Astronomy. — Das empirische Fehlergesetz. Von A. A. NIJLAND.

(Communicated at the meeting of September 29, 1934).

Bekanntlich hat LAPLACE (*Théorie analytique des Probabilités* [1812]) eine Ableitung der exponentiellen Fehlerkurve

$$\Phi(x) = \frac{h}{\sqrt{\pi}} e^{-h^2 x^2}. \qquad (I)$$

gegeben, indem er sich den beobachteten Fehler aus sehr vielen Elementarfehlern u, v, w...... zusammengesetzt denkt, die alle in ihrer Frequenz dem gleichen Gesetze $\varphi(u), \varphi(v), \varphi(w).$ folgen. Später hat Bessel (Astr. Nachr. 358, 359 [1838]) die Theorie von LAPLACE nach zwei Seiten hin erweitert. Vorerst können bei Bessel die Elementarfehler verschiedenen Gesetzen $\varphi(u), \chi(v), \omega(w).$ gehorchen; weiter hat er die exponentielle Form als erste Näherung betrachtet, und die definitive Formel lautet, wenn man sich zu einem Fehlergesetze geraden Charakters beschränkt:

$$\Phi_{B}(x) = \frac{h}{\sqrt{\pi}} e^{-h^{2}x^{2}} \{ 1 + \beta_{4} \psi_{4}(x) + \beta_{6} \psi_{6}(x) + \ldots \} . . (II)$$

Die Koeffizienten β sind gewisse Kombinationen der mittleren Fehler verschiedener Ordnung: η_1 (des durchschnittlichen Fehlers), η_2 (des meistens mit ε angedeuteten mittleren Fehlers), η_3 u.s.w., während die Funktionen ψ in engem Zusammenhang mit den Polynomen von HERMITE stehen. Insbesondere:

$$\beta_4 = \frac{[\eta_4^4] - 3 [\eta_2^4]}{24 [\eta_2^2]^2}.$$

wo die eckigen Klammern eine sich über die Elementarfehler erstreckende Summierung bedeuten, und

$$\psi_4(x) = \left(\frac{x}{\varepsilon}\right)^4 - 6\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)^2 + 3,$$

wo $\varepsilon = \sqrt{[\eta_2]^2}$ den mittleren Fehler des resultierenden Fehlers x darstellt. Werden in der Entwicklung auch die ungeraden Glieder mitgenommen, so entsteht die von Charler (Arkiv för Math., Astr. och Fysik Bd. 2, Nr. 8 [1905]) mitgeteilte Formel; ihm war augenscheinlich die Besselsche Arbeit nicht bekannt.

Zur Prüfung der exponentiellen Formel hat BESSEL mehrere Beobachtungsreihen von BRADLEY herangezogen. So 300 Deklinationen einiger häufig beobachteten Sterne. "Ich habe abgezählt", schreibt er, "wie viele Fehler sich innerhalb enger von 0 bis zu den grössten Fehlern fortgehender Begrenzungen fanden." Bei den auf (den Fall von) 100 (Beobachtungen) reduzierten Abzählungen war das Resultat:

TABELLE I.

Grenzen	Bg	Theorie	Unterschied	
0.0 - 0.4 0.4 - 0.8 0.8 - 1.2 1.2 - 1.6 1.6 - 2.0 2.0 - 2.4 2.4 - 2.8 2.8 - 3.2 3.2 - 3.6	22.0 19.3 18.3 9.3 9.0 7.7 3.3 5.0 2.7	19.5 18.3 16.2 13.6 10.6 7.9 5.5 3.6 2.2	- 2.5 - 1.0 - 2.1 + 4.3 + 1.6 + 0.2 + 2.2 - 1.4 - 0.5	
3.6 — 4.0 4.0 etc.	1.3	1.3	0.0 - 0.6	
	I	I	1	

 $\varepsilon = \pm 1.6327$

Bessel beschränkt sich zu der Bemerkung, dass aus dem angeführten Beispiel eine nahe Übereinstimmung der Erfahrung mit der Theorie hervorgeht, erwähnt aber nicht, dass die B—R, obwohl vielleicht befriedigend klein, einen stark systematischen Charakter tragen: es kommen sowohl die kleinen wie auch die allergrössten Fehler häufiger vor, als es die exponentielle Formel verlangt. Man hätte doch gewiss erwarten können, dass Bessel die Erfahrungsergebnisse eher mit der eignen Theorie (Formel II) als mit der einfachen exponentiellen Formel I von Laplace verglichen hätte. Es werden die Schnittpunkte der beiden Kurven I und II mit grosser Annäherung durch

$$\psi_{4}(x) \equiv \left(\frac{x}{\varepsilon}\right)^{4} - 6\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)^{2} + 3 = 0. \quad . \quad . \quad (III)$$

$$x_{1} = 0.74 \, \varepsilon,$$

$$x_{2} = 2.33 \, \varepsilon;$$

bestimmt, oder

in unserem Beispiel also $x_1 = 1".2$, $x_2 = 3".8$. Wie man sieht, stimmt das so gut wie es sich überhaupt bei dem immer doch sehr kargen Material erwarten lässt. Dasselbe gilt, obwohl etwas weniger deutlich, auch für die anderen von BESSEL angeführten Beispiele.

Bekanntlich hat später die Erfahrung immer gelehrt, dass dem exponentiellen Gesetze gegenüber die allerkleinsten sowie die sehr grossen Fehler auf Kosten der mittelgrossen Abweichungen zu zahlreich sind 1). Es bedarf aber eines sehr grossen Beobachtungsmaterials, um die Schnittpunkte mit genügender Schärfe hervortreten zu lassen; das gilt insbesondere vom zweiten Schnittpunkt x_2 , wo die beiden Kurven sich unter einem sehr kleinen Winkel schneiden.

In der Tabelle II sind die Resultate aus 5 grösseren Beobachtungsreihen übersichtlich zusammengestellt.

Es bedeutet:

m: die Zahl der diskutierten Fehler;

ε: den mittleren Fehler;

 x_1 , x_2 : die Abszissen der theoretischen Schnittpunkte, wie sie aus der Gleichung $\psi_4(x) = 0$ hervorgehen;

 x_1' , x_2' : die Abszissen der beobachteten Schnittpunkte;

n: der Überschuss der sehr kleinen Fehler, der als passendes Mass für den Unterschied zwischen dem exponentiellen und dem empirischen Fehlergesetze gelten kann.

par presentation of the COSA											
	m	ε	$\psi_4(x)=0$		Beobachtung		n	Bem.			
			x_1	<i>x</i> ₂	<i>x</i> ′ ₁	x'2					
Cepheiden	4288	0.102	0.076	0.238	0.070	0.240	5.1 v. H.	1			
Algolsterne	9955	0.132	0.098	0.308	0.076	0.260	3.7	1			
langperiod. Veränderl.	14305	0.159	0.118	0.371	0.100	0.375	13	2			
Mira Ceti	1670	0.48	0.35	1.12	0.35	1.10	4.4	3			
Streichhölzchen	24359	0.096	0.071	0. 2 23	0.070	0.220	1.7	4			

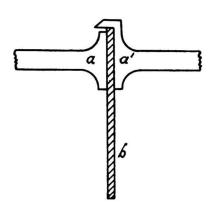
TABELLE II.

Bemerkungen.

- 1. Proc. Ac. Amst. 28, 142.
- 2. Proc. Ac. Amst. 33, 112; 34, 217, 654, 941, 1372; 35, 33, 472, 931, 1030, 1126, 1230; 36, 174, 399, 470, 772, 835; 37, 3, 206, 481; R Aquilae (noch nicht publiziert).

¹⁾ LEHMANN-FILHÉS nennt (Astr. Nachr. 2792 [1887]) nur den Überschuss der sehr grossen Fehler, und zwar insbesondere in bezug auf die Frage des Verwerfens der ällergrössten Abweichungen.

- 3. Astr. Nachr. 220, 90, 91. Die "Fehler" sind hier die Abweichungen der Beobachtungen von der mittleren Kurve 1895—1923.
- 4. Es wurden auf mein Ersuchen i.J. 1903 von dem Holländischen Augenartz Dr. WERNDLY an gut 12000 kopflosen ungefärbten Streichhölzchen in einem sehr einfachen Mikrometer Breite und Dicke gemessen; der Mittelwert der beiden Messungen (etwa 2.3 mm) galt als eine Mes-



sung. Das Mikrometer hat zwei Backen a, a' (s. die Fig.), welche das Holzstäbchen b über einen Abstand von 14 mm packen. Das Mikrometer liest 0.01 mm direkt ab. Auf das immer etwas zeitraubende Abschätzen der Tausendstel Millimeter wurde verzichtet, so dass sich, das ist der Vorteil der Methode, recht schnell ein grosses Material anhäuft.

Da die Messung an beiden Enden der Stäbchen vorgenommen wurde, liegen mehr als 24000 Zahlen zwischen 1.90 und 2.70 mm vor, und es kann die

Fehlerkurve in diesem Falle als sehr fest begründet gelten. Zu bemerken ist noch, dass die 12000 Streichhölzchen in meiner Gegenwart in 12 Sekunden durch die Hackmaschine der "Vereenigde Nederlandsche Lucifersfabrieken" zu Eindhoven (Direktor Herr WIJERS) geliefert wurden (Nov. 1900). Das Material ist also viel homogener als wenn man die Streichhölzchen vielen beliebigen Schachteln entnommen hätte.

Schols hat 1893 (Versl. en Meded. Ak. v. Wet. Amst. bl. 194 [1893]) die Bemerkung gemacht, dass die BESSELsche Theorie den Überschuss der sehr kleinen Fehler zu erklären nicht imstande ist. Dazu müsste β_4 offenbar positiv sein. Schols findet aber, dass die Annahme einfacher plausibler Fehlergesetze für die Elementarfehler immer zu negativen Werten von β_4 führt, und glaubt deshalb, die Ursache des so deutlich ausgeprägten Unterschiedes zwischen der exponentiellen und der empirischen Fehlerkurve anderswo suchen zu müssen, und zwar in einer Ungleichartigkeit des Materials, welche nicht gestattet, das Mass der Genauigkeit oder aber den mittleren Fehler für die einzelnen, das Fehlerkollektiv zusammenstellenden Gruppen als eine konstante Grösse zu betrachten. A priori kommt dieser Hypothese m.E. gewiss grössere Bedeutung zu als der Forderung von LAPLACE und BESSEL, dass zur Bildung eines beobachteten Fehlers immer eine sehr grosse Zahl von Elementarfehlern mitwirken muss. Ein umfangreiches Fehlermaterial ist wohl niemals als vollständig einheitlich zu betrachten. Bei den Cepheiden, Algolsternen und langperiodischen Veränderlichen der Tabelle II zum Beispiel haben verschiedenartige Sterne das Material geliefert.

Für die Erklärung des abweichenden Verlaufes der empirischen Fehler-

kurve war schon von Newcomb (Am. Journ. of Math. 8, 343 [1886]) und Lehmann-Filhés (Astr. Nachr. 2792 [1887]) eine Verschiedenheit des Präzisionsmasses herangezogen worden. Die Ausarbeitung der Theorie verdanken wir aber Schols, und später auch Ogrodnikoff (Russian Astr. Journal 5, 1 [1928]), dem die Arbeit von Schols offenbar nicht bekannt war. Schols beschränkt sich zu Fehlerquellen, welche dem exponentiellen Gesetze folgen und kommt so zu dem Fehlergesetze:

$$\Phi_{S}(x) = \frac{h}{\sqrt{\pi}} e^{-h^{2}x^{2}} \{ 1 + \gamma_{2} \psi_{4}(x) + \gamma_{3} \psi_{6}(x) + \ldots \} . . (IV)$$

Für einen konstanten mittleren Fehler verschwinden sämtliche Koeffizienten γ , und kommt also das einfache exponentielle Gesetz Φ (x) wieder heraus. Merkwürdigerweise äussert SCHOLS sich mit keinem Worte über die Tatsache, dass hier wieder die Polynomen ψ auftreten, obwohl die beiden Entwicklungen gänzlich verschieden sind. BESSEL entwickelt die Funktion

$$\Phi(x) = \frac{h}{\sqrt{\pi}} e^{-h^2 x^2}$$

nach x, Schols nach $y = \varepsilon^2 = \frac{1}{2h^2}$. Es stellt sich nun heraus, dass

$$2^m \frac{\partial^m \Phi}{\partial y^m} = \frac{\partial^{2m} \Phi}{\partial x^{2m}}.$$

Bei BESSEL nimmt das ψ_4 in der Reihe

$$1 + \beta_4 \psi_4(x) + \beta_6 \psi_6(x) + \dots$$

eigentlich die fünfte Stelle ein; die 4. Stelle würde ψ_3 enthalten, sie verschwindet aber, wie auch die zweite, durch die Annahme eines geraden Fehlergesetzes. Bei Schols, wo gerade und ungerade Glieder vorkommen, steht ψ_4 an dritter Stelle; der Koeffizient γ_1 des zweiten Gliedes $\gamma_1\psi_2(x)$ ist hier durch die Wahl des Nullpunktes für die verschiedenen y zum Verschwinden gebracht — wie übrigens bei BESSEL β_2 durch die Wahl von h. Und so trifft es sich dann, dass merkwürdigerweise in den beiden Entwicklungen der Verlauf des empirischen Fehlergesetzes hauptsächlich durch ψ_4 bestimmt wird, mit diesem Unterschiede dass γ_2 als Koeffizient eines Gliedes gerader Ordnung immer positiv ist.

Wenn es sich nun in der Praxis herausstellt, dass immer die sehr kleinen und die sehr grossen Fehler zu zahlreich sind — eine gut konstatierte Ausnahme auf diese Regel besteht meines Wissens nicht —, so wird man das so interpretieren müssen, dass der Einfluss der Zusammenwirkung vieler Quellen (LAPLACE-BESSEL) bei einem grossen Fehlermaterial offenbar meistens kleiner ist als der Einfluss einer variabelen Präzision (SCHOLS). In dieser Beziehung ist es bemerkenswert, dass im letzten der in der Tabelle II angeführten Beispiele, wo das Material eine relativ sehr hohe Gleichartigkeit besitzt, die empirische Kurve der exponentiellen viel näher kommt als bei den weniger homogenen Sternstatistiken.

Man kann die Funktion $\varphi = he^{-h^2x^2}$, welche auch $g^{1/2}$. e^{-gx^2} ($g = h^2$) oder

$$\frac{e^{-\frac{x^2}{2\varepsilon^2}}}{\varepsilon \sqrt{2}} \left(h^2 = \frac{1}{2\varepsilon^2} \right) \text{ oder } \frac{e^{-\frac{x^2}{2y}}}{\sqrt{2y}} \left(\gamma = \varepsilon^2 = \frac{1}{2h^2} \right)$$

geschrieben werden kann, nach x, h, g, ε oder y differenzieren. Stets treten dabei lineare Funktionen der Polynomen ψ auf, sodass zwischen den partiellen Differenzialquotienten einfache Beziehungen bestehen. Die merkwürdigsten sind wohl:

$$h\frac{\partial\varphi}{\partial h}-x\frac{\partial\varphi}{\partial x}=\varphi,\ldots, (V)$$

$$x^{m-1}\frac{\partial^{m+1}\varphi}{\partial x^{m+1}}+2h^{m+2}\frac{\partial^m\varphi}{\partial h^m}=0 (VI)$$

und

$$2^{m} \frac{\partial^{m} \varphi}{\partial y^{m}} = \frac{\partial^{2m} \varphi}{\partial x^{2m}} (VII)$$

Die Gleichung (V) hat als allgemeine Lösung:

$$\varphi = h F(h x)$$
,

wo F eine willkürliche Funktion bedeutet; in unserem Fall ist

$$F(hx) = e^{-h^2x^2}.$$

Wie oben schon bemerkt, ist die Gleichung (VII), namentlich für m=1, dafür verantwortlich, dass das Polynom ψ_4 sowohl bei BESSEL als bei SCHOLS in erster Linie den Unterschied zwischen den beiden Fehlerkurven, der empirischen und der exponentiellen, bestimmt.

Für m = 1 wird sie

$$2\frac{\partial\varphi}{\partial y} = \frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}.$$

Die allgemeine Lösung dieser Gleichung ist:

$$\varphi = f(y) + 2\frac{x^2}{2!}\frac{df}{dy} + 4\frac{x^4}{4!}\frac{d^2f}{dy^2} + 8\frac{x^6}{6!}\frac{d^3f}{dy^3} + \dots + \left\{xF(y) + 2\frac{x^3}{3!}\frac{dF}{dy} + 4\frac{x^5}{5!}\frac{d^2F}{dy^2} + \dots\right\} \sqrt{2},$$

wo f(y) und F(y) willkürliche Funktionen sind.

Setzt man F(y) = 0 und $f(y) = (2y)^{-1/2}$, so wird

$$\varphi = (2y)^{-1/2} \left(1 - \frac{1}{2} \frac{x^2}{y} + \frac{1}{2.4} \frac{x^4}{y^2} - \frac{1}{2.4.6} \frac{x^6}{y^3} + \ldots \right) = \frac{e^{-\frac{x^2}{2y}}}{\sqrt{2y}}.$$

Utrecht, Sept. 1934.