reach that range, in which the catalytic action is independent of the quantity of catalysing metal.

In the corrosion investigation (see publ. II) the authors have found subsequently that after about 100 hours copper is no more attacked due to the formation of a protecting film. By this fact it is not excluded that under certain circumstances there can be a heterogeneous catalysis also, viz. if the protecting film is not yet built up or is disturbed by external causes. This will be a subject of further investigation.

The authors wish to thank the International Tin Research and Development Council for permission to publish this work, and for the grant which enabled this work to be carried out. Many thanks are also due to Prof. Dr. L. S. ORNSTEIN for his stimulating interest and to Dr. C. JANSSEN CZN. and Drs. C. KRIJGSMAN for many discussions about the subject.

Physical Laboratory University of Utrecht.

Mathematics. — *Zur Konformgeometrie.* III. *Anwendung auf die Kurventheorie.* Von V. HLAVATÝ. (Communicated by Prof. J. A. SCHOUTEN).

(Communicated at the meeting of September 28, 1935).

In dieser Arbeit werden wir die Konforminvarianten einer Kurve $C(t)$ untersuchen. Dabei benützen wir die Ergebnisse der beiden vorangehenden Arbeiten [1]).

1. Es sei eine Kurve $C(t)$ durch ihre Gleichungen $x^\nu = x^\nu(t)$ in einer K_n gegeben [2]). Diese K_n kann zu einer $\overset{\circ}{W}_n$ gemacht werden, in der die Tensordichte $\mathfrak{g}_{\lambda\mu}$ kovariant konstant ist

$$\nabla_\omega \mathfrak{g}_{\lambda\mu} = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1,1)$$

(Vergl. K I). Ausgehend von dem Tangentialvektor dx^ν kann man längs C die eichinvariante Einheitsvektordichte (vom Gewicht $1/n$)

$$\underset{1}{\mathfrak{i}}^\nu = \mathfrak{i}^\nu = \frac{dx^\nu}{\sqrt{|\mathfrak{g}_{\lambda\mu}\, dx^\lambda\, dx^\mu|}} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1,2)$$

---

1) V. HLAVATÝ, „Zur Konformgeometrie" I (Proc. Vol. 38, p. 281), weitert zitiert als K I und V. HLAVATÝ, „Zur Konformgeometrie" II (Proc. Vol. 38, p. 738) weiter zitiert als K II.

2) Nach K I sind die aus $\mathfrak{g}_{\lambda\mu}$ entspringenden quadratischen Formen definit.

konstruieren. Dank der Gleichung (1,1) kann man mit den Begriffen $\mathfrak{g}_{\lambda\mu}$, $\mathfrak{i}^\nu$, $\mathfrak{i}^\mu \nabla_\mu$ genau so verfahren, wie mit den analogen Begriffen in dem metrischen Falle [3]). Man bekommt dann die FRENETschen Formeln

$$\mathfrak{i}^\mu \nabla_\mu \underset{a}{\mathfrak{i}^\nu} = - \underset{a-1}{\mathfrak{k}} \underset{a-1}{\mathfrak{i}^\nu} + \underset{a}{\mathfrak{k}} \underset{a+1}{\mathfrak{i}^\nu}, \quad \ldots\ldots \quad (1,3)$$

$$(a = 1, \ldots, m \ , \ \underset{0}{\mathfrak{k}} = \underset{m}{\mathfrak{k}} = 0 \ , \ 1 \leqslant m \leqslant n).$$

Die eichinvarianten Einheitsvektordichten $\underset{2}{\mathfrak{i}^\nu}, \ldots, \underset{m}{\mathfrak{i}^\nu}$ bestimmen die Richtungen der ersten, ..., $(m-1)$-ten Normale der Kurve, während die eichinvarianten skalaren Dichten $\underset{1}{\mathfrak{k}}, \ldots, \underset{m-1}{\mathfrak{k}}$ als Krümmungen der Kurve betrachtet werden können. Von den eichinvarianten Einheitsvektordichten $\underset{a}{\mathfrak{i}^\nu}$, $(a = 1, \ldots, m)$ kann man zu den Einheitsvektoren

$$\underset{a}{i^\nu} = \underset{a}{\mathfrak{i}^\nu}\, \mathfrak{g}^{-\frac{1}{2n}} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (1,4)$$

übergehen, die sämtlich derselben Klasse $-1/2$ sind ($\mathfrak{g}$ ist dabei der absolute Wert der Determinante von $g_{\lambda\mu}$).

2. Man kann auch die Methode mit dem Operatorkern $\triangle_\mu$ benützen, da auch

$$\triangle_\mu g_{\lambda\nu} = 0 \quad \ldots\ldots\ldots \quad (2,1)$$

ist. (Vergl. K I). Dazu ist nötig von dem Einheitsvektor der Klasse $-1/2$ auszugehen

$$\underset{1}{i^\nu} = i^\nu = \frac{dx^\nu}{\sqrt{|g_{\lambda\mu}\, dx^\lambda\, dx^\mu|}}.$$

Die Anwendung des Operators $\frac{dx^\mu}{dt} \triangle_\mu$ auf $\underset{1}{i^\nu}$ und auf die Vektoren, die daraus entspringen, ergibt uns

$$\frac{dx^\mu}{dt} \triangle_\mu \underset{a}{i^\nu} = - \underset{a-1}{k} \underset{a-1}{i^\nu} + \underset{a}{k} \underset{a+1}{i^\nu} \quad \ldots\ldots \quad (2,2)$$

$$(a = 1, \ldots, m \ , \ \underset{0}{k} = \underset{m}{k} = 0 \ , \ 1 \leqslant m \leqslant n).$$

Die eichinvarianten Skalare k sind mit den früher betrachteten Dichten $\mathfrak{k}$ eng verbunden, während die Vektoren $\underset{a}{i^\nu}$ der Gleichung (1,4) genügen.

---

[3]) Vergl. z.B. D. J. STRUIK, „Grundzüge der mehrdimensionalen Differentialgeometrie ..“ (Springer, Berlin, 1922, S. 76).

Um dies einzusehen, gehen wir von der offenbar gültigen Gleichung

$$\underset{1}{\mathfrak{i}}^{\nu} = \underset{1}{i}^{\nu}\, \mathfrak{g}^{\frac{1}{2n}}$$

aus und berechnen das Resultat der Anwendung von $\mathfrak{i}^{\mu} \nabla_{\mu}$ auf $\underset{1}{\mathfrak{i}}^{\nu}$. Es zeigt sich dass

$$\mathfrak{i}^{\mu} \nabla_{\mu} \underset{1}{\mathfrak{i}}^{\nu} = \mathfrak{g}^{1/n} \left(i^{\mu} \nabla_{\mu} \underset{1}{i}^{\nu} - \tfrac{1}{2} Q_{\mu}\, i^{\mu} \underset{1}{i}^{\nu}\right) \quad . \; . \; . \; . \; . \quad (2{,}3)$$

ist. Anderseits ist

$$i^{\mu} \triangle_{\mu} \underset{1}{i}^{\nu} = i^{\mu} \nabla_{\mu} \underset{1}{i}^{\nu} - \tfrac{1}{2} Q_{\mu}\, i^{\mu} \underset{1}{i}^{\nu}, \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (2{,}4)$$

weil der Einheitsvektor $\underset{1}{i}^{\nu}$ von der Klasse $-{}^{1}/_{2}$ ist. Der Vergleich von (2,3) und (2,4) lehrt

$$i^{\mu} \triangle_{\mu} \underset{1}{i}^{\nu} = \mathfrak{g}^{-1/n} \left(\mathfrak{i}^{\mu} \nabla_{\mu} \underset{1}{\mathfrak{i}}^{\nu}\right). \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (2{,}5)$$

Geht man in diese Formel mit dem Wert

$$i^{\nu} = \frac{v^{\nu}}{v} \quad , \quad v = \sqrt{|\, g_{\lambda\mu}\, v^{\lambda}\, v^{\mu} \,|}$$

ein (wo der Kürze halber $v^{\nu} = \dfrac{dx^{\nu}}{dt}$ gesetzt wurde), so gibt uns der Vergleich von (1,3) und (2,2) erstens

$$\underset{2}{\mathfrak{i}}^{\nu} = \underset{2}{i}^{\nu}\, \mathfrak{g}^{\frac{1}{2n}}$$

und zweitens

$$\underset{1}{k} = v\, \underset{1}{\mathfrak{k}}\, \mathfrak{g}^{-\frac{1}{2n}}.$$

Ganz analog beweist man die Gültigkeit der Formel (1,4) für alle in (2,2) auftretenden Vektoren und ausserdem

$$\underset{b}{k} = v\, \underset{b}{\mathfrak{k}}\, \mathfrak{g}^{-\frac{1}{2n}} \qquad (b = 1, \ldots, m-1) \qquad (2{,}6)$$

3. Geht man nun von einem anderen Parameter $'t$ aus, so gibt uns das oben angeführte Verfahren (jetzt aber mit dem Operator $\dfrac{dx^{\mu}}{d't} \triangle_{\mu}$) die zu (2,2) analogen Formeln mit den akzentuierten Grössen. Eine leichte Überlegung zeigt, dass für die Bestimmungszahlen der Vektoren i^{ν}, $'i^{\nu}$ und für die Skalare k, $'k$ folgende Gleichung gilt:

$$\left|\, '\underset{a}{i}^{\nu} \right| = \left| \underset{a}{i}^{\nu} \right| , \left|\, '\underset{b}{k}\, d't \right| = \left| \underset{b}{k}\, dt \right| , \quad (a = 1, \ldots, m, \; b = 1, \ldots, m-1).$$

Zusammenfassend können wir also sagen:

Zu jeder Kurve in K_n kann man immer $m-1$ eichinvariante Normalrichtungen[4]), sowie auch $m-1$ eichinvariante Skalare

$$\left| \int_b k \, dt \right| \qquad (b = 1, \ldots, m-1)$$

angeben $(1 \leqslant m \leqslant n)$. Beide Begriffe sind auch gegenüber beliebiger Parametertransformation invariant.

Offenbar sind diese Begriffe von derselben Ordnung in bezug auf die Ableitungen von x nach t, wie im metrischen Falle.

4. Bis jetzt haben wir den Begriff des „Bogens" im Sinne eines ausgezeichneten Parameters überhaupt nicht verwendet. Es lässt sich aber zeigen, dass auch in diesem Falle unter allen zulässigen Parametern mindestens einer sich konforminvariant auszeichnen lässt. Zu diesem Zwecke schicken wir folgendes voraus: Der aus den Vektoren

$$i^\nu \,, \; \left(\frac{dx^\mu}{dt} \triangle_\mu \right)^b i^\nu \qquad (b = 1, \ldots, m-1)$$

konstruierte einfache m-Vektor, der von der Klasse $-m/2$ ist, bestimmt eindeutig (bis auf das Vorzeichen) einen einfachen kontravarianten $(n-m)$-Vektor, der zu dem ursprünglichen orthogonal ist und die Klasse $-(n-m)/2$ besitzt. Beide Multivektoren bestimmen (bis auf das Vorzeichen) einen n-Vektor, der die Klasse $-n/2$ hat. Die dazugehörige Dichte vom Gewicht -1 bezeichnen wir mit $\mathfrak{w}$. Geht man nun von einem anderen Parameter $'t$ aus, so gibt uns dasselbe Verfahren die entsprechende Dichte $'\mathfrak{w}$. Eine leichte Rechnung zeigt, dass beide Dichten mittels

$$\mathfrak{w} = \varepsilon \left(\frac{d\,'t}{dt} \right)^{\frac{m(m-1)}{2}} {}'\mathfrak{w} \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (4,1)$$

gebunden sind. ε ist dabei $+1$, oder -1, je nachdem, ob man in beiden Konstruktionen die selben oder entgegengesetzte Vorzeichen des $(n-m)$-Vektors nimmt. — Die Formel (4,1) gestattet uns den eichinvarianten „Bogen" $'t$ zu definieren. Für diesen verlangen wir nämlich

$$'\mathfrak{w}^2 = \frac{1}{\mathfrak{g}}, \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (4,2)$$

was eine invariante und zugleich eichinvariante Forderung darstellt. Nach (4,1) und (4,2) ist dieser Bogen mittels

$$'t = \int_{t_1}^{t_2} (\mathfrak{w}^2 \, \mathfrak{g})^{\frac{1}{m(m-1)}} \, dt \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (4,3)$$

[4]) Auf die eventuelle Umorientierung dieser Richtungen gehen wir nicht näher ein.

gegeben. Dieser Bogen ist nicht nur von der Wahl des früher erwähnten $(n-m)$-Vektors unabhängig, sondern ist auch eichinvariant. Gegenüber dem metrischen Bogen ist er aber von einer zu hohen Ordnung in bezug auf die Ableitungen von x nach t, nämlich von der Ordnung m. Im Weiteren machen wir von diesem Bogen keinen Gebrauch mehr.

5. Zum Schluss wollen wir zeigen, wie die übliche geometrische Interpretation der Krümmungen einer Kurve in R_n auch hier ein Analogon hat. Zu diesem Zwecke betrachten wir längs der Kurve C ein Einheitsvektorfeld, das von der Lösung des Systems

$$\frac{dx^\mu}{dt} \triangle_\mu j^\nu = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (5,1)$$

mit den Anfangsbedingungen $(j^\nu)_{t=0} = (\underset{a}{i}^\nu)_{t=0}$ gebildet wird. [5]) Dann führen wir den Winkel $\underset{a}{\alpha}$ mittels der Gleichung

$$\cos \underset{a}{\alpha} = g_{\lambda\mu} j^\lambda \underset{a}{i}^\mu$$

ein. Weil diese Gleichung eine skalare Gleichung ist, deren jedes Glied die Klasse 0 hat, so ist nach (5,1)

$$\frac{d^p \cos \underset{a}{\alpha}}{dt^p} = g_{\lambda\mu} j^\lambda \left(\frac{dx^\rho}{dt} \triangle_\rho\right)^p \underset{a}{i}^\mu \quad , \quad (p = 1, 2, \ldots) \quad . \quad . \quad . \quad (5,2)$$

Für die Entwickelung von $\cos \alpha$ in der Nähe von $t = 0$ bekommen wir also nach (2,2) und (5,2)

$$\cos \underset{p}{\alpha} = 1 - \frac{t^2}{2!} (\underset{a-1}{k^2} + \underset{a}{k^2})_{t=0} + \ldots . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (5,3)$$

Hier sind die ausgelassenen Glieder mindestens dritter Grössenordnung in bezug auf t. Aus dieser Gleichung folgt

$$\lim_{t \to 0} \frac{\underset{p}{\alpha^2}}{t^2} = (\underset{a-1}{k^2} + \underset{a}{k^2})_{t=0} , \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (5,4)$$

also eine Formel, die ganz analog der entsprechenden Formel in R_n ist, und neuerdings auch für V_n vom H. LEVY berechnet wurde. [6])

---

[5]) Wenn v^ν, von der Klasse 0, eine Lösung von

$$\frac{dx^\mu}{dt} \nabla_\mu v^\nu = \lambda v^\nu$$

darstellt, so zeigt eine leichte Rechnung, dass $j^\nu = \dfrac{v^\nu}{\sqrt{|g_{\lambda\mu} v^\lambda v^\mu|}}$ der Gleichung (5,1) genügt.

[6]) H. LEVY, „Curvatures in RIEMANNian space". Bull. Amer. Math. Soc. **40**, S. 75—78, (1934). Wir haben oben eine andere, allgemein verwendbare Methode benützt.

6. Die hier auseinandergesetzte eichinvariante Behandlung der Kurven hat nur dann einen Sinn, wenn diese Kurven sich in einer, mit konform veränderlichen Metrik ausgestatteten, V_n befinden, welche zu einer $\overset{o}{W}_n$ gemacht werden kann. (Vergl. K I.) Diese $\overset{o}{W}_n$ unterscheidet sich von einer W_n (d.i. von einer n-dimensionalen Mannigfaltigkeit, die eine WEYL'sche Konnexion trägt) nur dadurch, dass der Vektor Q_α in $\overset{o}{W}_n$ ein Gradientvektor ist, während dies in einer W_n nicht der Fall ist. Wir haben aber n i r g e n d s diese Eigenschaft der $\overset{o}{W}_n$ benützt, so dass unsere Betrachtungen Wort für Wort auf die Kurventheorie in einer W_n übertragbar sind, und zwar diesmal ohne jede Einschränkung, bezüglich der Struktur der Konnexion:

Die hier angegebene Behandlung gilt wörtlich auch für Kurven in einer beliebigen W_n.

Prag, Oktober, 1934.

Chemistry. — *On the Crystal-Structure of Cerium tungstate.* By J. BEINTEMA. (Communicated by Prof. F. M. JAEGER).

(Communicated at the meeting of October 26, 1935).

§ 1. ZAMBONINI [1]) in a series of investigations first drew attention to the fact that the alcaline earth-metals as well as lead can isomorphously be substituted in their compounds by the rare earth-metals. From his results he concluded that *three* atoms of the metals *Ca*, *Sr*, *Ba* or *Pb* in their compounds can be substituted by *two* atoms of the rare earth-metals. The consequence of this is that in the crystalline structure a number of unoccupied positions must occur. If a relatively small percentage of the rare earth-metal is present in the mixed crystals, it may be assumed that the stability of the grating remains sufficiently great, so as to preserve the original crystal-structure, notwithstanding the perturbations which necessarily must be the consequence of the fact mentioned. But in some cases of this kind the existence of an uninterrupted mixing-series from 0 — 100 % was actually proved by the experiments. Such a case occurs, for instance, in the binary system: $PbWO_4 — Ce_2(WO_4)_3$: the most probable supposition to be made in this case would be to assume for pure *cero-tungstate* a crystalline structure completely isomorphous with that of *scheelite*. If this were true, only two thirds of the positions occupied by the cations would be substituted, while the remaining places would be void of substitutes. In the case of these greater concentrations these

---

[1]) J. F. ZAMBONINI, Bull. soc. franç. min. **38**, 206 (1915).