ gehörenden Punkten $(\overline{x-0})$, $(\overline{x+0})$.

Definition 2. $\alpha(x)$ sei in $[a, b]$ von beschränkter Variation; $f(x)$ sei daselbst endlich. In den zu den Doppelpunkten (x) in bezug auf $\alpha(x)$ gehörenden uneigentlichen Punkten $(\overline{x-0})$, $(\overline{x+0})$ definieren wir:

$$f(\overline{x-0}) = f(\overline{x+0}) = f(x).$$

Definition 3. Bei willkürlich positivem ε wird

$$\overline{a-0} \text{ oder } a = x_0 < x_1 < \ldots < x_j < \ldots < x_n = b \text{ oder } \overline{b+0}$$

eine ε-Teilung von $[a, b]$ *in bezug auf* $\alpha(x)$ sein, wenn: 1° die Teilungspunkte entweder eigentliche oder (zu einem Doppelpunkt von $\alpha(x)$ gehörende) Punkte $(\overline{x-0})$ oder $(\overline{x+0})$ sind, 2° zu jedem Doppelpunkt x von $\alpha(x)$ mit

$$V(\overline{x+0}) - V(\overline{x-0}) \geqq \varepsilon,$$

wobei $V(x)$ die Totalvariation von $\alpha(x)$ über $[a, x]$ für $a < x \leqq b$ darstellt, und $V(a) = 0$ ist, unter den Teilungspunkten drei aufeinander folgende,

---

[1]) Wenn a oder b Unstetigkeitspunkt von $\alpha(x)$ ist, sei $\alpha(\overline{a-0}) = \alpha(a)$ bzw. $\alpha(\overline{b+0}) = \alpha(b)$.

D.h.: *bei Benutzung von ε-Teilungen von $[a, b]$ in bezug auf $\alpha(x)$ führen linksseitige und rechtsseitige, gewöhnliche und Dushnik-Summen sowohl unter Anwendung des normalen wie eines Moore–Smith'schen Grenzwertes zu demselben Integralbegriff.* Der Integralwert fällt dabei mit dem des (sodann auch existierenden) Lebesgue–Stieltjesschen Integrals in bezug auf die zugehörige totaladditive Massfunktion $m_{\alpha(x)}(E)$ zusammen.

Dagegen zeigt die Arbeit von DENISTON, dass bei Benutzung der üblichen Zerlegungen von $[a, b]$ Integralbegriffe von ungleichem Umfange erhalten werden [10]).

[10]) Die notwendigen und hinreichenden Bedingungen in den Theoremen von DENISTON lassen sich unter Anwendung seiner Terminologie, auf folgende übersichtliche Weise zusammenfassen: 1^0 für Theorem 1: (α) in jedem Punkte x von $(a, b]$, in welchem $g(x)$ linksseitig unstetig ist, existiert der linksseitige Grenzwert $f(x-0)$, (β) die Unstetigkeitspunkte von $f(x)$, welche nicht gleichzeitig Unstetigkeitspunkte von $g(x)$ sind, bilden eine Nullmenge in bezug auf $g(x)$; 2^0 für Theorem 3: (α') in jedem Punkte x von $(a, b]$, in welchem $g(x)$ linksseitig unstetig ist, existiert der linksseitige Grenzwert $f(x-0)$, (α'') in jedem Punkte x von (a, b), in welchem $g(x)$ rechtsseitig unstetig ist, ist $f(x)$ linksseitig stetig, (β) wie oben; 3^0 für Theorem 4: (α') in jedem Punkte x von $(a, b]$, in welchem $g(x)$ linksseitig unstetig ist, ist $f(x)$ linksseitig stetig, (α'') in jedem Punkte x von $[a, b)$, in welchem $g(x)$ rechtsseitig unstetig ist, ist $f(x)$ rechtsseitig stetig, (β) wie oben; 4^0 für den Satz (von BLISS), loc. cit. „Remark on the ordinary Stieltjes integral": (α) in den Unstetigkeitspunkten von $g(x)$ ist $f(x)$ stetig, (β) wie oben; 5^0 für Theorem 5: (α') in jedem Punkte x von $(a, b]$ in welchem $g(x)$ linksseitig unstetig ist, existiert $f(x-0)$, (α'') in jedem Punkte x von $[a, b)$; in welchem $g(x)$ rechtsseitig unstetig ist, existiert $f(x+0)$, (β) wie oben; 6^0 für Theorem 6: (α) in den Unstetigkeitspunkten von $g(x)$ ist $f(x)$ stetig, ausgenommen vielleicht in Punkten, in welchen $g(x)$ eine hebbare Unstetigkeit hat; in einem derartigen Punkte soll dann auch $f(x)$ nur eine hebbare Unstetigkeit haben; (β) wie oben.

Die hier ausgeführte Umbildung der DENISTONschen Bedingungen folgt unschwer unter Anwendung eines der in Fussn. 9 zitierten Sätze.

x_k, x_{k+1}, und x_{k+2}, zu finden sind mit $x_k = \overline{x-0}$, $x_{k+1} = x$ und $x_{k+2} = \overline{x+0}$,
3° für jedes Paar aufeinander folgender Teilungspunkte (x_l, x_{l+1}), welches nicht zu den unter 2° fallenden Paaren $(\overline{x-0}, x)$, $(x, \overline{x+0})$ gehört,

$$V(x_{l+1}) - V(x_l) < \varepsilon$$

ist.

Definition 4. *Eine linksseitige [rechtsseitige] ε-Summe von $f(x)$ in $[a, b]$ in bezugauf $\alpha(x)$* hat die Gestalt

$$\sum_{j=1}^{n} f(x_{j-1}) \cdot \{\alpha(x_j) - \alpha(x_{j-1})\} \quad \ldots\ldots \quad (1)$$

[bzw.

$$\sum_{j=1}^{n} f(x_j) \cdot \{\alpha(x_j) - \alpha(x_{j-1})\}] ; \quad \ldots\ldots \quad (1^{\text{bis}})$$

dabei sollen die Teilungspunkte $x_0 < x_1 < \ldots < x_n$ eine ε-Teilung von $[a, b]$ in bezug auf $\alpha(x)$ bilden.

Definition 5. In $[a, b]$ sei $\alpha(x)$ von beschränkter Variation, $f(x)$ beschränkt. Dann hat $f(x)$ über $[a, b]$ *ein linksseitiges [rechtsseitiges] Moore–Smith'sches. Integral in bezug auf $\alpha(x)$*, wenn die in $[a, b]$ zu $f(x)$ gehörenden linksseitigen [bzw. rechtsseitigen] ε-Summen in bezug auf $\alpha(x)$ einen Moore–Smith'schen Grenzwert T [bzw. U] haben [2]; wir schreiben dann

$$T = (MS)\ {}^{(-)}\!\!\int_a^b f(x)\, d\alpha(x)$$

[bzw.

$$U = (MS)\ {}^{(+)}\!\!\int_a^b f(x)\, d\alpha(x)].$$

Satz 1. Zur Existenz des Integrales

$$(MS)\ {}^{(-)}\!\!\int_a^b f(x)\, d\alpha(x)$$

ist notwendig und hinreichend, dass die linksseitigen Unstetigkeitspunkte von $f(x)$, welche nicht gleichzeitig Unstetigkeitspunkte von $\alpha(x)$ sind, eine Menge bilden mit $V(x)$-Mass (L) Null; dabei ist $V(a) = 0$, $V(x) =$ Totalvariation von $\alpha(x)$ über $[a, x]$ für $a < x \leqq b$.

Der Beweis verläuft wie der des Theorems 1 in DENISTON, *Existence of Stieltjes Integrals* [3]).

---

[2]) D.h. zu willkürlich positivem η gibt es ein positives ε und dabei eine ε-Teilung von $[a, b]$ in bezug auf $\alpha(x)$ mit den Eigenschaften: 1⁰ die zugehörige Summe (1) und T [bzw. U] haben eine Differenz, welche absolut genommen $< \eta$ ist, 2⁰ dasselbe gilt für j e d e linksseitige [bzw. rechtsseitige] ε-Summe, welche aus der vorigen durch *Hinzufügung* neuer Teilungspunkte zu den (x_j) hervorgeht.

[3]) Cf. H. SCHÄRF, Portugaliae Mathematica 4, 90—92 (1943/45).

Satz 1bis. Zur Existenz von

$$(MS)\ {}^{(+)}\int_a^b f(x)\, d\alpha(x)$$

ist notwendig und hinreichend, dass die rechtsseitigen Unstetigkeitspunkte von $f(x)$, welche nicht gleichzeitig Unstetigkeitspunkte von $\alpha(x)$ sind, eine Menge bilden mit $V(x)$-Masse (L) Null ($V(x)$ definiert wie in Satz 1).

§ 2. **Definition 6.** $\alpha(x)$ sei in $[a, b]$ von beschränkter Variation, $f(x)$ sei daselbst beschränkt. Dann hat $f(x)$ über $[a, b]$ *ein linksseitiges* [*rechtsseitiges*] *normales Integral in bezug auf* $\alpha(x)$, wenn die in $[a, b]$ zu $f(x)$ gehörenden linksseitigen [bzw. rechtsseitigen] ε-Summen in bezug auf $\alpha(x)$ für $\varepsilon \to 0$ einen Grenzwert V [bzw. W] haben; wir schreiben dann

$$V = (N)\ {}^{(-)}\int_a^b f(x)\, d\alpha(x) \quad . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \quad (2)$$

[bzw.

$$W = (N)\ {}^{(+)}\int_a^b f(x)\, d\alpha(x)]. \quad . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \quad (2^{\text{bis}})$$

Satz 2 [Satz 2bis]. Zur Existenz von

$$(N)\ {}^{(-)}\int_a^b f(x)\, d\alpha(x)$$

[von

$$(N)\ {}^{(+)}\int_a^b f(x)\, d\alpha(x)]$$

ist notwendig und hinreichend, dass die linksseitigen [bzw. rechtsseitigen] Unstetigkeitspunkte von $f(x)$, welche nicht gleichzeitig Unstetigkeitspunkte von $\alpha(x)$ sind, eine Menge bilden mit $V(x)$-Mass (L) Null ($V(x)$ definiert wie in Satz 1).

Der Beweis verläuft wie der des Satzes 1 in SCHÄRF, Port. Math. **4** (1943/45), S. 86—92 [4]).

§ 3. **Definition 7.** *Eine* ε-*Summe von* $f(x)$ *in* $[a, b]$ *in bezug auf* $\alpha(x)$ hat die Gestalt

$$\sum_{j=1}^{n} f(\xi_{j-1}) \cdot \{\alpha(x_j) - \alpha(x_{j-1})\}, \quad . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \quad (3)$$

wobei die x_j eine ε-Teilung von $[a, b]$ in bezug auf $\alpha(x)$ bilden, und für jedes zugelassene j: $x_{j-1} \leqq \xi_{j-1} \leqq x_j$ ist.

---

4) Die Notwendigkeit der Bedingung ist auch eine unmittelbare Folge von Satz 1 [Satz 1 bis].

Definition 8. $\alpha(x)$ sei in $[a, b]$ von beschränkter Variation, $f(x)$ beschränkt. Dann hat $f(x)$ über $[a, b]$ *ein normales Integral in bezug auf* $\alpha(x)$, wenn die Summen (3), unabhängig von der Wahl der Punkte (ξ_{j-1}) in den zugehörigen Intervallen $[x_{j-1}, x_j]$, für $\varepsilon \to 0$ einen Grenzwert G haben; wir schreiben dann

$$G = (N) \int_a^b f(x)\, d\alpha\, (x).$$

Definition 9. Unter den gleichen Annahmen für $\alpha(x)$ und $f(x)$ wie in Definition 8 hat $f(x)$ über $[a, b]$ *ein Moore–Smith'sches Integral in bezug auf* $\alpha(x)$, wenn die Summen (3), unabhängig von der Wahl der Punkte (ξ_{j-1}) in den zugehörigen Intervallen $[x_{j-1}, x_j]$, einen Moore–Smith'schen Grenzwert H [5]) haben; wir schreiben dann

$$H = (MS) \int_a^b (x)\, d\alpha\, (x).$$

Satz 3. Zur Existenz von

$$(N) \int_a^b f(x)\, d\alpha\, (x)$$

ist notwendig und hinreichend, dass die Unstetigkeitspunkte von $f(x)$, welche nicht gleichzeitig Unstetigkeitspunkte von $\alpha(x)$ sind, eine Menge bilden mit $V(x)$-Mass (L) Null ($V(x)$ definiert wie in Satz 1).

Einen Beweis findet man in unserer Arbeit in Prace mat.-fiz. **41** (1933), S. 74, 75 (Beweis von Satz V) [6]).

Satz 3bis. Auch zur Existenz von

$$(MS) \int_a^b f(x)\, d\alpha\, (x)$$

ist die in Satz 3 gegebene Bedingung notwendig und hinreichend.

Dies folgt sofort aus Satz 3 und Prace mat.-fiz. **41** (1933), S. 69 (Satz 1).

§ 4. **Definition 10** und **Definition 11** des *normalen Dushnik-Integrals* bzw. des *Moore–Smith–Dushnik-Integrals* von $f(x)$ über $[a, b]$ *in bezug auf* $\alpha(x)$ sollen aus Def. 8 bzw. Def. 9 dadurch hervorgehen, dass man nur ε-Summen (3) zulässt mit $x_{j-1} < \xi_{j-1} < x_j$ für alle Paare (x_{j-1}, x_j), welche sich nicht schreiben lassen in einer der Formen $(x, \overline{x+0})$, $(\overline{x-0}, x)$ [7]).

---

[5]) Die Definition des Grenzwertes liegt auf der Hand; vgl. Fussn. 2.

[6]) Aus der loc. cit. gegenenen Lebesgue-Radonschen Form der Definition des normalen Integrals folgt, dass jedes derartige Integral von $f(x)$ in bezug auf $\alpha(x)$ über $[a, b]$ den gleichen Wert hat wie das dann auch existierende Lebesgue-Stieltjessche Integral von $f(x)$ über $[a, b]$ in bezug auf das aus $\alpha(x)$ in bekannter Weise hervorgehende Lebesguesche Mass $m_{\alpha(x)}(E)$.

[7]) Wir nennen sie *Dushnik-Summen.*

Sind die zugehörigen Grenzwerte V_1 bzw. W_1, so schreiben wir

$$V_1 = (ND) \int_a^b f(x)\, d\alpha(x)$$

bzw.

$$W_1 = (MSD) \int_a^b f(x)\, d\alpha(x).$$

Satz 4. Zur Existenz von

$$(MSD) \int_a^b f(x)\, d\alpha(x)$$

ist die in Satz 3 gegebene Bedingung notwendig und hinreichend.

Der Beweis verläuft wie der des Theorems 5 in der zitierten Arbeit von DENISTON [8]. Ein zweiter Beweis der Notwendigkeit der Bedingung folgt sofort aus einer Bemerkung in Fussn. 9 (S. 70, 71) unserer Arbeit in Prace mat.-fiz. **41** (1933), welche besagt, dass die loc. cit. betrachteten oberen und unteren Integrale den gleichen Wert beibehalten bei Benutzung offener statt abgeschlossener Teilintervalle in den Definitionen der oberen und unteren ε-Summen.

Satz 4bis. Auch zur Existenz von

$$(ND) \int_a^b f(x)\, d\alpha(x)$$

ist die in Satz 3 gegebene Bedingung notwendig und hinreichend.

Die Notwendigkeit folgt unmittelbar aus Satz 4; dass die Bedingung hinreicht, ist eine Folge von Satz 3.

§ 5. Da für jede in $[a, b]$ definierte Funktion $f(x)$ in jedem Punkte x von $[a, b] - E$, wobei E eine abzählbare Teilmenge von $[a, b]$,

$$\limsup_{\xi \to x;\, \xi < x} f(\xi) = \limsup_{\xi \to x;\, \xi > x} f(\xi)$$

und

$$\liminf_{\xi \to x;\, \xi < x} f(\xi) = \liminf_{\xi \to x;\, \xi > x} f(\xi)$$

ist [9], sind die in den Sätzen 1, 1bis, 2, 2bis enthaltenen notwendigen und hinreichenden Bedingungen aequivalent mit den in den Sätzen 3, 3bis, 4, 4bis enthaltenen.

Somit führen die Definitionen der links- und rechtsseitigen normalen oder Moore–Smith'schen Integrale, die der normalen und der Moore–Smith'schen Integrale und die der normalen Dushnik- und der MS-Dushnik-Integrale genau ebenso weit.

---

[8]) Dass die Bedingung hinreichend ist, folgt natürlich auch mit Satz 3 bis.

[9]) Siehe E. W. HOBSON, Theory of functions I (Third Ed. 1927), p. 304, oder O. HAUPT, Differential- und Integralrechnung I (1938), S. 150.