

fonction $w(z)$ qui est positive lorsque z est positif et qui est telle que $w(z) \rightarrow \infty$ lorsque $z \rightarrow \infty$ sur l'axe réel. En posant $z = x + yi$, $w = u + vi$, on a en tout point $u \geq c$

$$\frac{dx}{du} = |z'(u)| = \frac{k(D, x)}{k(G, u)} = \frac{2x}{k(G, u)},$$

donc

$$\log \frac{x}{u} = \text{const.} + 2 \int_c^u \left(\frac{1}{k(G, u)} - \frac{1}{2u} \right) du$$

Si u croît indéfiniment, le rapport $\frac{u}{x}$ tend vers la dérivée angulaire de la fonction $w(z)$. On obtient donc le théorème suivant:

Théorème. Soit G un domaine simplement connexe intérieur à D et symétrique par rapport à l'axe réel. Une condition nécessaire et suffisante pour qu'il existe une fonction représentant D conformément sur G et ayant une dérivée angulaire positive à l'infini est que l'intégrale

$$\int_c^\infty \left(\frac{1}{k(G, u)} - \frac{1}{2u} \right) du,$$

prise sur un segment $c \leq u < \infty$ de l'axe réel intérieur à G , soit convergente.

Mathematics. — *Über die Ränderzuordnung bei konformen Abbildungen.* Von C. VISSER. (Communicated by Prof. J. G. VAN DER CORPUT.

(Communicated at the meeting of March 30, 1935.)

Vor einigen Jahren hat Herr W. SEIDEL eine Reihe von Sätzen über die Randverhältnisse bei konformen Abbildungen bewiesen¹⁾. Seine Hilfsmittel waren ziemlich kompliziert, und es ist darum vielleicht interessant, in einfacher Weise ein wichtiges Teilergebnis abzuleiten, und zwar folgendes:

Es sei G ein beschränktes, einfach zusammenhängendes Gebiet der komplexen Ebene. G werde berandet von einer Jordankurve Γ mit folgender Eigenschaft: Es gibt eine Zahl $\rho > 0$, derart, dass, wenn p

¹⁾ W. SEIDEL, Über die Ränderzuordnung bei konformen Abbildungen; Math. Ann., 104, 1931, S. 182.

ein beliebiger Punkt von Γ ist, es zwei einander in p berührende Kreise C_p und D_p vom Radius ρ gibt, so dass jeder Punkt des Inneren von C_p zu G gehört und kein Punkt des Inneren von D_p zu G gehört. Wird dann das Kreisinnere $|\zeta| < 1$ durch die Funktion $\omega(\zeta)$ schlicht auf G abgebildet, und wird, wie es nach CARATHÉODORY möglich ist, die Funktion $\omega(\zeta)$ auch stetig auf $|\zeta| = 1$ definiert, so besitzt die Funktion $\omega(\zeta)$ eine auf der ganzen abgeschlossenen Kreisscheibe $|\zeta| \leq 1$ stetige Derivierte.

Nach CARATHÉODORY existiert für jedes ζ_0 mit $|\zeta_0| = 1$ bei nicht tangentieller Annäherung $\zeta \rightarrow \zeta_0$ die Winkelderivierte $\mu(\zeta_0) = \lim \omega'(\zeta)$ und es ist $\mu(\zeta_0) \neq 0$ und $\neq \infty$. Offenbar braucht man zum Beweis des obigen Satzes nur die Stetigkeit von $\mu(\zeta)$ auf $|\zeta| = 1$ zu zeigen. Dazu verwende ich zwei Hilfssätze:

1. Es bilde die Funktion $w(z) = w(x + yi) = u + vi$ die Halbebene $D(x > 0)$ schlicht ab auf ein Teilgebiet H , das eine gewisse Halbebene $x > a \geq 0$ enthält. Es sei $z \rightarrow \infty$, wenn $u \rightarrow \infty$. Die (positive) Winkelderivierte von $w(z)$ im Punkte ∞ werde mit λ bezeichnet. Dann ist in der ganzen Halbebene D

$$0 \leq u(z) - \lambda x \leq a.$$

Es ist nämlich für jedes z von D

$$u(z) - \lambda x \geq 0. \quad 1)$$

Ist weiter $z(w)$ die zu $w(z)$ inverse Funktion, so besitzt $z(a + \zeta)$ in der Halbebene $\operatorname{Re} \zeta > 0$ einen positiven Realteil. Ausserdem hat $z(a + \zeta)$ die Winkelderivierte $\frac{1}{\lambda}$. Obige Ungleichung ergibt daher bei Anwendung auf $z(a + \zeta)$

$$x - \frac{1}{\lambda}(u - a) \geq 0,$$

also

$$u - \lambda x \leq a$$

für jedes $u > a$. Schliesslich ist dies trivial für $u \leq a$.

2. Es sei $u_n(z) = u_n(x + yi)$ harmonisch für $x > 0$, stetig für $x \geq 0$, $|u_n(z)| < M$ ($n = 1, 2, \dots$). Es sei ferner

$$\lim_{n \rightarrow \infty} u_n(yi) = 0$$

1) J. WOLFF, Comptes rendus, 183, 1926, S. 500.

für jedes reelle y . Dann ist

$$\lim_{n \rightarrow \infty} u_n(z) = 0$$

für jedes z mit $x > 0$.

Man beweist dies z.B. mit Hilfe des POISSONSchen Integrals.

Ich beweise jetzt den oben formulierten Satz. Zuerst sei bemerkt, dass aus den Voraussetzungen hervorgeht, dass Γ eine *stetige Tangente* besitzt. Ich betrachte auf Γ einen Punkt p und eine Folge $p_n \rightarrow p$. Es sei

$$q = \zeta(p), \quad q_n = \zeta(p_n), \quad \mu = \mu(q), \quad \mu_n = \mu(q_n).$$

Bei passender Wahl von b, θ und θ_n (b positiv, $|\theta| = |\theta_n| = 1$) bilden die Funktionen

$$\frac{\theta}{\omega - p} + b \quad \text{bzw.} \quad \frac{\theta_n}{\omega - p_n} + b$$

das Äussere von D_p bzw. das Äussere von D_{p_n} schlicht ab auf die Halbebene D ($x > 0$). Es ist dann $\theta_n \rightarrow \theta$ für $n \rightarrow \infty$.

Ich setze $z = x + yi$ und definiere für $x > 0$ die Funktion $w(z) = u + vi$ durch

$$z = \frac{q + \zeta}{q - \zeta}, \quad w = \frac{\theta}{\omega(\zeta) - p} + b$$

und die Funktion $w_n(z) = u_n + v_n i$ ($n = 1, 2, \dots$) durch

$$z = \frac{q_n + \zeta}{q_n - \zeta}, \quad w_n = \frac{\theta_n}{\omega(\zeta) - p_n} + b.$$

Diese Funktionen bilden alle D ($x > 0$) schlicht ab auf Teilgebiete, welche eine Halbebene $x > a$ enthalten. Dabei ist a eine von ϱ abhängige Zahl. Ferner ist $w_n \rightarrow w$ wenn $n \rightarrow \infty$, für jedes z mit $x \geq 0$.

Die Funktionen w, w_n haben im Punkt ∞ positive Winkelderivierten λ, λ_n und es ist

$$\lambda = -\frac{\theta}{2q\mu}, \quad \lambda_n = -\frac{\theta_n}{2q_n\mu_n}.$$

Wegen $q_n \rightarrow q$, wird $\mu_n \rightarrow \mu$ folgen aus $\lambda_n \rightarrow \lambda$. Um dies zu beweisen, bemerke ich, dass nach dem ersten Hilfssatz

$$0 \leq u - \lambda x \leq a, \quad 0 \leq u_n - \lambda_n x \leq a.$$

also

$$|(u_n - \lambda_n x) - (u - \lambda x)| \leq a$$

für jedes $x \equiv 0$. Daraus folgt, dass die Funktionen

$$(u_n - \lambda_n x) - (u - \lambda x) \quad (n = 1, 2, \dots)$$

den Voraussetzungen des zweiten Hilfssatzes genügen.

Also ist

$$(u_n(1) - \lambda_n) - (u(1) - \lambda) \rightarrow 0 \quad \text{für } n \rightarrow \infty$$

und wegen

$$u_n(1) \rightarrow u(1) \quad \text{für } n \rightarrow \infty,$$

ist daher

$$\lambda_n \rightarrow \lambda \quad \text{für } n \rightarrow \infty.$$

Damit ist der Satz bewiesen.

Mathematics. — *Die R_n -adische Entwicklung von Räumen und Gruppen.* By HANS FREUDENTHAL. (Communicated by Prof. L. E. J. BROUWER).

(Communicated at the meeting of March 30, 1935.)

Eine Folge topologischer Räume R_n , von denen jeder auf den vorangehenden stetig abgebildet ist, $R_n = f_n^{n+1}(R_{n+1})$, definiert in folgender Weise einen „Limesraum“ R : „Punkte“ des Limesraumes R sind die Punktfolgen a_1, a_2, \dots mit $a_n \in R_n$, für die jeweils a_n das Bild von a_{n+1} bei den vorliegenden Abbildungen ist, $a_n = f_n^{n+1}(a_{n+1})$. Ist a_1, a_2, \dots ein solcher „Punkt“ von R , so nennen wir a_n seine n -te Koordinate. R wird topologisiert durch die Festsetzung: Ist U_n eine Umgebung in R_n , so heisst die Gesamtheit der Punkte von R , deren n -te Koordinate in U_n fällt, eine Umgebung in R . Wir sprechen dann von einer *R_n -adischen Entwicklung* des Raumes R .¹⁾ Der Konvergenzbegriff in R fällt dann mit dem Begriff der koordinatenweisen Konvergenz zusammen. Sind die R_n metrisierbar bzw. separabel bzw. kompakt, so ist auch R metrisierbar bzw. separabel bzw. kompakt.

¹⁾ Zusatz bei der Korrektur: Von Herrn P. ALEXANDROFF erfahre ich, dass ihm der Begriff der R_n -adischen Erzeugung bekannt ist; ich verweise auf eine demnächst erscheinende Note von ihm (Comptes Rendus).