A remarkable point is that for densities and temperatures at which the helium was partly solid partly liquid, the solidification curve was accurately followed with rising as well as with falling temperature, for so far as the solid-liquid helium II part of the curve was concerned. This was, however, not the case for the solid-liquid helium I part of the curve. At falling temperature we decidedly observed an undercooling of the liquid [1]), as already mentioned, whereas at rising temperature equilibrium very slowly was established and sometimes no definite point was reached.

Using isopycnal XI we could fix the point L' where the λ-curve meets the melting curve, *i.e.* the λ-point in the solidification curve. Its position is:

$$T = 1.753^\circ \text{ K}, \ p = 29.91 \text{ atm}.$$

Even at 1.18° K isopycnal IX, for which the density was highest, does not leave the solidification curve to enter the solid region. We conclude that at 1.18° K the density of solid helium exceeds 0.1817 gr/cm^3. As from the diagram of isopycnals we derive that the density of liquid helium II is 0.1725 gr/cm^3, we conclude that the difference in density between solid helium and liquid helium II at 1.18° K surpasses 0.0092 gr/cm^3. From this follows that the melting heat at that temperature surpasses 0.016 cal/gr. How much these values are surpassed, cannot be derived from these measurements.

[1]) Undercooling or the reverse when passing the λ-curve was never observed.

CORRIGENDUM.

Proc. Academy Amsterdam Vol. **36** p. 486 Fig. 2: in stead of Kg/cm^2 read atm.

Physics. — *Spaltung der natuerlichsten Feldgleichungen fuer Semi-Vektoren in Spinor-Gleichungen vom* DIRAC*'schen Typus.* Von A. EINSTEIN und W. MAYER.

(Communicated at the meeting of June 24, 1933).

In einer frueheren Mitteilung [1]) haben wir gezeigt, dass die allgemeinsten Semivektor-Gleichungen einfachster Art sich in eine kanonische Form bringen lassen, in welcher nur drei willkuerliche Konstante auftreten.

Es zeigte sich ferner, dass die DE BROGLIE-Welle eines solchen Systems sich in zwei Wellentypen von Spinor-Charakter aufspalten laesst, welche sich zwanglos als dem Elektron bezw. Proton zugehoerig deuten lassen.

[1]) Akademie der Wissenschaften, Amsterdam 1933.

Es hat sich nun weiter gezeigt, dass diese Spaltung nicht auf die DE BROGLIE-Wellen beschraenkt ist, sondern dass sie einer ganz allgemeinen Eigenschaft des Gleichungs-Systems entspricht. Dieses letztere zerfaellt naemlich in die zwei Spinor Systeme (16), (17), in welchen die elektrischen Glieder entsprechend (13), (13′) zugefuegt zu denken sind. Die einzige Verbindung zwischen den Systemen (16) und (17) liegt in der Gemeinsamkeit des elektrischen Potentialvektors φ_r; die Spinorfelder der Elektronen und die der Protonen sind demnach abgesehen von ihrer elektrodynamischen Wechselwirkung voellig unabhaengig voneinander. Entsprechendes gilt gemaess (15) fuer die Stromdichte. Dagegen lassen sich — wenn man an einer Feldtheorie festhalten will — die DE BROGLIE-Felder der einzelnen Partikeln gleicher Art nicht in analoger Weise voneinander trennen.

Die DIRACgleichungen in ihrer kanonischen Gestalt

$$\left.\begin{aligned} E^r{}_{\sigma\tau}\,(\psi^\tau{}_{,r} - i\,\varepsilon\,\psi^\tau\,\varphi_r) &= \overline{C}_{\tau\rho}\,\chi^\rho \\ E^r{}_{\sigma\tau}\,(\chi^\tau{}_{,r} - i\,\varepsilon\,\chi^\tau\,\varphi_r) &= C_{\rho\sigma}\,\psi^\rho \end{aligned}\right\}, \quad \ldots \ldots \quad (1)$$

wo

$$E = E\,(1, 0, 0, 0), \quad C_{\rho\sigma} = i\,a\,g_{\rho\sigma} + b\,v_{\rho\sigma}. \quad \ldots \ldots \quad (1')$$

ist, mit

$$v_{\rho\sigma} \equiv \begin{Vmatrix} 0 & 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 & 0 \end{Vmatrix} \quad \ldots \ldots \quad (2)$$

lassen sich in einfachster Weise in zwei Systeme von Spinorcharakter spalten.

Durch den obigen numerisch invarianten Semitensor $v_{\bar\rho\bar\sigma}$ erster Art kann man einem jeden Semivektor erster Art $\eta^{\bar\nu}$ den Sternvektor $\eta^{\star\bar\nu}$ vermittels

$$\eta^\star{}_{\bar\mu} = v_{\bar\mu\bar\nu}\,\eta^{\bar\nu} \quad \ldots \ldots \quad (3)$$

zuordnen. Man beweist aus $v_{\tau\sigma}\,v^\sigma{}_\rho = -\,g_{\tau\rho}$ leicht, dass

$$(\eta^\star{}_{\bar\mu})^\star = -\,\eta^\star{}_{\bar\mu}. \quad \ldots \ldots \quad (3')$$

ist. Es gibt nun Semi-Vektoren, deren zugeordnete Sternvektoren ihnen bis auf einen Faktor gleich sind. Dieser Faktor kann nach (3′) nur $\pm i$ sein. Es gibt dementsprechend auch zwei Arten solcher Vektoren: der α-Spinor ($\underset{\alpha}{\varrho}_{\bar\mu}$ bezeichnet) definiert durch $\underset{\alpha}{\varrho}_{\bar\mu}{}^\star = i\,\underset{\alpha}{\varrho}_{\bar\mu}$, resp.

$$\underset{\alpha}{\varrho}_{\bar\mu} = -\,i\,v_{\bar\mu\bar\nu}\,\underset{\alpha}{\varrho}_{\bar\nu} \quad \ldots \ldots \quad (4)$$

und der β-Spinor, definiert durch $\underset{\beta}{\tau_{\bar\mu}}{}^{*} = -i\,\underset{\beta}{\tau_{\bar\mu}}$, resp.

$$\underset{\beta}{\tau_{\bar\mu}} = i\, v_{\bar\mu\bar\nu}\, \underset{\beta}{\tau_{\bar\nu}} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (4')$$

Ausfuehrlich lauten die Relationen

$$\underset{\alpha}{\varrho_{\bar 1}} = \underset{\alpha}{\varrho_{\bar 4}}\,,\ \underset{\alpha}{\varrho_{\bar 3}} = i\,\underset{\alpha}{\varrho_{\bar 2}}\,;\ \underset{\beta}{\tau_{\bar 1}} = -\underset{\beta}{\tau_{\bar 4}}\,,\ \underset{\beta}{\tau_{\bar 3}} = -i\,\underset{\beta}{\tau_{\bar 2}} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (5)$$

Ganz analog definiert man die α resp. β-Spinoren zweiter Art $\underset{\alpha}{\bar\varrho_{\bar{\bar\mu}}}$, $\underset{\beta}{\bar\tau_{\bar{\bar\mu}}}$ durch die (4), (4′), resp. (5) konjungiert komplexen Relationen:

$$\underset{\alpha}{\bar\varrho_{\bar{\bar 1}}} = \underset{\alpha}{\bar\varrho_{\bar{\bar 4}}}\,,\ \underset{\alpha}{\bar\varrho_{\bar{\bar 3}}} = -i\,\underset{\alpha}{\bar\varrho_{\bar{\bar 2}}}\,;\ \underset{\beta}{\bar\tau_{\bar{\bar 1}}} = -\underset{\beta}{\bar\tau_{\bar{\bar 4}}}\,,\ \underset{\beta}{\bar\tau_{\bar{\bar 3}}} = i\,\underset{\beta}{\bar\tau_{\bar{\bar 2}}}. \quad . \quad . \quad . \quad (5')$$

Der konjugiert komplexe Semi-Vektor eines α resp. β-Spinors erster Art ist somit ein solcher zweiter Art und umgekehrt. Man beweist (durch Sternbildung)

a. dass die Summe eines α und eines β Spinors nur Null ist, wenn der α und der β Spinor verschwindet. Ebenso zeigt man aus (5), (5′), dass

b. das innere Produkt zweier α (resp. β) Spinoren verschwindet.

Weiter gilt dann die (nach dem gesagten eindeutige) Zerlegung des beliebigen Semi-Vektors $\eta_{\bar\sigma}$:

$$2\,\eta_{\bar\sigma} = (\eta_{\bar\sigma} - i\,\overset{*}{\eta}_{\bar\sigma}) + (\eta_{\bar\sigma} + i\,\overset{*}{\eta}_{\bar\sigma}) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (6)$$

in den α Spinor $\eta_{\bar\sigma} - i\,\eta_{\bar\sigma}{}^{*}$ und den β Spinor $\eta_{\bar\sigma} + i\,\eta_{\bar\sigma}$ (Der Spinorcharakter wird durch Sternbildung bewiesen).

Ebenso wie der Semi-Vektor ($\eta_{\bar\sigma}$ in (6) hat jeder Semi-Tensor (in Bezug auf jeden seiner Semi-Indizes) eine α, β-Spaltung. So gilt auch in verstaendlicher Bezeichnung

$$E^{r}{}_{\bar\sigma\bar{\bar\tau}} = (\underset{\alpha\alpha}{E^{r}{}_{\bar\sigma\bar{\bar\tau}}} + \underset{\beta\beta}{E^{r}{}_{\bar\sigma\bar{\bar\tau}}}) + (\underset{\alpha\beta}{E^{r}{}_{\bar\sigma\bar{\bar\tau}}} + \underset{\beta\alpha}{E^{r}{}_{\bar\sigma\bar{\bar\tau}}}) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (7)$$

Wir zeigen jetzt, dass in der Zerlegung (7) fuer $E = E\,(1, 0, 0, 0)$ der zweite geklammerte Term rechts verschwindet. In der Tat folgt aus der Form des $E\,(1, 0, 0, 0)$ und den definierenden α, β-Relationen (5), (5′), dass fuer beliebige $\underset{\beta}{\varrho^{\bar\sigma}}$, $\underset{\alpha}{\pi^{\bar{\bar\tau}}}$ resp. $\underset{\alpha}{\varrho^{\bar\sigma}}$, $\underset{\beta}{\pi^{\bar{\bar\tau}}}$

$$E^{r}{}_{\bar\sigma\bar{\bar\tau}}\,\underset{\beta}{\varrho^{\bar\sigma}}\,\underset{\alpha}{\pi^{\bar{\bar\tau}}} = 0\,, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (8) \qquad E^{r}{}_{\bar\sigma\bar{\bar\tau}}\,\underset{\alpha}{\varrho^{\bar\sigma}}\,\underset{\beta}{\pi^{\bar{\bar\tau}}} = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (8')$$

ist. (Man beweist (8) sofort fuer $r = 1$, damit aber gilt (8) fuer $r = 1, \ldots 4$).

Multipliziert man (7) mit $\underset{\beta}{\varrho^{\bar\sigma}}\,\underset{\alpha}{\pi^{\bar{\bar\tau}}}$, so erhaelt man demnach (wegen (*b*))

$$\underset{\alpha\beta}{E^{r}{}_{\bar\sigma\bar{\bar\tau}}}\,\underset{\beta}{\varrho^{\bar\sigma}}\,\underset{\alpha}{\pi^{\bar{\bar\tau}}} = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (9)$$

Damit aber verschwindet $\underset{\alpha\beta}{E^{r}{}_{\bar\sigma\bar{\bar\tau}}}\,\varrho^{\bar\sigma}\,\pi^{\bar{\bar\tau}}$ fuer beliebige Semi-Vektoren

$\varrho^{\bar\sigma} = \underset{\alpha}{\varrho^{\bar\sigma}} + \underset{\beta}{\varrho^{\bar\sigma}}$, $\pi^{\bar{\bar\tau}} = \underset{\alpha}{\pi^{\bar{\bar\tau}}} + \underset{\beta}{\pi^{\bar{\bar\tau}}}$; also ist $\underset{\alpha\,\beta}{E^r{}_{\bar\sigma\bar{\bar\tau}}} = 0$. Genau so zeigt man, dass auch $\underset{\beta\,\alpha}{E^r{}_{\bar\sigma\bar{\bar\tau}}} = 0$ ist. Statt (7) gilt somit

$$E^r{}_{\sigma\tau} = \underset{\alpha\alpha}{E^r{}_{\sigma\tau}} + \underset{\beta\beta}{E^r{}_{\sigma\tau}} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (7')$$

Es ist also $E^r{}_{\sigma\tau}\,\underset{\alpha}{\psi^\sigma}$ in Bezug auf τ ein β-Tensor ($\underset{\alpha\alpha}{E^r{}_{\sigma\tau}}\,\underset{\alpha}{\psi^\sigma} = 0$ nach (b)) u.s.w. Beachten wir, dass $C_{\rho\sigma}$, $\bar C_{\rho\sigma}$ wieder den α resp. β Charakter einer Semigroesse nicht aendert, so zerfaellt, sobald wir setzen

$$\psi^\sigma = \underset{\alpha}{\psi^\sigma} + \underset{\beta}{\psi^\sigma}, \qquad \chi^\tau = \underset{\alpha}{\chi^\tau} + \underset{\beta}{\chi^\tau} \quad \ldots\ldots \quad (10)$$

das System (1) in die beiden Systeme

$$\left.\begin{aligned} E^r{}_{\sigma\tau}\,(\underset{\alpha}{\psi^\sigma}{}_{,r} - i\,\varepsilon\,\underset{\alpha}{\psi^\sigma}\,\varphi_r) &= \bar C_{\tau\rho}\,\underset{\beta}{\chi^\rho} \\ E^r{}_{\sigma\tau}\,(\underset{\beta}{\chi^\tau}{}_{,r} - i\,\varepsilon\,\underset{\beta}{\chi^\tau}\,\varphi_r) &= C_{\rho\sigma}\,\underset{\alpha}{\psi^\rho}, \end{aligned}\right\}(11) \qquad \left.\begin{aligned} E^r{}_{\sigma\tau}\,(\underset{\beta}{\psi^\sigma}{}_{,r} - i\,\varepsilon\,\underset{\beta}{\psi^\sigma}\,\varphi_r) &= \bar C_{\tau\rho}\,\underset{\alpha}{\chi^\rho} \\ E^r{}_{\sigma\tau}\,(\underset{\alpha}{\chi^\tau}{}_{,r} - i\,\varepsilon\,\underset{\alpha}{\chi^\tau}\,\varphi_r) &= C_{\rho\sigma}\,\underset{\beta}{\psi^\rho} \end{aligned}\right\}(11')$$

Infolge (1′) und der definierenden Relationen (4) gilt

$$C_{\rho\sigma}\,\underset{\alpha}{\psi^\rho} = i\,(a-b)\,\underset{\alpha}{\psi_\sigma}, \qquad C_{\rho\sigma}\,\underset{\beta}{\psi^\rho} = i\,(a+b)\,\underset{\beta}{\psi_\sigma} \quad \ldots \quad (12)$$

und ebenso

$$\bar C_{\tau\rho}\,\underset{\alpha}{\chi^\rho} = -\,i\,(a+b)\,\underset{\alpha}{\chi_\tau}, \qquad \bar C_{\tau\rho}\,\underset{\beta}{\chi^\rho} = -\,i\,(a-b)\,\underset{\beta}{\chi_\tau} \quad \ldots \quad (12')$$

Wir erhalten damit die endgueltige Gestalt des DIRAC-Systems

$$\left.\begin{aligned} E^r{}_{\sigma\tau}\,(\underset{\alpha}{\psi^\sigma}{}_{,r} - i\,\varepsilon\,\underset{\alpha}{\psi^\sigma}\,\varphi_r) &= -\,i\,(a-b)\,\underset{\beta}{\chi_\tau} \\ E^r{}_{\sigma\tau}\,(\underset{\beta}{\chi^\tau}{}_{,r} - i\,\varepsilon\,\underset{\beta}{\chi^\tau}\,\varphi_r) &= i\,(a-b)\,\underset{\beta}{\psi_\sigma}, \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots \quad (13)$$

$$\left.\begin{aligned} E^r{}_{\sigma\tau}\,(\underset{\beta}{\psi^\sigma}{}_{,r} - i\,\varepsilon\,\underset{\beta}{\psi^\sigma}\,\varphi_r) &= -\,i\,(a+b)\,\underset{\alpha}{\chi_\tau} \\ E^r{}_{\sigma\tau}\,(\underset{\alpha}{\chi^\tau}{}_{,r} - i\,\varepsilon\,\underset{\alpha}{\chi^\tau}\,\varphi_r) &= i\,(a+b)\,\underset{\beta}{\psi_\sigma}. \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots \quad (13')$$

Bildet man das konjugiert komplexe Gleichungs-System zu (13′), so wird es mit (13) identisch, wenn man $\underset{\alpha}{\bar\chi^\sigma}$ durch $\underset{\alpha}{\psi^\sigma}$, $\underset{\beta}{\bar\psi^\sigma}$ durch $\underset{\beta}{\chi^\sigma}$, $a+b$ durch $a-b$ und ε durch $-\varepsilon$ ersetzt.

Beide Systeme unterscheiden sich also, wie zu erwarten ist, tatsaechlich nur durch den Massenwert und das Vorzeichen von ε. Auch der Strom-Vektor

$$I^r = E^r{}_{\sigma\tau}\, \psi^\sigma\, \overline{\psi}^\tau - E^r{}_{\sigma\tau}\, \overline{\chi}^\sigma\, \chi^\tau . \qquad (14)$$

erhaelt wegen (8) eine voellig analoge α, β-Spaltung

$$\varepsilon\, I^r = \varepsilon\, (E^r{}_{\sigma\tau}\, \underset{\alpha}{\psi}^\sigma\, \underset{\alpha}{\overline{\psi}}^\tau - E^r{}_{\sigma\tau}\, \underset{\beta}{\overline{\chi}}^\sigma\, \underset{\beta}{\chi}^\tau) + (-\varepsilon)\, (E^r{}_{\sigma\tau}\, \underset{\alpha}{\overline{\chi}}\, \underset{\alpha}{\chi}^\tau - E^r{}_{\sigma\tau}\, \underset{\beta}{\psi}^\sigma\, \underset{\beta}{\overline{\psi}}^\tau), \qquad (15)$$

wobei wegen (13) die Divergenz jedes der beiden Teilstroeme fuer sich verschwindet. Schreibt man bei Unterdrueckung des elektromagnetischen Potentials die Gleichungen (13) ausfuehrlich an, wobei noch jeweils die dritten und vierten Komponenten (nach (5), (5′)) durch die zweiten und ersten ausgedrueckt sind, so erhaelt man das DIRAC-System:

$$\left.\begin{aligned}
(\psi^1{}_{,1} - \psi^1{}_{,4}) + (\psi^2{}_{,2} + i\,\psi^2{}_{,3}) &= -\,i\,(a-b)\,\chi^1 \\
(\psi^1{}_{,2} - i\,\psi^1{}_{,3}) - (\psi^2{}_{,1} + \psi^2{}_{,4}) &= -\,i\,(a-b)\,\chi^2 \\
(\chi^1{}_{,1} + \chi^1{}_{,4}) + (\chi^2{}_{,2} + i\,\chi^2{}_{,3}) &= i\,(a-b)\,\psi^1 \\
(\chi^1{}_{,2} - i\,\chi^1{}_{,3}) - (\chi^2{}_{,1} - \chi^2{}_{,4}) &= i\,(a-b)\,\psi^2
\end{aligned}\right\}\ \text{für } \psi = \underset{\alpha}{\psi},\ \chi = \underset{\beta}{\chi} . \qquad (16)$$

entsprechend gibt (13′)

$$\left.\begin{aligned}
(\psi^1{}_{,1} + \psi^1{}_{,4}) + (\psi^2{}_{,2} - i\,\psi^2{}_{,3}) &= -\,i\,(a+b)\,\chi^1 \\
(\psi^1{}_{,2} + \psi^1{}_{,3}) - (\psi^2{}_{,1} - \psi^2{}_{,4}) &= -\,i\,(a+b)\,\chi^2 \\
(\chi^1{}_{,1} - \chi^1{}_{,4}) + (\chi^2{}_{,2} - i\,\chi^2{}_{,3}) &= i\,(a+b)\,\psi^1 \\
(\chi^1{}_{,2} + \chi^1{}_{,3}) - (\chi^2{}_{,1} + \chi^2{}_{,4}) &= i\,(a+b)\,\psi^2
\end{aligned}\right\}\ \text{für } \psi = \underset{\beta}{\psi},\ \chi = \underset{\alpha}{\chi} . \qquad (17)$$

Diese Zerlegung besagt aber nicht, dass sich nun die Semi-Vektoren-Theorie als unnoetig erwiesen haette, da sie in ihrer endgueltigen (einfachsten) Formulierung reine Spinoren-Systeme aufweist. Denn abgesehen von der (in einer frueheren Arbeit gezeigten) Einbau-Moeglichkeit in das Gebaeude der allgemeinen Relativitaet, die eine reine Spinorentheorie so zwanglos nicht kennt, ist vom Standpunkt der Spinorentheorie nicht verständlich, warum es in der Natur gerade *zwei* verschiedene elementare Trägheitsmassen mit abgesehen vom Vorzeichen gleich grosser elektrischer Ladung gibt.
