Mathematics. — *Lineare Differentialsysteme und Matrixgleichungen.* Von A. HERRMANN. (Communicated by Prof. R. WEITZENBÖCK).

(Communicated at the meeting of March 30, 1935.)

Im Folgenden soll ganz allgemein die Aufgabe gelöst werden, wie man aus der Gesamtheit aller Matrizen n-ter Ordnung diejenigen bestimmen kann, die einer Gleichung m-ten Grades

$$X^m + A_1 X^{m-1} + A_2 X^{m-2} + \ldots + A_m = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

genügen, wobei die Koeffizienten A_i beliebige Matrizen n-ter Ordnung bedeuten. Für den einfachen Fall, dass die A_i rationale Funktionen einer vorgegebenen Matrix A sind, ist die Aufgabe bereits durchgeführt. In einer früheren Arbeit [1]) habe ich näher auseinandergesetzt, wie man in diesem speziellen Falle die im durch A konstituierten Matrizenring vorhandenen Lösungen in einfacher Weise finden kann, und auf welche Weise sich auch nicht-polynomische Lösungen feststellen lassen.

Die Behandlung von linearen Differentialsystemen auf matrizentheoretischer Grundlage führt aber leicht auf die Erledigung des oben gestellten Problems. Die Darstellung der Integrale des Systems durch die FROBENIUSschen Kovarianten erweist sich dabei als zweckmässig. Wir werden daher zunächst auf diese Darstellung etwas näher eingehen, umsomehr als wir bei dieser Gelegenheit oben angegebene Spezialfälle [2]) miterledigen können.

1. *Einführung der Kovarianten.*

Es bedeute J eine Matrix, die in der JORDANschen Normalform gegeben ist, d.h. die Matrix J besteht in der Diagonalen als lauter Matrizen

$$J_\nu = \begin{pmatrix} r_\nu & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & r_\nu & 1 & & 0 \\ \vdots & & & & \vdots \\ \vdots & & & & 1 \\ 0 & \ldots & \ldots & \ldots & r_\nu \end{pmatrix}$$

also

$$J = \begin{pmatrix} J_1 & & & \\ & J_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & J_{m'} \end{pmatrix}$$

---

1) A. HERRMANN, Ueber Matrixgleichungen etc. (Compos. Mathem. I (1934), 284-302).

2) R. WEITZENBÖCK, Ueber die Matrixgleichung $X^2 = A$ (Proceedings Amsterdam 35 (1932), 328-329).

Matrizen vom Typus J charakterisiert man auch durch folgendes Schema: Enthalten verschiedene Felder J_ν der Grade $\sigma_1^{(k)} \ldots \sigma_k^{(k)}$ *dasselbe* r_k, so schreibt man $(\sigma_1^{(k)} \ldots \sigma_t^{(k)})$ und fasst die zu den verschiedenen r_k gehörigen runden Klammern in einer eckigen Klammer zusammen. Die Summe sämtlicher $\sigma_\nu^{(s)}$ — Werte, die zu $r_s \neq 0$ gehören, gibt den Rang der Matrix J an, und die charakteristische Funktion $|rE - J| = f(r)$ hat die Nullstelle $r_s = 0$ in der Vielfachheit $n - \sum_{\nu, s} \sigma_\nu^{(s)}$.

FROBENIUS [3]) hat gezeigt, dass man jede Matrix A in der Form

$$A = A_0 + r_1 K_1 + r_2 K_2 + \ldots r_m K_m \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2)$$

darstellen kann, wobei r_ν die Eigenwerte von A sind und A_0 eine Matrix bedeutet, von der eine Potenz verschwindet; die Kovarianten K_ν sind charakterisiert durch

$$\Sigma K_\nu = 1, K_\nu^2 = K_\nu \text{ und } K_\nu K_\mu = 0 \text{ für } \nu \neq \mu \quad . \quad . \quad . \quad (2a)$$

Wir gehen zunächst auf diese Zerlegung ein, und zwar denken wir uns A in die Normalform J transformiert und betrachten J, insbesondere J_σ. E_σ sei die Einheitsmatrix σ-ter Ordnung, D_σ eine Matrix σ-ter Ordnung, deren Elemente alle Null sind mit Ausnahme einer Einheitsdiagonalen, die an der (1; 2)-ten Stelle beginnt d.h. [4])

$$E_\sigma = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & \cdot & & \\ & & \cdot & \\ & & & \cdot \\ & & & & 1 \end{pmatrix}, \quad D_\sigma = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdot & \cdot & 0 \\ \cdot & 0 & 1 & & & \vdots \\ \cdot & & & \cdot & & 0 \\ \cdot & & & & \cdot & 1 \\ 0 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 0 \end{pmatrix}$$

d.h. D_σ^s ist eine Matrix mit einer Einheitsdiagonalen, die an der $(1; s+1)$-ten Stelle beginnt, wenn $s < \sigma$ ist, für $s \geqq \sigma$ ist $D_\sigma^s = 0$.

Wir zerlegen die Einheitsmatrix E in $\sum_{i=1}^{m} E_i$ entsprechend der JORDANschen Zerlegung, d.h. es steht an Stelle von jedem r_i in E_i eine "1", sonst überall 0. Man hat dann $\sum_{i=1}^{m} E_i = E$, $E_i^2 = E_i$ und $E_i E_k = 0$, $i \neq k$.

Wir setzen $E_i (J - r_i E) = D_i$, dann ist $D_i D_k = 0$, für $i \neq k$, wobei $D_i^{q_i} = 0$ ist, wenn $q_i = \text{Max}\, (\sigma_1^{(i)} \ldots \sigma_h^{(i)})$, daher ist $D_i^{q_i} = 0$ die Gleichung niedrigsten Grades für D_i.

---

[3]) G. FROBENIUS, (Sitzungsberichte Akad. Berlin 1896, S. 601).

[4]) D_σ nennt TURNBULL die „auxiliary Unit Matrix", vgl. H. W. TURNBULL und A. C. AITKEN, An Introduction to the Theory of Canonical Matrices, BLACKIE & SON (1932), S. 62.

Wegen

$$\left.\begin{aligned} J &= J \sum_{i=1}^{m} E_i \\ &= \sum_{i=1}^{m} (r_i E + (J - r_i E)) E_i \\ &= \sum_{i=1}^{m} r_i E_i + \sum D_i \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots \quad (3)$$

erhält man

$$A = R^{-1} JR = \sum_i R^{-1} D_i R + \sum_i r_i R^{-1} E_i R$$
$$A = A_0 + \sum_i r_i K_i,$$

also die FROBENIUSsche Zerlegung. Ist $A = R^{-1} JR$, so wollen wir den Ring der rationalen Funktionen von J den zur Matrix A gehörigen Kernring nennen. Im Weiteren ist eine Beschränkung auf rationale Funktionen nicht erforderlich, vielmehr überträgt sich alles auf den Fall einer in eine TAYLORsche Reihe entwickelbaren Funktion, die für jede Nullstelle des charakt. Polynoms konvergiert.

Die rat. Funktionen $\Phi(J)$ zerfallen, wie ohne Weiteres einzusehen ist, in genau derselben Weise in Teilmatrizen wie J selbst. Demgemäss zerfällt der Kernring in je m Komponenten, und man braucht sich nur auf die Betrachtung eines derartigen Teilringes zu beschränken. Ist $q_k = Max(\sigma_1^{(k)} \ldots \sigma_h^{(k)})$, so gibt q_k die Vielfachheit der Nullstelle r_k für die Gleichung niedrigsten Grades von J an, und man ersieht sogleich, dass $E_k, D_k, D_k^2 \ldots D_k^{q_k-1}$ eine Basis für die Ringelemente des Teilringes liefert, d.h. jedes Element lässt sich durch die angegebenen Matrizen darstellen. Im Kernring haben wir für J in (3) bereits eine derartige Darstellung gefunden. Entwickeln wir nun $\Phi((\sigma_1^{(k)} \ldots \sigma_h^{(k)})) = \Phi(r_k E_k + D_k)$ nach Potenzen von D_k, dann erhält man

$$\Phi((\sigma_1^{(k)} \ldots \sigma_h^{(k)})) = \Phi(r_k) E_k + \Phi'(r_k) D_k + \ldots + \frac{\Phi^{(q_k-1)}_{(r_k)}}{(q_k-1)!} D_k^{q_k-1},$$

da $D_k^s = 0$ ist für $s \geqq q_k$. Weil ferner $(r_k E_k + D_k)(r_i E_i + D_i) = 0$ ist für $i \neq k$, folgt für den Kernring

$$\begin{aligned} \Phi(J) &= \Phi([(\sigma_1^{(1)} \ldots \sigma_{h_1}^{(1)}) \ldots (\sigma_1^{(m)} \ldots \sigma_{h_m}^{(m)})]) \\ &= \Phi\left(\sum_{k=1}^{m} (r_k E_k + D_k)\right) = \sum_k \Phi(r_k E_k + D_k) = \\ &= \sum_{k=1}^{m} \left(\Phi(r_k) E_k + \ldots + \frac{\Phi^{(q_k-1)}_{(r_k)}}{(q_k-1)!} D_k^{q_k-1}\right). \end{aligned}$$

Nehmen wir mit $\Phi(J)$ die Transformation vor, die J in $A = R^{-1} J R$ überführt, dann erhalten wir für die rat. Funktionen von A die wichtige Darstellung

$$\Phi(A) = \sum_{k=1}^{m} K_k \sum_{i=0}^{q_k - 1} \frac{\Phi^{(i)}(r_k)}{i!} (A - r_k E)^i \quad . \; . \; . \; . \; . \; (4)$$

Es ist schon erwähnt worden und aus dem Vorigen ersichtlich, dass diese Darstellung durch die FROBENIUSsche Kovarianten nicht nur für rat. Funktionen, sondern für eine allgemeinere Klasse von Funktionen ihre Gültigkeit behält; eine Potenzreihe $\mathfrak{P}(r)$ konvergiert für eine Matrix A dann und nur dann [5]), wenn für jede ν-fache charakt. Wurzel r_k von A die Potenzreihe $\mathfrak{P}^{(\nu-1)}(r_k)$ konvergiert. Uns interessiert in diesem Zusammenhang, dass die Darstellung (4) die Lösung der Matrizengleichungen $P(X) = A$ impliziert; im Falle $P(X) = X^2 = A$ ist von mir die Lösung in dieser Form angegeben.

Da insbesondere (4) für die ganzen Funktionen gilt, haben wir für die Matrix e^A eine Darstellung durch die Kovarianten. Wir wollen A durch Ax ersetzen und erhalten so das folgende wichtige Resultat:

Ist A eine Matrix n-ter Ordnung, deren Minimalgleichung die m verschiedenen Nullstellen r_k in der Vielfachheit q_k hat, und bedeutet $P_k(x)$ eine Polynommatrix, deren Elemente $p^{(k)}_{(\alpha\beta)}(x)$ Polynome in x vom Grade $\leqq q_k - 1$ sind, dann ist

$$e^{Ax} = \sum_{k=1}^{m} P_k(x)\, e^{r_k \cdot x}, \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (5)$$

wobei die Polynommatrix sich durch die FROBENIUSsche Kovarianten K_ν von A und durch die Matrizen $A - r_k . E = A_k$ in der Form

$$P_k(x) = \sum_{\nu=1}^{q_k - 1} \frac{A_k^\nu}{\nu!} x^\nu K_k \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (6)$$

ausdrückt.

2. *Das einer Matrixgleichung zugeordnete Differentialsystem.*

Fasst man das System der Gleichungen

$$\frac{d z_k(x)}{dx} = \sum_{s=1}^{n} a_{ks} z_s(x) \qquad (k = 1 \ldots n) \quad . \; . \; . \; . \; (7)$$

symbolisch in die Matrizengleichung

$$Z'(x) = A Z(x) \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (7a)$$

---

5) ED. WEYR (Bulletin des Sciences Mathem. (2) XI (1887) S. 205).
K. HENSEL (Journal für Mathem. 155, S. 107-110).

zusammen, dann kann man eine Integralmatrix $Z(x) = (z_{ik}(x))$, deren Elemente den Gleichungen $\frac{dz_{ik}}{dx} = \sum_{\lambda=1}^{u} a_{i\lambda} z_{\lambda k} (i, k = l . n)$ genügen, nach der Methode der successiven Approximationen bestimmen, und es ergibt sich

$$Z(x) = e^{Ax}$$

als Lösungsmatrix. Nach (5) lässt sich diese Integralmatrix in der Gestalt $Z(x) = \sum_{k=1}^{u} P_k(x) e^{r_k x}$ schreiben,

Wir betrachten nun Gleichungen höherer Ordnung

$$\frac{d^\nu z_i(x)}{dx^\nu} = \sum_{k=1}^{n} \left(a_{ik1} \frac{d^{\nu-1} z_k(x)}{dx^{\nu-1}} + \ldots + a_{ik\nu} z_k(x) \right). \quad . \quad . \quad . \quad (8)$$

und schreiben sie in Matrizenform und erhalten

$$Z^{(\nu)}(x) = A_{(1)} Z^{(\nu-1)}(x) + A_{(2)} Z^{(\nu-2)}(x) + \ldots + A_{(\nu)} Z(x) \quad . \quad (8a)$$

Zur Lösung kann man dieses System auf

$$\overline{Z}'(x) = B\overline{Z}(x) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (9)$$

zurückführen, indem man $z'_i = z_{n+i}$ setzt; es ist $e^{Bx} = \sum \overline{P}_k(x) e^{\rho_k \cdot x}$, wobei die auftretenden Matrizen von der Ordnung νn sind. Aus $\sum \overline{P}_k(x) e^{\rho_k x}$ entnehmen wir dann die $z_i(x)$ als Lösungen von (8). Schreiben wir $A_{(i)} = -A_i$, und gehen wir mit dem Ansatz e^{Tx} in die Gleichung (8a), dann erhalten wir die dem Differentialsystem (8) zugeordnete Gleichung ν-ten Grades in T:

$$T^\nu + A_1 T^{\nu-1} + \ldots + A_\nu = 0, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (10)$$

worin nun die A_i beliebige Matrizen n-ter Ordnung bedeuten. Umgekehrt lassen wir einer Matrizengleichung (10) ein System ν-ter Ordnung entsprechen.

Stellen wir uns zu den $z_i(x)$, $(i = 1, 2 \ldots . n)$ ein System erster Ordnung

$$Z'(x) = TZ(x) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (10a)$$

her, dann haben wir in e^{Tx} eine Lösung des Systems (8), und es ist jede Matrix T der Ordnung n, die sich aus den n Funktionen $z_i(x)$, (die wir aus e^{Bx} erhalten haben) eine Lösung der Gl. (10).

Kennen wir auf Grund von (9) die Lösungen von (8), dann können wir also die Matrizen T bestimmen. Um T zu berechnen ist noch folgendes zu bedenken: Aus der Tatsache, dass die Polynommatrizen sich aus den Kovarianten aufbauen, folgert man leicht, dass auch ein einzelner Bestandteil $e^{r_k x} P_k(x)$ aus der allgemeinen Lösungsmatrix eine Lösungsmatrix ist. Ferner erkennt man leicht, dass auch die Folge $e^{r_k x} P'(x)$, $e^{r_k x} P''(x), \ldots$ Lösungsmatrizen sind, und man erhält damit genügend Gleichungen zur Bestimmung eines T-Wertes. Die Anzahl der Möglichkeiten zur Bestimmung einer Matrix T hängt von den Wurzeln der charakt. Gleichung für B ab.

a. Die charakt. Gl. $|rE-B|=0$ habe lauter verschiedene Wurzeln (sie ist also zugleich Minimalgleichung für B) die Zahl der Wurzeln ist νn. Zu jeder Wurzel ϱ_i gehört eine Lösung, und wir haben damit νn verschiedene Lösungen

$$z_1^{(i)} = c_1^{(i)} e^{\varrho_i x}, \ldots . z_{(\nu n)}^{(i)} = c_{(\nu n)}^{(i)} e^{\varrho_i x} \qquad (i = 1 \ldots \nu n),$$

aus denen sich jede andere Lösung durch lineare Kombination bilden lässt. Damit haben wir also

$$z_k(x) = C_1 z_k^{(1)} + C_2 z_k^{(2)} + \ldots C_{(\nu n)} z_k^{(\nu n)} \qquad (k = 1 \ldots \nu n).$$

Zur Herstellung der Matrix T der Ordnung n aus den $z_1(x), \ldots . z_n(x)$ bestehen $\binom{\nu n}{n}$ Möglichkeiten.

Die charakt. Gl. von B lässt sich auch in der Form schreiben:

$$|rE-B| = \left| \sum_{\mu=1}^{\nu} a_{ik}^{(\mu)} r^{\nu-\mu} - \delta_{ik} r^{\nu} \right| = 0 \ , \ \delta_{ik} = \begin{cases} 1 & \text{für } i=k \\ 0 & \text{,, } i \neq k \end{cases}, \ i,k = 1 \ldots n \quad (11)$$

Wir haben daher den Satz:

Die Matrizengleichung (10), deren Koeffizienten A_t beliebige Matrizen n-ter Ordnung $\mathrm{A}_{(t)} = -A_t = (a_{ik}^{(t)})$ sind, hat im Bereich der Matrizen n-ter Ordnung $\binom{\nu n}{n}$ Lösungen, wenn die Gleichung νn-ten Grades in r $\quad \left| \sum_{\mu=1}^{\nu} a_{ik}^{(\mu)} r^{\nu-\mu} - \delta_{ik} r^{\nu} \right| = 0$ lauter verschiedene Lösungen hat.

Als Beispiel behandeln wir die Gleichung

$$T^2 - \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} T - \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 0 \end{pmatrix} = 0.$$

Es ist $|rE-B| = 0 = (r-1)(r+1)(r^2-2)$, daher $\varrho_1 = 1$; $\varrho_2 = -1$; $\varrho_3 = \sqrt{2}$; $\varrho_4 = -\sqrt{2}$.

Die Kovarianten für die Herstellung von e^{Bx} ergeben sich zu

$$K_1 = -\frac{1}{2}(B^3 + B^2 - 2B - 2); \ K_2 = \frac{1}{2}(B^3 - B^2 - 2B + 2),$$

$$K_3 = \frac{1}{2\sqrt{2}}(B^3 + \sqrt{2}B^2 - B - \sqrt{2}), \ K_4 = -\frac{1}{2\sqrt{2}}(B^3 - \sqrt{2}B^2 - B + \sqrt{2}).$$

Den Lösungen von (9) entnehmen wir zur Berechnung von T die Funktionen:

$$z_1(x) = 2e^x + \left(-\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{2}\right)e^{\sqrt{2}x} + \left(\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{2}\right)e^{-\sqrt{2}x} =$$
$$= c_{11}\, e^x + c_{12}\, e^{-x} + c_{13}\, e^{\sqrt{2}x} + c_{14}\, e^{-\sqrt{2}x}$$

$$z\,(x) = 2e^{-x} + \left(\frac{1}{\sqrt{2}} - 1\right)e^{\sqrt{2}x} + \left(-\frac{1}{\sqrt{2}} - 1\right)e^{-\sqrt{2}x} =$$
$$= c_{21}\, e^x + c_{22}\, e^{-x} + c_{23}\, e^{\sqrt{2}x} + c_{24}\, e^{-\sqrt{2}x}.$$

Es entspricht:

1) $\begin{matrix} z_1 = c_{11}\, e^x + c_{12}\, e^{-x} \\ z_2 = c_{21}\, e^x + c_{22}\, e^{-x} \end{matrix}$ das System $Z' = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} Z$, also ist $T_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$,

2) $\left\{\begin{matrix} c_{11} & c_{13} \\ c_{21} & c_{23} \end{matrix}\right\}$ liefert $T_2 = \begin{pmatrix} 1 & \dfrac{1}{2-\sqrt{2}} \\ 0 & \sqrt{2} \end{pmatrix}$,

3) $\left\{\begin{matrix} c_{11} & c_{14} \\ c_{21} & c_{24} \end{matrix}\right\}$ „ $T_3 = \begin{pmatrix} 1 & \dfrac{1}{2+\sqrt{2}} \\ 0 & -\sqrt{2} \end{pmatrix}$,

4) $\left\{\begin{matrix} c_{12} & c_{13} \\ c_{22} & c_{23} \end{matrix}\right\}$ „ $T_4 = \begin{pmatrix} \sqrt{2} & 0 \\ 2-\sqrt{2} & -1 \end{pmatrix}$,

5) $\left\{\begin{matrix} c_{12} & c_{14} \\ c_{22} & c_{24} \end{matrix}\right\}$ „ $T_5 = \begin{pmatrix} -\sqrt{2} & 0 \\ 2+\sqrt{2} & -1 \end{pmatrix}$,

6) $\left\{\begin{matrix} c_{13} & c_{14} \\ c_{23} & c_{24} \end{matrix}\right\}$ „ $T_6 = \begin{pmatrix} \frac{4}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} & -\frac{4}{3} \end{pmatrix}$.

b. Im Falle mehrfacher Wurzeln der charakt. Gl. von B betrachten wir zunächst den Fall, dass sie zugleich Minimalgleichung ist. Sind $\varrho_1 \dots \varrho_\tau$ die verschiedenen Wurzeln mit den Vielfachheiten $\sigma_1 \dots \sigma_\tau$, $\sum_{i=1}^{\tau} \sigma_i = \nu n$. Es ist

$$z_k(x) = p_1^{(k)}\, e^{\varrho_1 x} + \dots, + p_\tau^{(k)}\, e^{\varrho_\tau x}$$

und die $p_i^{(k)}$ sind in x vom Grade $\leqq \sigma_i - 1$. Zur Bildung von T hat man auch die Polynomkoeffizienten zu berücksichtigen, die aus den $p_i^{(k)}$ durch Differentiation entstehen. Wir dürfen aber nur solche Bestandteile nehmen, dass in $Z' = TZ$, T von der Ordnung n wird. Daher wird die Anzahl der Lösungen T kleiner als im Falle a. Es sei beispielsweise

$$X^2 - \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = 0;$$

$|rE—B| = 0$ ist zugleich Minimalgleichung für B. Man erhält für z_1 und z_2 $z_1 = (A_1 + A_2 x)\, e^x + (B_1 + B_2 x)\, e^{-x}$, $z_2 = 2A_2\, e^x — 2B_2\, e^{-x}$.

Um die Matrix T der Ordnung 2 herzustellen, nehmen wir zunächst $z_1 = (A_1 + A_2 x)\, e^x$, $z_2 = 2A_2\, e^x$. Es ergibt sich dann

$$Z' = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} Z, \quad \text{also} \quad T = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Eine weitere Möglichkeit zur Bildung einer Matrix 2. Ordnung besteht darin, dass wir $z_1 = (B_1 + B_2 x)\, e^{-x}$, $z_2 = -2B_2\, e^{-x}$ nehmen. Hieraus erhält man $T = \begin{pmatrix} -1 & -\frac{1}{2} \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$. Damit sind aber auch alle Möglichkeiten erschöpft.

Hat die Minimalgleichung die mehrfachen Wurzeln von $|rE—B| = 0$ nur einfach, dann sind unendlich viele Lösungen vorhanden. Ein einfaches Beispiel liefert der Fall $X^2 - \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix} = 0$, mit $z_1 = A_1\, e^{\sqrt{a}x} + A_2\, e^{-\sqrt{a}x}$, $z_2 = B_1\, e^{\sqrt{a}x} + B_2\, e^{-\sqrt{a}x}$, woraus sich ergibt

$$T = \begin{pmatrix} \dfrac{\sqrt{a}\,(A_1 B_2 + A_2 B_1)}{A_1 B_2 — A_2 B_1} & -\dfrac{2\sqrt{a}\, A_1 A_2}{A_1 B_2 — A_2 B_1} \\ \dfrac{2\sqrt{a}\, B_1 B_2}{A_1 B_2 — A_2 B_1} & -\dfrac{\sqrt{a}\,(A_1 B_2 + A_2 B_1)}{A_1 B_2 — A_2 B_1} \end{pmatrix},$$

wobei A_1, A_2, B_1, B_2 beliebig gewählt werden können, wenn nur $A_1 B_2 - A_2 B_1 \neq 0$ ist. Schliesslich kann noch der Fall eintreten, dass die Min.gl. die mehrfachen Wurzeln der char. Gl. auch mehrfach, aber in kleinerer Vielfachheit hat. Es lassen sich entsprechende Betrachtungen wie oben anstellen.

Will man die unter b. angeführten Fälle durch (11) charakterisieren, dann entscheidet der Rang der Determinante $\left| \sum\limits_{\mu=1}^{\nu} a_{ik}^{(t)}\, \varrho_j^{\nu-\mu} - \varrho_j^{\nu} \right|$ über die Anzahl der Lösungen, wenn ϱ_j die oben angegebene Bedeutung hat. Wir wollen an dieser Stelle nicht weiter auf diese Formulierungen eingehen.