Mathematics. — *Sur la Dérivée Angulaire des Fonctions Univalentes.* Par CORNELIS VISSER. (Communicated by Prof. J. G. VAN DER CORPUT).

(Communicated at the meeting of March 30, 1935.)

Introduction.

L'objet du présent article est l'étude d'une question qui se rattache à un théorème de M. J. WOLFF. Soit la fonction $w(z)$ holomorphe et de partie réelle positive dans le demi-plan $D\,(x > 0)$ de la variable complexe $z = x + yi$. Le théorème de M. WOLFF dit que dans ces conditions la dérivée $w'(z)$ tend vers une constante λ, qui est nulle ou positive, lorsque $z \rightarrow \infty$ dans tout angle $|y| \leqq px$, p étant une constante positive arbitraire [1]).

Le nombre λ s'appelle *la dérivée angulaire* de $w(z)$ à l'infini.

Dans le cas d'une fonction $w(z)$ univalente, représentant D sur un domaine intérieur, l'inégalité $\lambda > 0$ exprime la conformité de la représentation à l'infini. Inversement on peut demander de chercher des conditions auxquelles doit satisfaire un domaine intérieur G de D, pour qu'il existe une fonction $w(z)$ représentant D conformément sur G et ayant une dérivée angulaire positive à l'infini.

Quelques conditions qui sont suffisantes sont connues [2]). Je me propose de déduire ici une condition qui est nécessaire et suffisante et qui permet de ramener le problème à celui des propriétés d'une représentation conforme en un point intérieur.

Pour éviter de renvoyer le lecteur à d'autres Mémoires, je démontrerai d'abord les propriétés dont je ferai usage.

§ 1.

Le Théorème de WOLFF.

Théorème. Soit la fonction

$$w(z) = w(x + yi) = u(z) + iv(z)$$

[1]) J. WOLFF, Comptes rendus, **183**, 1926, p. 500. Voir aussi:
C. CARATHÉODORY, Sitzungsberichte der Preuss. Ak. der Wiss., 1929, p. 39;
E. LANDAU et G. VALIRON, Journal of the London Math. Soc., Vol. IV, 1929, p. 15.

[2]) C. CARATHÉODORY, l. c. [1]).
G. VALIRON, Bulletin des Sc. math., 2e série, **53**, 1929, p. 70;
L. AHLFORS, Acta Soc. Scient. Fennicae, Nova Series A, 1, IX, 1930;
J. WOLFF, Comptes rendus, **191**, 1930, p. 921;
C. VISSER, Comptes rendus, **193**, 1931, p. 1388;
J. G. VAN DER CORPUT, Proc. Kon. Ak. van Wet., Amsterdam, **33**, 1932, p. 330.

(x, y, u et v réels) holomorphe dans le demi-plan $D\,(x > 0)$ et soit en tout point z de D

$$u(z) > 0.$$

Alors il existe un nombre λ, qui est positif ou nul, tel que pour tout $p > 0$

$$w'(z) \to \lambda$$

lorsque $z \to \infty$ dans l'angle $|y| \leqq p\,x$.

Démonstration. Soit $z_0 = x_0 + y_0\,i$ un point de D, $w(z_0) = w_0 = u_0 + v_0\,i$. Désignons par z_0^* et w_0^* les points symétriques de z_0 et w_0 par rapport à l'axe imaginaire.

La substitution

$$\zeta = \frac{z - z_0}{z - z_0^*}$$

transforme le demi-plan D biunivoquement le cercle unité $|\zeta| < 1$. En posant

$$\varphi(\zeta) = \frac{w(z(\zeta)) - w_0}{w(z(\zeta)) - w_0^*},$$

on obtient une fonction $\varphi(\zeta)$ qui est holomorphe dans le cercle unité $|\zeta| < 1$ et dont la valeur absolue est plus petite que 1, tandis que $\varphi(0) = 0$. On peut appliquer alors le lemme de SCHWARZ, qui donne

$$|\varphi(\zeta)| \leqq |\zeta|$$

et par conséquent

$$\left|\frac{w(z) - w_0}{w(z) - w_0^*}\right| \leqq \left|\frac{z - z_0}{z - z_0^*}\right| \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (1)$$

en tout point z de D. Si $z \neq z_0$, l'inégalité (1) peut exprimer sous la forme

$$\left|\frac{w(z) - w_0}{z - z_0}\right| \leqq \left|\frac{w(z) - w_0^*}{z - z_0^*}\right|$$

et en faisant $z \to z_0$ on obtient

$$|w'(z_0)| \leqq \frac{u_0}{x_0} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (2)$$

Comme

$$\frac{(u - u_0)^2 + (v - v_0)^2}{(u + u_0)^2 + (v - v_0)^2} \geqq \frac{(u - u_0)^2}{(u + u_0)^2},$$

il résulte de (1) que

$$\frac{u-u_0}{u+u_0} \leqq \left| \frac{z-z_0}{z-z_0^*} \right|,$$

donc

$$u \leqq \frac{|z-z_0^*| + |z-z_0|}{|z-z_0^*| - |z-z_0|}\, u_0$$

$$= \frac{(|z-z_0^*| + |z-z_0|)^2}{4\, x\, x_0}\, u_0$$

$$\leqq \frac{(x_0 + |z| + x_0 + |z|)^2}{4\, x\, x_0}\, u_0$$

$$= \frac{(x_0 + |z|)^2}{x} \frac{u_0}{x_0}$$

Supposons que z soit situé dans l'angle $|y| \leqq p\, x$, et soit en même temps $x \geqq x_0$. Alors on a

$$u \leqq \frac{(2|z|)^2}{x} \frac{u_0}{x_0} \leqq 4\,(1+p^2)\, x \frac{u_0}{x_0}$$

ou bien

$$\frac{u}{x} \leqq 4\,(1+p^2) \frac{u_0}{x_0}. \qquad (3)$$

Cela posé, désignons par λ la borne inférieure de $\frac{u}{x}$, lorsque z décrit le demi-plan D. λ est positif ou nul. Si en un point z de D $\lambda = \frac{u}{x}$, $w(z) \equiv \lambda z + c\, i$ (d'après le théorème du module maximum appliqué à la fonction $e^{-w(z)+\lambda z}$) et le théorème est évident. Ce cas écarté, la fonction $w(z) - \lambda z$ encore les conditions du théorème.

Soit ε un nombre positif arbitraire. Choisissons z_0 de façon que

$$\frac{u_0}{x_0} - \lambda < \varepsilon.$$

Si z est situé dans l'angle $|y| \leqq p x$, nons avons, lorsque $|z| > x_0$, d'après (3), appliqué à la fonction $w(z) - \lambda z$,

$$\frac{u}{x} - \lambda \leqq 4\,(1+p^2)\, \varepsilon.$$

Il en résulte

$$\frac{u}{x} \to \lambda,$$

lorsque $z \to \infty$ dans l' angle $|y| \leqq px$.

Appliquons enfin l' inégalité (2) à la fonction $w(z) - \lambda z$. On obtient

$$|w'(z) - \lambda| \leqq \frac{u}{x} - \lambda$$

et par là

$$w'(z) \to \lambda,$$

lorsque $z \to \infty$ dans l' angle $|y| \leqq px$. Ainsi le théorème est démontré.

Remarquons que l'on a encore comme conséquence

$$\frac{w(z)}{z} \to \lambda$$

lorsque $z \to \infty$ dans tout angle $|y| \geqq px$.

Le nombre λ s'appelle *la dérivée angulaire* de $w(z)$ à l' infini.

§ 2.

Le Critère de CARATHÉODORY.

La dérivée angulaire est positive ou nulle; tous les deux cas peuvent se présenter. On doit à M. CARATHÉODORY un critère qui est suffisant pour que λ soit supérieur ou égal à un nombre λ_0. Nous l' utiliserons sous la forme suivante [3]):

Théorème. Pour que la dérivée angulaire λ soit supérieure ou égale à λ_0, il suffit qu'il existe une suite de nombres z_n tels que

$$z_n \to \infty \quad , \quad w(z_n) \to \infty \text{ lorsque } n \to \infty, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (5)$$

tandis que

$$\frac{x_n}{|z_n|^2} \frac{|w(z_n)|^2}{u(z_n)} \geqq \lambda_0 \qquad (n = 1, 2, \ldots) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (6)$$

Démonstration. Appliquons (1) aux points z et z_n. En posant $w_n = w(z_n)$ et en désignant par w_n^* le point symétrique de w_n par rapport à l' axe imaginaire, on a

$$\left| \frac{w - w_n}{w - w_n^*} \right| \leqq \left| \frac{z - z_n}{z - z_n^*} \right|.$$

---

[3]) L. c. [1]).

Il s'ensuit que

$$\frac{|w-w_n^*|-|w-w_n|}{|w-w_n^*|+|w-w_n|} \geqq \frac{|z-z_n^*|-|z-z_n|}{|z-z_n^*|+|z-z_n|}$$

ou

$$\frac{4\,u\,u_n}{(|w-w_n^*|+|w-w_n|)^2} \geqq \frac{4\,x\,x_n}{(|z-z_n^*|+|z-z_n|)^2}.$$

Donc

$$\frac{u}{x} \geqq \frac{x_n}{u_n}\,\frac{(|w-w_n^*|+|w-w_n|)^2}{(|z-z_n^*|+|z-z_n|)^2}.$$

En faisant croître n indéfiniment, on obtient en vertu de (5) et (6)

$$\frac{u}{x} \geqq \lambda_0.$$

La dérivée angulaire étant la borne inférieure de $\frac{u}{x}$, il en résulte

$$\lambda \geqq \lambda_0.$$

§ 3.

Considérons un domaine simplement connexe $\triangle$, dont la frontière ne se réduit pas à un simple point. On sait, d'après la théorie générale de la représentation conforme, que pour tout point a de $\triangle$ il existe une fonction unique $\varphi(z)$, qui sera la représentation conforme de $\triangle$ sur un disque circulaire, ayant son centre à l'origine, de façon que

$$\varphi(a)=0 \quad , \quad \varphi'(a)=1.$$

Le rayon du disque circulaire, qui est une fonction de a, sera appelé *rayon conforme* du domaine $\triangle$ au point a. Nous le désignons par

$$k(\triangle\,,a).$$

Si la fonction $w(z)$ représente le domaine $\triangle$ conformément sur un domaine $\triangle'$, on voit sans peine que

$$|w'(z)| = \frac{k(\triangle'\,,w)}{k(\triangle\,,z)} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (7)$$

Cela posé, considérons un domaine simplement connexe G intérieur au demi-plan $D\,(x>0)$. Supposons que G contienne des angles d'ouverture aussi proche de π que l'on veuille. D'après la théorie des „Primenden" de M. CARATHÉODORY on peut faire la représentation conforme de D sur G par une fonction $w(z)$ de manière que $z \to \infty$ lorsque $w \to \infty$ dans un angle arbitraire d'ouverture plus petite que π et situé dans G.

Traçons dans un pareil angle, à partir d'un point c un chemin Γ, qui s'éloigne indéfiniment. Les points de Γ seront représentés par

$$w(s) = u(s) + iv(s),$$

où s est la longueur de l'arc cw. On a donc $w(s) \to \infty$ lorsque $s \to \infty$ et de plus le rapport $\frac{v(s)}{u(s)}$ reste borné.

Remarquons que l'on a aussi

$$z(w(s)) \to \infty \qquad (8)$$

lorsque $s \to \infty$.

D'après (7) on a en tout point w de G

$$|z'(w)| = \frac{k(D, z)}{k(G, w)},$$

donc sur Γ

$$\left|\frac{dz(w)}{ds}\right| = \frac{k(D, z)}{k(G, w)}.$$

Or

$$k(D, z) = 2x;$$

on a donc

$$\left|\frac{dz(w)}{ds}\right| = \frac{2x}{k(G, w)}.$$

Remarquons que

$$-\frac{d}{ds} R\left(\frac{1}{z(w)}\right) \leqq \left|\frac{d}{ds}\frac{1}{z(w)}\right|.$$

Il en résulte

$$\frac{2x}{|z|}\frac{d|z|}{ds} - \frac{dx}{ds} \leqq \left|\frac{d}{ds} z(w)\right|.$$

Donc

$$\frac{2}{|z|}\frac{d|z|}{ds} - \frac{1}{x}\frac{dx}{ds} \leqq \frac{2}{k(G, w)}.$$

En ajoutant aux deux membres de cette inégalité l'expression

$$-\frac{2}{|w|}\frac{d|w|}{ds} + \frac{1}{u}\frac{du}{ds},$$

on obtient

$$\frac{d}{ds}\log\left|\frac{z}{w}\right|^2\frac{u}{x}\leqq\frac{2}{k(G,w)}-\frac{2}{|w|}\frac{d|w|}{ds}+\frac{1}{u}\frac{du}{ds}.$$

Par là

$$\frac{d}{ds}\left(\log\left|\frac{z}{w}\right|^2\frac{u}{x}-\int_c^w\left(\frac{2}{k(G,w)}-\frac{2}{|w|}\frac{d|w|}{ds}+\frac{1}{u}\frac{du}{ds}\right)ds\right)\leqq 0.$$

Il en résulte que la fonction

$$\left|\frac{z}{w}\right|^2\frac{u}{x}\,e^{-\int_c^w\left(\frac{2}{k(G,w)}-\frac{2}{|w|}\frac{d|w|}{ds}+\frac{1}{u}\frac{du}{ds}\right)ds}$$

n'est jamais croissante. Elle tend donc vers une limite, qui est positive ou nulle, lorsque $w\to\infty$ sur Γ.

Supposons maintenant que l'intégrale

$$\int_c^w\left(\frac{2}{k(G,w)}-\frac{2}{|w|}\frac{d|w|}{ds}+\frac{1}{u}\frac{du}{ds}\right)ds \quad . \; . \; . \; . \quad (9)$$

reste bornée lorsque w s'éloigne indéfiniment sur Γ. Alors l'expression

$$\left|\frac{z}{w}\right|^2\frac{u}{x}$$

reste bornée lorsque w décrit le chemin Γ et en vertu de (8) il résulte du critère de M. CARATHÉODORY que la fonction $w(z)$ a une dérivée angulaire positive à l'infini.

Puisque

$$\int_c^w\left(\frac{2}{k(G,w)}-\frac{2}{|w|}\frac{d|w|}{ds}+\frac{1}{u}\frac{du}{ds}\right)ds$$

$$=2\int_c^w\left(\frac{1}{k(G,w)}-\frac{1}{2u}\frac{du}{ds}\right)ds+2\int_c^w\frac{1}{u}\frac{du}{ds}\,ds-2\int_c^w\frac{1}{|w|}\frac{d|w|}{ds}\,ds$$

$$=2\int_c^w\left(\frac{1}{k(G,w)}-\frac{1}{2u}\frac{du}{ds}\right)ds+2\left[\log\frac{u}{|w|}\right]_c^w$$

et que

$$\frac{1}{k(G, w)} \geqq \frac{1}{k(D, w)} = \frac{1}{2u},$$

la condition que (9) soit borné, revient au même que la condition que l'intégrale, prise suivant I,

$$\int_c^\infty \left(\frac{1}{k(G, w)} - \frac{1}{2u} \frac{du}{ds} \right) ds \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (10)$$

soit convergente.

Nous avons obtenu ainsi le résultat suivant: Soit G un domaine simplement connexe intérieur au demi-plan D. Pour qu'il existe une fonction représentant D conformément sur G *et ayant une dérivée angulaire positive à l'infini,* il suffit que d'abord G contienne des angles d'ouverture aussi proche de π que l'on veuille et qu'en outre il existe un chemin Γ, ayant les propriétés signalées plus haut, sur lequel l'intégrale (10) converge.

§ 4.

Je vais montrer que la condition qui vient d'être donnée est nécessaire. Considérons un domaine G intérieur à D et supposons qu'il existe une fonction

$$w(z) = u(z) + i\, v(z),$$

donnant la représentation conforme de D sur G de façon que

$$w'(z) \to \lambda \quad , \quad \lambda > 0,$$

lorsque $z \to \infty$ dans un angle arbitraire $|y| \leqq p\, x$.

D'abord il est clair que dans ces hypothèses G contient des angles d'ouverture arbitrairement voisine de π.

Considérons maintenant l'image du segment $1 \leqq x < \infty$ de l'axe réel. C'est évidemment une courbe Γ telle que nous l'avons considérée précédemment. Je montrerai que l'intégrale, prise suivant Γ,

$$\int_c^\infty \left(\frac{1}{k(G, w)} - \frac{1}{2u} \frac{du}{ds} \right) ds, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (11)$$

où $c = w(1)$, est convergente.

Or en tout point w de Γ

$$|z'(w)| = \frac{dx}{ds},$$

donc

$$\frac{dx}{ds} = \frac{k(D, x)}{k(G, w)} = \frac{2x}{k(G, w)}.$$

Par suite

$$\frac{d}{ds} \log \frac{x}{u} = 2\left(\frac{1}{k(G, w)} - \frac{1}{2u}\frac{du}{ds}\right),$$

donc

$$\log \frac{x}{u} = \text{const.} + 2\int_c^w \left(\frac{1}{k(G, w)} - \frac{1}{2u}\frac{du}{ds}\right) ds$$

Puisque

$$\frac{x}{u} \to \frac{1}{\lambda}$$

lorsque $w \to \infty$ sur Γ, il en résulte que l'intégrale (11) converge.

On a obtenu ainsi la proposition suivante:

Théorème. Soit G un domaine simplement connexe intérieur au demi-plan $D(x > 0)$ de la variable complexe $z = x + y\,i$. Une condition nécessaire et suffisante pour qu'il existe une fonction représentant D conformément sur G et ayant une dérivée angulaire positive à l'infini est que:

1°. *G contienne des angles d'ouverture arbitrairement voisine de π.*

2°. *Il existe dans G un chemin Γ ayant pour origine un point c de G et aboutissant à l'infini tel que le rapport $v : u$ reste borné sur Γ et que l'intégrale, prise suivant Γ,*

$$\int_c^\infty \left(\frac{1}{k(G, w)} - \frac{1}{2u}\frac{du}{ds}\right) ds$$

soit convergente.

§ 5.

Considérons les domaines G qui sont *symétriques par rapport à l' axe réel.* Alors on peut simplifier les conditions de notre théorème.

D' après le principe de la symétrie de SCHWARZ, on peut faire la représentation conforme de D sur un domaine simplement connexe G intérieur à D et symétrique par rapport à l' axe réel au moyen d' une fonction $w(z)$ qui est positive lorsque z est positif et qui est telle que $w(z) \to \infty$ lorsque $z \to \infty$ sur l' axe réel. En posant $z = x = yi$, $w = u + vi$, on a en tout point $u \geqq c$

$$\frac{dx}{du} = |z'(u)| = \frac{k(D, x)}{k(G, u)} = \frac{2x}{k(G, u)},$$

donc

$$\log \frac{x}{u} = const. + 2 \int_c^u \left(\frac{1}{k(G, u)} - \frac{1}{2u} \right) du$$

Si u croît indéfiniment, le rapport $\frac{u}{x}$ tend vers la dérivée angulaire de la fonction $w(z)$. On obtient donc le théorème suivant:

Théoréme. Soit G un domaine simplement connexe intérieur à D et symétrique par rapport à l' axe réel. Une condition nécessaire et suffisante pour qu'il existe une fonction représentant D conformément sur G et ayant une dérivée angulaire positive à l' infini est que l' intégrale

$$\int_c^\infty \left(\frac{1}{k(G, u)} - \frac{1}{2u} \right) du,$$

prise sur un segment $c \leqq u < \infty$ de l'axe réel intérieur à G, soit convergente.

Mathematics. — *Über die Ränderzuordnung bei konformen Abbildungen.* Von C. VISSER. (Communicated by Prof. J. G. VAN DER CORPUT.

(Communicated at the meeting of March 30, 1935.)

Vor einigen Jahren hat Herr W. SEIDEL eine Reihe von Sätzen über die Randverhältnisse bei konformen Abbildungen bewiesen [1]). Seine Hilfsmittel waren ziemlich kompliziert, und es ist darum vielleicht interessant, in einfacher Weise ein wichtiges Teilergebnis abzuleiten, und zwar folgendes:

Es sei G ein beschränktes, einfach zusammenhängendes Gebiet der komplexen Ebene. G werde berandet von einer Jordankurve Γ mit folgender Eigenschaft: Es gibt eine Zahl $\varrho > 0$, derart, dass, wenn p

[1]) W. SEIDEL, Über die Ränderzuordnung bei konformen Abbildungen; Math. Ann., **104**, 1931, S. 182.