Mathematics. — *Die Differentialinvarianten eines Systems von n relativen kovarianten Vektoren in R_n.* Von G. F. C. GRISS. (Communicated bij Prof. R WEITZENBÖCK).

(Communicated at the meeting of January 27, 1934.)

Es sei die Gruppe der eineindeutigen (genügend oft) stetig differentierbaren Transformationen

$$x_i = f_i = (\bar{x}_1, \ldots . \bar{x}_n) \qquad (i = 1, \ldots, n)$$

gegeben mit der Transformationsdeterminante

$$\triangle = | e^i_k |, \quad \text{mit} \quad e^i_k = \frac{\partial x_i}{\partial \bar{x}_k}.$$

Für einen Tensor gelten bekanntlich die Transformationsformeln

$$\bar{a}^{\pi\rho \ldots}_{\alpha\beta \ldots} = a^{\varphi\chi \ldots}_{\mu\nu \ldots} \, e^{\mu}_{\alpha} \, e^{\nu}_{\beta} \ldots \bar{e}^{\pi}_{\varphi} \, \bar{e}^{\rho}_{\chi} \ldots$$

und für eine Tensordichte

$$\bar{a}^{\pi\rho \ldots}_{\alpha\beta \ldots} = a^{\varphi\chi \ldots}_{\mu\nu \ldots} \triangle \, e^{\mu}_{\alpha} \, e^{\nu}_{\beta} \ldots \bar{e}^{\pi}_{\varphi} \, \bar{e}^{\rho}_{\chi} \ldots .$$

Es liegt nahe die Tensordichte einen relativen Tensor vom Gewicht eins zu nennen und im allgemeinen *relative* [1]) *Tensoren* vom Gewicht r zu definieren vermöge folgender Transformationsgleichungen

$$\bar{a}^{\pi\rho \ldots}_{\alpha\beta \ldots} = a^{\varphi\chi \ldots}_{\mu\nu \ldots} \triangle^r \, e^{\mu}_{\alpha} \, e^{\nu}_{\beta} \ldots \bar{e}^{\pi}_{\rho} \, \bar{e}^{\rho}_{\chi} \ldots .$$

Wir betrachten jetzt ein System von n linear-unabhängigen relativen kovarianten Vektoren

$$ {}_h\bar{a}_{\alpha} = {}_h a_{\mu} \, e^{\mu}_{\alpha} \, \triangle^{r_h}. \qquad (h = 1, \ldots, n) \quad \ldots \ldots \quad (1)$$

Die vorderen Indizes werden immer die Anzahl der Vektoren und Tensoren angeben.

Das Gewicht der Invariante

$$a = | {}_h a_{\alpha} | \neq 0 \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (2)$$

ist $1 + \Sigma\, r_h$. Für $1 + \Sigma\, r_h \neq 0$ ersetze man (durch Multiplikation mit

[1]) Vgl. z.B. THOMAS and MICHAL, Annals of Mathematics, vol. 28 (1927), pag. 643 oder auch E. BORTOLOTTI, Rend. di Palermo 56 (1932), pag. 11.

einer geeigneten Potenz von a) die relativen Vektoren durch n absolute, deren Differentialinvarianten man in bekannter Weise bestimmen kann[2]).

Wir brauchen also nur den Fall

$$\Sigma\, r_h = -1 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (3)$$

zu untersuchen, in welchem a eine absolute Invariante ist, und setzen ausdrücklich $r_h \neq 0$ voraus.

Zur Bestimmung der Differentialinvarianten erster Ordnung differentiere man (1):

$$\frac{\partial\, {}_h\bar{a}_\alpha}{\partial \bar{x}_\beta} = \frac{\partial\, {}_h a_\mu}{\partial x_\nu}\, e^\mu_\alpha\, e^\nu_\beta\, \Delta^{r_h} + {}_h a_\mu\, e^\mu_{\alpha\beta}\, \Delta^{r_h} + r_h\, {}_h a_\mu\, e^\mu_\alpha\, \Delta^{r_h - 1}\, \frac{\partial \Delta}{\partial \bar{x}_\beta}. \quad . \quad (4)$$

(Zur Abkürzung setzen wir $e^\mu_{\alpha\beta} = \dfrac{\partial^2 x_\mu}{\partial \bar{x}_\alpha\, \partial \bar{x}_\beta}$, u.s.w.)

Vertauschung von α und β und Substraktion ergibt

$${}_h\bar{p}_{\alpha\beta} = {}_h p_{\mu\nu}\, e^\mu_\alpha\, e^\nu_\beta\, \Delta^{r_h} + \frac{r_h}{\Delta}\left({}_h\bar{a}_\alpha \frac{\partial \Delta}{\partial \bar{x}_\beta} - {}_h\bar{a}_\beta \frac{\partial \Delta}{\partial \bar{x}_\alpha}\right), \quad . \quad . \quad (5)$$

wo ${}_h p_{\alpha\beta}$ die Rotationen

$${}_h p_{\alpha\beta} = \frac{\partial\, {}_h a_\alpha}{\partial x_\beta} - \frac{\partial\, {}_h a_\beta}{\partial x_\alpha} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (6)$$

sind, welche hier natürlich der Tensoreigenschaft entbehren.

Nach Dividierung durch r_h multiplizieren wir (5) mit ${}_h\bar{a}^\lambda$ (dem durch $\bar{a}$ dividierten Minor von ${}_h\bar{a}_\lambda$) und summieren über h (auch hier unterdrücken wir das Summenzeichen):

$$\frac{{}_h\bar{p}_{\alpha\beta}\, {}_h\bar{a}^\lambda}{r_h} = \frac{{}_h p_{\mu\nu}\, {}_h\bar{a}^\lambda}{r_h}\, e^\mu_\alpha\, e^\nu_\beta\, \Delta^{r_h} + \frac{1}{\Delta}\left(\delta^\lambda_\alpha \frac{\partial \Delta}{\partial \bar{x}_\beta} - \delta^\lambda_\beta \frac{\partial \Delta}{\partial \bar{x}_\alpha}\right). \quad . \quad (7)$$

Verjüngung nach λ und β ergibt

$$\frac{{}_h\bar{p}_{\alpha\beta}\, {}_h\bar{a}^\beta}{r_h} = \frac{{}_h p_{\mu\nu}\, {}_h\bar{a}^\beta}{r_h}\, e^\mu_\alpha\, e^\nu_\beta\, \Delta^{r_h} + \frac{1}{\Delta}\left(\frac{\partial \Delta}{\partial \bar{x}_\alpha} - n\, \frac{\partial \Delta}{\partial \bar{x}_\alpha}\right). \quad . \quad . \quad (8)$$

oder

$$\frac{{}_h\bar{p}_{\alpha\beta}\, {}_h\bar{a}^\beta}{r_h} = \frac{{}_h p_{\mu\nu}\, {}_h a^\nu}{r_h}\, e^\mu_\alpha + \frac{1-n}{\Delta}\, \frac{\partial \Delta}{\partial \bar{x}_\alpha} \quad \ldots\ldots \quad (9)$$

---

[2]) Vgl. z.B. G. F. C. GRISS, Differentialinvarianten von Systemen von Vektoren, Kap. I (Groningen, 1925).

Wir lösen

$$\frac{1}{\triangle}\frac{\partial\triangle}{\partial\bar{x}_\alpha}=-\bar{s}_\alpha+s_\mu\, e^\mu_\alpha \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (10)$$

mit

$$s_\mu=\frac{{}_hp_{\mu\nu}\;{}_ha^\nu}{r_h\,(n-1)} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (11)$$

Die Werte für $\frac{1}{\triangle}\frac{\partial\triangle}{\partial\bar{x}_\alpha}$ substituieren wir in (4):

$$\frac{\partial\,{}_h\bar{a}_\alpha}{\partial\bar{x}_\beta}+r_h\,{}_h\bar{a}_\alpha\,\bar{s}_\beta=\left(\frac{\partial\,{}_ha_\mu}{\partial x_\nu}+r_h\,{}_ha_\mu\,s_\nu\right)e^\mu_\alpha\,e^\nu_\beta\,\triangle^{r_h}+{}_ha_\mu\,e^\mu_{\alpha\beta}\,\triangle^{r_h}\,. \quad (12)$$

Multiplikation mit ${}_ha^\lambda$ und Addition ergibt

$$\left(\frac{\partial\,{}_h\bar{a}_\alpha}{\partial\bar{x}_\beta}+r_h\,{}_h\bar{a}_\alpha\,\bar{s}_\beta\right){}_h\bar{a}^\lambda=\left(\frac{\partial\,{}_ha_\mu}{\partial x_\nu}+r_h\,{}_ha_\mu\,s_\nu\right){}_ha^\lambda\,e^\mu_\alpha\,e^\nu_\beta\,\triangle^{r_h}+e^\lambda_{\alpha\beta}\,\triangle^{r_h}\,, \quad (13)$$

also

$$e^\lambda_{\alpha\beta}=\bar{\Gamma}^\gamma_{\alpha\beta}\,e^\lambda_\gamma-\Gamma^\lambda_{\mu\nu}\,e^\mu_\alpha\,e^\nu_\beta \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (14)$$

mit

$$\Gamma^\lambda_{\mu\nu}=\frac{\partial\,{}_ha_\mu}{\partial x_\nu}\,{}_ha^\lambda+r_h\,{}_ha_\mu\,{}_ha^\lambda\,s_\nu \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (15)$$

Hieraus folgt unmittelbar der

Reduktionssatz[3]): Die Differentialinvarianten erster Ordnung der relativen Vektoren ${}_ha_\alpha$ sind algebraische Invarianten von ${}_ha_\alpha$,

$$S^\lambda_{\mu\nu}=\Gamma^\lambda_{\mu\nu}-\Gamma^\lambda_{\nu\mu} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (16)$$

und der mit (15) gebildeten kovarianten Ableitungen von ${}_ha_\alpha$.

Dieser Reduktionssatz lässt sich natürlich noch sehr vereinfachen.

Die kovarianten Ableitungen (vom Gewicht r_h) des relativen Vektors ${}_ha_\alpha$ sind, wie man leicht bestätigt,

$${}_ha_{\mu\,(\nu)}=\frac{\partial\,{}_ha_\mu}{\partial x_\nu}-{}_ha_\lambda\,\Gamma^\lambda_{\mu\nu}-r_h\,{}_ha_\mu\,\Gamma^\lambda_{\lambda\nu} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (17)$$

---

[3]) R. WEITZENBÖCK, Invariantentheorie, XIII. Abschnitt, § 21 (Groningen, 1923).

Also vermöge (15)

$$
{}_h a_{\mu(\nu)} = \frac{\partial\, {}_h a_\mu}{\partial x_\nu} - {}_h a_\lambda \frac{\partial\, {}_k a_\mu}{\partial x_\nu}\, {}_k a^\lambda - {}_h a_\lambda\, r_k\, {}_k a_\mu\, {}_k a^\lambda\, s_\nu -
$$

$$
- r_h\, {}_h a_\mu \frac{\partial\, {}_k a_\lambda}{\partial x_\nu}\, {}_k a^\lambda - r_h\, {}_h a_\mu\, r_k\, {}_k a_\lambda\, {}_k a^\lambda\, s_\nu =
$$

$$
= \frac{\partial\, {}_h a_\mu}{\partial x_\nu} - \frac{\partial\, {}_h a_\mu}{\partial x_\nu} - r_h\, {}_h a_\mu\, s_\nu - r_h\, {}_h a_\mu \frac{\partial\, {}_k a_\lambda}{\partial x_\nu}\, {}_k a^\lambda - r_h\, {}_h a_\mu\, \Sigma\, r_k\, s_\nu =
$$

$$
= - r_h\, {}_h a_\mu\, s_\nu\, (1 + \Sigma\, r_k) - r_h\, {}_h a_\mu \frac{\partial\, {}_k a_\lambda}{\partial x_\nu}\, {}_k a^\lambda = - r_h\, {}_h a_\mu \frac{1}{a} \frac{\partial a}{\partial x_\nu}.
$$

Wir können ${}_h a_{\mu(\nu)}$ also durch den kovarianten Vektor

$$
v_\nu = \frac{\partial a}{\partial x_\nu} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (18)
$$

ersetzen.

Ferner ersetzen wir $S^\lambda_{\mu\nu}$ durch

$$
{}_l q_{\mu\nu} = S^\lambda_{\mu\nu}\, {}_l a_\lambda = {}_l p_{\mu\nu} + r_l\, {}_l a_\mu\, s_\nu - r_l\, {}_l a_\nu\, s_\mu \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (19)
$$

Diese n relativen alternierenden Tensoren vertreten hier die n Rotationen bei absoluten Vektoren.

Da die zweiten Ableitungen $e^\mu_{\alpha\beta}$ aus (4) lösbar waren, führt ihre Elimination auf $n^3 - \frac{1}{2} n^2 (n+1) = \frac{1}{2} n^2 (n-1)$ Relationen; v_ν und ${}_l q_{\mu\nu}$ haben also im allgemeinen $\frac{1}{2} n^2 (n-1)$ unabhängige Komponenten. Es bestehen also n Relationen zwischen diesen Tensoren, nämlich

$$
\frac{{}_l a^\mu\, {}_l q_{\mu\nu}}{r_l} = \frac{{}_l a^\mu\, {}_l p_{\mu\nu}}{r_l} - n \frac{{}_k p_{\nu\sigma}\, {}_k a^\sigma}{(n-1)\, r_k} + \frac{{}_k p_{\nu\sigma}\, {}_k a^\sigma}{(n-1)\, r_k} = 0.
$$

Der Reduktionssatz in der einfachsten Form lautet jetzt:

Ein (kleinstes) Adjunktionssystem erster Ordnung wird gebildet von den Tensoren ${}_l q_{\mu\nu}$ und v_ν, wobei

$$
\frac{{}_l a^\mu\, {}_l q_{\mu\nu}}{r_l} = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (20)
$$

Wir bemerken noch, dass Substitution der $e^\lambda_{\alpha\beta}$ in (10) auch auf den Vektor

$$
s_\mu + \Gamma^\rho_{\rho\mu} = \frac{1}{a} \frac{\partial a}{\partial x_\mu} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (21)
$$

führt.

Eine algebraische Basis erster Ordnung wird gebildet von

$$a, \; I_l = v_\nu \, {}_l a^\nu \text{ und } I_{lhk} = \frac{{}_l q_{\mu\nu} \, {}_h a^\mu \, {}_k a^\nu}{r_l} \quad \ldots\ldots \quad (22)$$

mit den Relationen

$$\sum_l I_{llk} = 0. \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (23)$$

Zur Bestimmung der Differentialinvarianten zweiter Ordnung hat man folgenden Reduktionssatz [4]):

Ein Adjunktionssystem zweiter Ordnung wird gebildet von den kovarianten Ableitungen von $S^\lambda_{\mu\nu}$, v_ν und vom Krümmungstensor $R^i_{\nu\alpha\beta}$.

Wir werden jetzt zeigen, dass das System $S^\lambda_{\mu\nu(\sigma)}$, $v_{\nu(\sigma)}$ und $R^i_{\nu\alpha\beta}$ sich für $n > 2$ durch ${}_l q_{\mu\nu(\sigma)}$ und $v_{\nu(\sigma)}$ ersetzen lässt. Vermöge (19) ist $S^\lambda_{\mu\nu(\sigma)}$ unmittelbar durch ${}_l q_{\mu\nu(\sigma)}$ ausdrückbar.

Der Krümmungstensor vereinfacht sich nach ziemlich umständlicher Rechnung auf

$$R^i_{\nu\alpha\beta} = - r_k \, {}_k a_\nu \, {}_k a^i \, s_{\alpha\beta} \,. \quad \ldots\ldots\ldots \quad (24)$$

mit

$$s_{\alpha\beta} = \frac{\partial s_\alpha}{\partial x_\beta} - \frac{\partial s_\beta}{\partial x_\alpha} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (25)$$

Dieser (absolute) alternierende Tensor findet man aus (10), wenn man nach $\bar{x}_\beta$ differentiert, α und β vertauscht und substrahiert.

Es liegt nahe ihn zu vergleichen mit

$$t_{\mu\nu} = \frac{{}_l a^\sigma \, {}_l q_{\mu\nu(\sigma)}}{r_l} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (26)$$

Dazu berechnen wir von $t_{\mu\nu}$ aber nur die Termen zweiter Ordnung.

$${}_l q_{\mu\nu(\sigma)} = \frac{\partial p_{\mu\nu}}{\partial x_\sigma} + r_l \, {}_l a_\mu \frac{\partial s_\nu}{\partial x_\sigma} - r_l \, {}_l a_\nu \frac{\partial s_\mu}{\partial x_\sigma} + \ldots\ldots\ldots \quad (27)$$

$$t_{\mu\nu} = \frac{{}_l a^\sigma}{r_l} \frac{\partial \, {}_l p_{\mu\nu}}{\partial \, x_\sigma} + \frac{\partial s_\nu}{\partial x_\mu} - \frac{\partial s_\mu}{\partial x_\nu} + \ldots =$$

$$= - \frac{{}_l a^\sigma}{r_l} \frac{\partial \, {}_l p_{\nu\sigma}}{\partial x_\mu} - \frac{{}_l a^\sigma}{r_l} \frac{\partial \, {}_l p_{\sigma\mu}}{\partial x_\nu} - s_{\mu\nu} + \ldots =$$

$$= - \frac{\partial}{\partial x_\mu} \left(\frac{{}_l p_{\nu\sigma} \, {}_l a^\sigma}{r_l} \right) + \frac{\partial}{\partial x_\nu} \left(\frac{{}_l p_{\mu\sigma} \, {}_l a^\sigma}{r_l} \right) - s_{\mu\nu} + \ldots =$$

$$= (n-1) \left(- \frac{\partial s_\nu}{\partial x_\mu} + \frac{\partial s_\mu}{\partial x_\nu} \right) - s_{\mu\nu} + \ldots = (n-2) \, s_{\mu\nu} + \ldots$$

[4]) Vgl. [3]).

Also

$$t_{\mu\nu} = (n-2)\, s_{\mu\nu} + \ldots\ldots \qquad (28)$$

Hiermit ist gezeigt worden, dass ${}_l q_{\mu\nu(\sigma)}$ *und* $v_{\nu(\sigma)}$ *für* $n > 2$ *ein Adjunktionssystem zweiter Ordnung bilden.* Wir untersuchen jetzt noch die Abhängigkeit der Komponenten dieser Tensoren. Die Elimination von $e^{\lambda}_{\alpha\beta}$ und $e^{\lambda}_{\alpha\beta\gamma}$ aus den nach $\bar{x}_{\gamma}$ differentierten Gleichungen (4) muss im allgemeinen $\frac{1}{2} n^3 (n+1) - \frac{1}{6} n^2 (n+1)(n+2) = \frac{1}{3} n^2 (n+1)(n-1)$ unabhängige Relationen liefern. Dies ist also die Anzahl der unabhängigen Komponenten des Adjunktionssystems. Statt $v_{\mu(\nu)}$ nehmen wir den symmetrischen Tensor $v_{\mu\nu} = \frac{1}{2}(v_{\mu(\nu)} + v_{\nu(\mu)})$ mit $\frac{1}{2} n(n+1)$ Komponenten. Die ${}_l q_{\mu\nu(\sigma)}$ müssen also noch $\frac{1}{3} n^2 (n+1)(n-1) - \frac{1}{2} n(n+1)$ unabhängige Komponenten haben. Also muss es zwischen ihnen

$$\frac{1}{2} n^3 (n-1) - \left\{ \frac{1}{3} n^2 (n+1)(n-1) + \frac{1}{2} n (n+1) \right\} = \\ = \frac{1}{6} n^2 (n-1)(n-2) + \frac{1}{2} n (n+1)$$

Relationen geben. Man findet sie mittels kovarianter Differentiation von (20) und zyklischer Vertauschung und Addition von (27). Ersteres ergibt

$$Q_{\nu\lambda} = \frac{{}_l a^{\mu}\; {}_l q_{\mu\nu\,(\lambda)}}{r_l} + \ldots = 0,$$

also $\frac{1}{2} n (n+1)$ Relationen, letzteres

$$\sum_{zykl.} {}_l q_{\mu\nu(\sigma)} = - \sum_{zykl.} r_l\; {}_l a_{\mu}\, s_{\nu\sigma} + \ldots,$$

also $\frac{1}{6} n^2 (n-1)(n-2)$ Relationen.

Für $n = 2$ ist $\Gamma^{\lambda}_{\mu\nu}$ symmetrisch, so dass der Tensor $S^{\lambda}_{\mu\nu}$ verschwindet, also auch ${}_l q_{\mu\nu}$. $s_{\alpha\beta}$ ist eine relative Invariante zweiter Ordnung vom Gewicht eins.

Ein kleinstes Adjunktionssystem zweiter Ordnung wird für $n = 2$ *also gebildet von* $s_{\alpha\beta}$ *und den kovarianten Ableitungen von* v_{ν}.

Wenn a im besondern unabhängig von den Koordinaten x_i ist, gibt es also nur eine relative Invariante zweiter Ordnung. Man findet dann 2 absolute Invarianten dritter Ordnung [5]).

---

[5]) G. F. C. GRISS, Differentialinvarianten eines kovarianten Tensors 4. Stufe im binären Gebiet; erscheint demnächst in der Compositio Mathematica.