Mathematics. — *Besondere Monoide.* Von JAN DE VRIES.

(Communicated at the meeting of January 27, 1934.)

§ 1. Eine Fläche n^{en} Grades, mit $(n-1)$ fachem Punkte O (Monoid M^n) wird durch Zentralprojektion, aus dem Zentrum O, auf eine Ebene ε abgebildet. Ein Ebenenbüschel, dessen Achse e in ε liegt, bestimmt auf dem Monoid M^n ein System von ebenen Kurven k^n, welches in ein Büschel ebener Kurven c^n abgebildet wird. Zu dessen Basispunkten gehören die n Schnittpunkte von M^n mit e. Jeder der übrigen $n(n-1)$ Basispunkte bildet offenbar sämmtliche Punkte einer Geraden a ab, welche durch O geht und dem Monoid ganz angehört. Das Büschel (c^n) enthält eine zusammensetzte c^n, welche aus der Geraden e und einer Kurve c^{n-1} besteht; letztere ist das Bild des Punktes O und ersichtlich die Schnittkurve von ε mit der Kegelfläche, welche durch die Tangenten von O gebildet wird; sie enthält die Bilder A_k der $n(n-1)$ nach O zielenden Geraden a_k.

§ 2. Ein Monoid enthält im allgemeinen keine Geraden ausserhalb O. Bekanntlich muss das kubische Monoid ausgenommen werden; es enthält ausser den 6 Geraden a noch 15 weitere Geraden, welche je zwei Geraden a treffen und zu je drei eine dreifache Tangentialebene bilden; sie werden abgebildet auf die 15 Geraden $A_k A_l$. Ist O biplanarer Punkt des M^3, so sind A_1, A_2, A_3 Punkte einer Geraden und gilt dies auch für A_4, A_5, A_6. Jede der 6 Geraden a vertritt alsdann eine jener 15 Geraden; die übrigen 9 bilden 6 auf M^3 belegene Dreiseite.

§ 3. Soll ein Monoid M^4 eine Gerade enthalten, welche O nicht enthält, so müssen 3 Geraden a in einer Ebene liegen; es muss somit in ε eine Gerade geben, auf welcher 3 Punkte A liegen.

Wenn die 12 Punkte A zu je 3 mit vier Geraden l inzident sind, so enthält M^4 vier Geraden f welche ersichtlich ein *vollständiges Vierseit* bilden.

§ 4. Um zu einem M^4 zu gelangen, welches *zwei Vierseite* enthält, wähle ich in ε zwei Gruppen von je 4 Geraden, bez. l_k und m_k von deren 16 Schnittpunkten lm 4 einer Geraden g angehören. Die übrigen 12 liegen alsdann in einer kubischen Kurve α^3, welche aus einem beliebig gewählten Punkte O durch einen kubischen Kegel projiziert wird. Durch jene 12 Punkte A lege ich noch eine Kurve α^4, welche als Leitkurve eines Kegels 4^{en} Grades, mit Spitze O, benutzt wird. Werden diese Kegelflächen durch die Gleichungen $h_3 = 0$ und $h_4 = 0$ dargestellt, so entspricht der Gleichung $h_4 + \lambda h_3 = 0$ ein Monoid, welches ausser den 12 Geraden a offenbar 8 Geraden f enthält; diese bilden aber *zwei Vierseite.*

§ 5. Es soll nun gezeigt werden, wie man zu einem Monoid M^4 mit *drei Vierseiten* gelangen kann. In meiner Arbeit „Über gewisse der allgemeinen cubischen Curve eingeschriebene Configurationen" (Wiener Sitzungsberichte XCVIII, S. 453) habe ich bewiesen, dass man einer Kurve a^3 Konfigurationen 12_3 einbeschreiben kann, welche dem Schema

$A_1 B_1 C_2$	$A_1 B_2 C_1$	$A_2 B_1 C_1$
$A_2 B_2 C_3$	$A_2 B_3 C_2$	$A_3 B_2 C_2$
$A_3 B_3 C_4$	$A_3 B_4 C_3$	$A_4 B_3 C_3$
$A_4 B_4 C_1$	$A_4 B_1 C_4$	$A_1 B_4 C_4$

entsprechen, wo die 12 Geraden ABC ersichtlich drei Gruppen zu je 4 Geraden bilden und jede Gruppe sämmtliche 12 Punkte enthält. Ebenso wie in § 4 erhält man nun ein M^4, welches ausser den Geraden a noch zwölf Geraden f enthält; diese bilden nun, jenen 3 Gruppen entsprechend, *drei Vierseite.*

§ 6. In meiner oben erwähnten Arbeit finden sich (S. 463) Konfigurationen $(12_4, 16_3)$ mit dem Schema

$A_1\ A_4\ A_6$	$A_2\ A_5\ A_7$	$A_3\ A_6\ A_8$	$A_4\ A_7\ A_9$	$A_1\ A_5\ A_9$
$A_5\ A_8\ A_{10}$	$A_6\ A_9\ A_{11}$	$A_7\ A_{10}\ A_{12}$	$A_8\ A_{11}\ A_1$	$A_2\ A_6\ A_{10}$
$A_9\ A_{12}\ A_2$	$A_{10}\ A_1\ A_3$	$A_{11}\ A_2\ A_4$	$A_{12}\ A_3\ A_5$	$A_3\ A_7\ A_{11}$
$A_3\ A_7\ A_{11}$	$A_4\ A_8\ A_{12}$	$A_5\ A_9\ A_1$	$A_6\ A_{10}\ A_2$	$A_4\ A_8\ A_{12}$

aus welchem sich ergibt, dass die 16 Geraden der Kfg. 5 Gruppen zu je 4 Geraden bilden, indem wiederum jede Gruppe sämmtliche 12 Punkte enthält. Jede der 16 Geraden ist das Bild einer Gerade f.

Es gibt demnach Monoide M^4, welche *fünf Vierseite* enthalten. Der fünften Vierergruppe entspricht ein Vierseit, welches mit jedem der anderen Vierseite eine Gerade gemein hat.

§ 7. Die 12 Ähnlichkeitspunkte von 4 Kreisen bestimmen bekanntlich eine Kfg. $(12_4, 16_3)$, welcher eine kubische Kurve a^3 umbeschrieben werden kann [1]. Sie ist identisch mit der Kfg. von HESSE, und entspricht dem Schema

$A_1 B_1 C_1$	$A_2 B_3 C_4$	$A_3 B_4 C_2$	$A_4 B_2 C_3$
$A_2 B_4 C_3$	$A_1 B_2 C_2$	$A_4 B_1 C_4$	$A_3 B_3 C_1$
$A_3 B_2 C_4$	$A_4 B_4 C_1$	$A_1 B_3 C_3$	$A_2 B_1 C_2$
$A_4 B_3 C_2$	$A_3 B_1 C_3$	$A_2 B_2 C_1$	$A_1 B_4 C_4$

Hier erscheinen in jeder der vier Spalten vier „getrennte" Geraden, d.h. Geraden welche zusammen die 12 Punkte der Kfg. enthalten. Aber auch jede der vier Zeilen dieses Schemas zeigt eine Gruppe von vier getrennten Geraden. Den 8 Gruppen entsprechend gibt es demnach Monoide M^4 mit *acht Vierseiten.*

[1] Eigenschaften dieser Kfg. finden sich in meiner Arbeit „Über gewisse ebene Configurationen" (Acta Math. XII, S. 63—81).

Die Punkte A_k sind cotangential, d.h. ihre Tangenten treffen sich in einem Punkte A der Kurve α^3. Analog haben die Punkte B_k einen gemeinschaftlichen „Tangentialpunkt" B und die Punkte C_k einen analogen Punkt C; die Punkte A, B, C liegen ersichtlich in einer Geraden. Ersetzt man sie durch Wendepunkte, dann fallen A_1, B_1 und C_1 bez. mit A, B, C zusammen, indes A_2, A_3, A_4; B_2, B_3, B_4; C_2, C_3, C_4 drei lineare Tripel bilden. Man erhält alsdann ein Monoid M^4 mit 19 nicht nach O zielenden Geraden.

§ 8. Durch die Schnittpunkte einer Kurve α^n, der Ebene ε, mit einer Gerade g lege ich die n Geraden h_k. Diese bilden eine ausgeartete Kurve β^n; dem durch α^n und β^n bestimmten Kurvenbüschel gehört die Figur an, welche aus g und einer durch $n(n—1)$ Punkte A_k von α^n bestimmten Kurve α^{n-1} besteht. Bei beliebiger Annahme des Punktes O erhält man nun, der Lage der A_k entsprechend, ein Monoid M^n welches ein *vollständiges* $(n—1)$ *Seit* trägt.

Legt man durch jeden Schnittpunkt G_k von α^n und g zwei Geraden, h_k und l_k, so ergibt sich ein Kurvenbüschel dem α^n und die beiden aus den Geraden h bez. l gebildeten ausgearteten Kurven β^n und γ^n angehören; auch die Figur welche aus g und einer α^{n-1} besteht, gehört diesem Büschel an. Die Spurkurven α^n und α^{n-1} bestimmen nun mit irgend einem Punkte O ein Monoid M^n, welches *zwei* $(n—1)$Seite enthält.

§ 9. Wenn O auf einer Doppelgerade d eines M^n liegt, so gibt es $n(n—1)—4$ Geraden a. In der Spur D von d haben nämlich die Bildkurven c^n (§ 1) alle einen Doppelpunkt, wonach D an die Stelle von 4 Spurpunkten A tritt.

Ein Monoid M^4 mit *Doppelgerade* d enthält somit 8 Geraden a und ausserdem 8 weitere nicht nach O zielende Geraden f, die bez. in den 8 Ebenen ad liegen.

Enthält M^4 *zwei Doppelgeraden* d und d' und demnach 4 Geraden a, so liegen in den Ebenen da und $d'a$ je 4 Geraden f bez. f'. Jede Gerade f trifft ersichtlich 3 Geraden f'.

Ein Monoid M^4 mit 3 Doppelgeraden enthält keine weitere Geraden (Fläche von STEINER).

§ 10. Ein Monoid M^5 kann höchstens 4 Doppelgeraden haben. Wären deren 5, so müsste der Tangentenkegel von O ausarten in eine quadratische Kegelfläche und zwei Ebenen; jede dieser Ebenen hätte dann einen Schnitt 6en Gerades mit M^5.

Gibt es 4 Geraden d, so besteht die Spurkurve α^4 aus 2 Kegelschnitten, welche je 2 Punkte A tragen. Die 6 Ebenen durch je 2 Geraden d enthalten jede eine auf M^5 liegende Gerade f.

Ein M^5 kann eine dreifache Gerade t enthalten; da diese 9 Geraden a ersetzt, gibt es alsdann nur 11 Geraden a. Jede der 9 Ebenen at enthält eine auf M^5 liegende Gerade f.

Ausser t könnte M^5 eine Doppelgerade d haben. Die Spurkurve α^4 ist dann ausgeartet in eine nodale α^3, mit Doppelpunkt in der Spur T von t, und die Gerade TD. Es gibt alsdann 7 Geraden a und 7 Geraden f.

Mathematics. — *Die Invarianten bezüglich einer einzelnen linearen Transformation in n Veränderlichen.* Von R. WEITZENBÖCK.

(Communicated at the meeting of January 27, 1934.)

Ich beweise im Folgenden, dass die ganzen rationalen Invarianten von n unabhängigen Veränderlichen gegenüber einer einzelnen, nicht-singulären, linearen und homogenen Transformation einen endlichen Integritätsbereich bilden und dass ihre Ermittlung auf die Berechnung von Semi-Invarianten binärer Formen zurückgeführt werden kann.

§ 1. *Allgemeines.*

Gegeben sei in n homogenen Veränderlichen X_i eine lineare homogene Transformation

$$\overline{X}_i = a_i^k X_k \,, \qquad (1)$$

deren n Koeffizienten a_i^k Elemente eines beliebigen kommutativen Körpers seien. Wir denken uns die nicht-singuläre Matrix $a = \| a_i^k \|$ durch Einführung neuer Veränderlicher $x_i = s_i^k X_k$ auf die JORDAN'sche Normalform

$$A = S^{-1} \, a \, S = \left\| \begin{array}{cccccc:cccc:ccc} \alpha & 1 & & & & & & & & & & & \\ & \alpha & 1 & & & & & & & & & & \\ & & \alpha & & & & & & & & & & \\ & & & \ddots & & & & & & & & & \\ & & & & \ddots & 1 & & & & & & & \\ & & & & & \alpha & & & & & & & \\ \hdashline & & & & & & \beta & 1 & & & & & \\ & & & & & & & \beta & 1 & & & & \\ & & & & & & & & \ddots & & & & \\ & & & & & & & & & \beta & & & \\ \hdashline & & & & & & & & & & \gamma & 1 & \\ & & & & & & & & & & & & \ddots \end{array} \right\| \begin{array}{l} \left.\vphantom{\begin{array}{c}1\\1\\1\\1\\1\\1\end{array}}\right\} \mu+1 \\ \left.\vphantom{\begin{array}{c}1\\1\\1\\1\end{array}}\right\} \nu+1 \\ \\ \end{array}$$

transformiert und gebrauchen dann für $x_1, x_2, \ldots, x_{\mu+1}$ den Buchstaben x, für $x_{\mu+2}, x_{\mu+3}, \ldots, x_{\mu+\nu+2}$ den Buchstaben y, u.s.f. An Stelle von (1) haben wir dann

$$(A) \left\{ \begin{array}{ll} \overline{x}_1 &= \alpha x_1 + x_2 \\ \overline{x}_2 &= \qquad \alpha x_2 + x_3 \\ \cdot & \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ \overline{x}_{\mu+1} &= \qquad\qquad \alpha x_{\mu+1} \end{array} \right. \left\{ \begin{array}{ll} \overline{y}_1 &= \beta y_1 + y_2 \\ \overline{y}_2 &= \qquad \beta y_2 + y_3 \\ \cdot & \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ \overline{y}_{\nu+1} &= \qquad\qquad \beta y_{\nu+1} \end{array} \right\} \text{u.s.w.} \qquad (2)$$