CHRISTOPHERS, R., c.s., Courte instruction pour la détermination des variétés d'Anopheles maculipennis. Bull. Trimestr. Org. d'Hyg. Soc. d. Nations III, 1935, N⁰. 20.

COLLIER, W. A., Allgemeine Methoden des zoologisch systematischen Arbeitens; die Nomenklatur. Handb. d. Biol. Arbeitsmethoden, **9**, 1924, T. **1**, H. **4**, Lief. **144**, p. 590.

CORRADETTI, A., Richerche sugli incroci tra le varieta di Anopheles maculipennis. Riv. di Malariol. **13**, 1934, p. 707.

DIEMER, J. H., Over biotypen van Anopheles maculipennis Meigen, in het bijzonder in Westelijk Nederland, een taxonomisch onderzoek. Thesis, Leiden 1935.

DIEMER, J. H. and VAN THIEL, P. H., Investigations on the racial purity of Anopheles maculipennis atroparvus and messeae in the Netherlands. To be published in the Acta Leidensia X.

FALLERONI, D., Fauna anofelica italiana e suo habitat. Riv. di Malariol. **5**, 1926, fasc. 5—6.

——— Zooprofilassi e sua applicazione in Ardea, Roma, 1932.

GATER, B. A. R., Aids to the identification of Anopheline larvae in Malaya, Singapore, 1934.

HACKETT, L. W., The present status of our knowledge of the subspecies of Anopheles maculipennis. Transact. Roy. Soc. Trop. Med. and Hyg. **28**, 1934, p. 109.

MARTINI, E., MISSIROLI, A. and HACKETT, L. W., Versuche zum Rassenproblem des Anopheles maculipennis. Arch. f. Sch. u. Tropenhyg. **35**, 1931, p. 622.

MISSIROLI, A., HACKETT, L. W. e MARTINI, E., Le razze di Anopheles maculipennis e la loro importanza nella distribuzione della malaria in alcune regioni d'Europa. Riv. di Malariol. **12**, 1933, N⁰. 1.

ROUBAUD, E., Un type racial nouveau de l'Anopheles maculipennis. Bull. Soc. Path. Exot. **27**, 1934, p. 737.

——— Variété nouvelle de l'Anopheles maculipennis au Maroc. Bull. Soc. Path. Exot. **28**, 1935, p. 107.

VAN THIEL, P. H., Sur l'origine des variations de taille de l'Anopheles maculipennis. Bull. Soc. Path. Exot. **20**, 1927, p. 366.

——— Investigations on the range and differentiation of Anopheles maculipennis races and their bearing on the existence or the absence of malaria in Italy. Riv. di Malariol. **12**, 1933, N⁰. 2.

——— Insuffisance des caractères de l'oeuf pour la distinction des races trophiques et biologiques de l'Anopheles maculipennis ? Bull. Soc. Path. Exot. **27**, 1934, p. 154.

Mathematics. — *Beiträge zur Topologie der Deformationen.* III. *Klassen und Homologietypen von Abbildungen* [1]). Von Dr. W. HUREWICZ. (Communicated by Prof. L. E. J. BROUWER).

(Communicated at the meeting of December 21, 1935).

Die Ergebnisse der vorigen Mitteilung bilden eine Grundlage für weitere Untersuchungen über die Beziehungen zwischen den Homologie- und den Homotopieeigenschaften von Räumen und Abbildungen.

Die stetigen Abbildungen eines Raumes X in einen anderen Raum Y

---

1) Die ersten zwei Noten dieser Serie (im Folgenden als D I und D II zitiert) finden sich in diesen Proceedings **38**, S. 112 u. 521. Ausführliche Darstellung erscheint später in den Ann. of Math.

lassen sich, wie dies besonders von H. HOPF hervorgehoben wurde, nach zwei grundsätzlich verschiedenen Gesichtspunkten klassifizieren: Erstens hat man die Einteilung der Abbildungen in die BROUWERschen *Klassen* von einander homotopen Abbildungen und zweitens die Einteilung nach den *Homologietypen* [2]) (vgl. die Definition unten). Abbildungen derselben Klasse haben immer denselben Homologietypus. Die umgekehrte Aussage ist nur in *gewissen Fällen* richtig, z.B. in dem von HOPF untersuchten Fall der Abbildungen eines n-dimensionalen Polyeders in die n-dimensionale Sphäre S_n [3]). Einen anderen Fall dieser Art haben wir in der vorigen Mitteilung kennen gelernt. Wir betrachteten dort lokal zusammenziehbare Räume Y, deren Homotopiegruppen bis zu einem bestimmten Index $n-1$ ($n \geqq 2$) leer sind, und haben gezeigt, dass unter dieser Voraussetzung die n-te Homotopiegruppe $\pi_n(Y)$ mit der n-ten Homologiegruppe $\beta_n(Y)$ übereinstimmt [4]). (Diesen grundlegenden Satz werden wir im folgenden kurz als *Aequivalenzsatz* bezeichnen). In anderer Formulierung besagt diese Behauptung, dass für die *Abbildungen der* S_n *in* Y, analog wie im HOPFschen Fall, die Einteilung in Klassen mit der Einteilung nach den Homologietypen übereinstimmt [5]).

Wir werden sehen, dass es sich in den beiden erwähnten Fällen um Spezialaussagen eines viel allgemeineren Theorems handelt. Der Formulierung dieses Theorems schicken wir einige vorbereitende Betrachtungen über Homologietypen der Abbildungen voraus.

1. Sei X ein topologischer kompakter Raum und $\mathfrak{A}$ eine abelsche Gruppe [5a]). Mit $\beta_n(X, \mathfrak{A})$ bezeichnen wir die in bekannter Weise definierte n-dimensionale Homologiegruppe von X *in bezug auf* $\mathfrak{A}$ *als Koeffizientenbereich* [6]). Die folgenden Gruppen werden am meisten als Koeffizientenbereiche verwendet: die additive Gruppe $\mathfrak{Z}_0$ der ganzen Zahlen, die additive Gruppe $\mathfrak{Z}_m$ der ganzzahligen Restklassen modulo m ($m = 2, 3, \dots$) und schliesslich die Gruppe $\mathfrak{R}_1$ der Kreisdrehungen (die additive Gruppe der Restklassen reeller Zahlen modulo 1).

---

[2]) HOPF spricht von „algebraischen Typus". Vgl. Comm. Math. Helv. **4**, S. 39. Letzten Endes geht dieser Begriff auf den des BROUWERschen Abbildungsgrades zurück.

[3]) Vgl. H. HOPF, a.a.O. Das HOPFsche Ergebnis war bisher das allgemeinste Resultat in dieser Richtung, und es wurde von HOPF sogar bezweifelt, ob eine wesentliche Verallgemeinerung möglich ist. Vgl. die eben zitierte Abhandlung, S. 43.

[4]) Vgl. D II, Satz I. Bemerken wir, dass der Satz und der Beweis seine Gültigkeit behält, wenn man die Voraussetzung, Y sei lokal zusammenziehbar, durch die schwächere Annahme ersetzt, Y sei *lokal zusammenhängend* bis zur Ordnung n im LEFSCHETZschen Sinn (dies bedeutet, dass es zu jedem Punkt p von Y und zu jeder Umgebung U von p eine Umgebung V von p gibt, so dass jedes in V liegende stetige Bild der m-Sphäre ($m = 0, 1, \dots n$) zusammenziehbar ist in U (vgl. S. LEFSCHETZ, Ann. of Math. **35**. S. 119).

[5]) Genauer: Die Klasse einer Abbildung $f \varepsilon Y^{S_n}$ wird durch den von f bewirkten Homomorphismus der Gruppe $\beta_n(S_n)$ in die Gruppe $\beta_n(Y)$ bestimmt, und es entspricht umgekehrt jedem Homomorphismus von $\beta_n(S_n)$ in $\beta_n(Y)$ eine stetige Abbildung von S_n in Y, die diesen Homomorphismus bewirkt.

Statt $\beta_n(X, \mathfrak{Z}_0)$ schreiben wir wie bisher $\beta_n(X)$. Betrachten wir mit VIETORIS [6a]) $\beta_n(X)$ als eine *topologische* Gruppe. Diejenigen ihrer Elemente c, deren Vielfache $m \cdot c$ (wo m ganzzahlig und $\neq 0$) *in jeder Umgebung der Null* vorkommen, bilden eine *Untergruppe* von $\beta_n(X)$; sie heisst *die n-te Torsionsgruppe* von X [7]) und wird im folgenden mit $\tau_n(X)$ bezeichnet. $\tau_n(X)$ enthält insbesondre alle Elemente *endlicher Ordnung* von $\beta_n(X)$. Falls X *n-dimensional* ist, besteht $\tau_n(X)$, wie man leicht zeigt, *nur aus der Null.*

Sei Y ein zweiter kompakter Raum. Jede stetige Abbildung f von X in Y bewirkt eine homomorphe Abbildung der Gruppe $\beta_n(X, \mathfrak{A})$ in die Gruppe $\beta_n(Y, \mathfrak{A})$; die letztere Abbildung bezeichnen wir mit $H^n_{f, \mathfrak{A}}$.

Definition. Die Abbildungen f und g ($f \varepsilon Y^X$, $g \varepsilon Y^X$) haben *denselben Homologietypus in der Dimension n,* wenn für jede abelsche Gruppe $\mathfrak{A}$ die Homomorphismen $H^n_{f, \mathfrak{A}}$ und $H^n_{g, \mathfrak{A}}$ übereinstimmen.

Satz 1.1. *Für je zwei Abbildungen f und g aus Y^X sind die folgenden Aussagen äquivalent:*

(*a*) *f und g haben denselben Homologietypus in der Dimension n.*

(*b*) *Die Homomorphismen $H^n_{f, \mathfrak{R}_1}$, $H^n_{f, \mathfrak{Z}_m}$ ($m = 0, 2, 3, \ldots$) stimmen mit den entsprechenden Homomorphismen $H^n_{g, \mathfrak{R}_1}$, $H^n_{g, \mathfrak{Z}_m}$ überein.*

(*c*) *Zu jeder Zahl $\varepsilon > 0$ gibt es eine Zahl $\eta > 0$ mit der folgenden Eigenschaft:*

Ist C ein in X liegender n-dimensionaler η-Zykel modulo m ($m = 0, 2, 3, \ldots$), so sind die Bildzykeln $f(C)$ und $g(C)$ in Y ε-homolog (modulo m). [8]).

Der Schluss (a) $\rightarrow$ (b) ist trivial. Die Implikationen (b) $\rightarrow$ (c) und (c) $\rightarrow$ (a) sind leicht zu beweisen.

Bei der ersteren handelt es sich um die im wesentlichen bekannte Beziehung zwischen den Homologien nach variablem ganzzahligem Modul und nach dem Modul 1 [8a]). Zum Beweis der letzteren genügt es zu zeigen, dass die Aussage (c) mit demselben η richtig bleibt, wenn man unter C einen η-Zykel in bezug auf irgendwelche abelsche Gruppe $\mathfrak{A}$ als Koeffizientenbereich versteht. Nun erzeugen die Koeffizienten, die in C wirklich auftreten, eine Untergruppe von $\mathfrak{A}$, die als abelsche Gruppe mit endlich vielen Erzeugenden direkte Summe ist von endlich vielen zyklischen Gruppen. Seien a_i ($i = 1, 2, \ldots N$) die Erzeugenden dieser zyklischen Gruppen und m_i ihre Ordnungen (falls a_i von unendlicher Ordnung ist, setzen wir $m_i = 0$); dann ist C in der Form darstellbar $C = \Sigma a_i C_i$, wo

---

[5a]) Für abelsche Gruppen wird im folgenden überall additive Schreibweise verwendet.

[6]) Vgl. PONTRJAGIN, Ann. of Math. **35**, S. 908. Vgl. auch ALEXANDROFF, Fund. Math. **20**, S. 140.

[6a]) Vgl. VIETORIS, Math. Ann. **97**, S. 457.

[7]) Nach J. W. ALEXANDER, Ann. of Math. **33**, S. 555.

[8]) Wegen der ε-Zykeln usw. vgl. etwa ALEXANDROFF, Math. Ann. **106**, S. 174. Die Eigenschaft (c) kan auch durch das Verhalten der *wahren Zykeln* von ALEXANDROFF formuliert werden (vgl. a.a.O.).

[8a]) Vgl. ALEXANDROFF, Fund. Math. **20**, S. 143.

C_i ganzzahlige Zykeln modulo m_i sind. Aus der vorausgezetzten ε-Homologie zwischen den Zykeln $f(C_i)$ und $g(C_i)$ folgt schliesslich, dass $f(C)$ mit $g(C)$ ε-homolog ist.

Laut Satz 1.1 wird der Homologietypus der Abbildung f in der Dimension n durch die Homomorphismen $H^n_{f,\mathfrak{R}_1}$, $H^n_{f,\mathfrak{Z}_m}$ bestimmt ($m = 0, 2, \ldots$). In einem wichtigen Fall reicht bereits der erste dieser Homomorphismen aus:

Satz 1.2. *Falls die Torsionsgruppe $\tau_n(Y)$ leer ist (insbesondre also, falls $\dim Y = n$ gilt), werden die Homologietypen der Abbildungen $f \varepsilon Y^X$ in der Dimension n bereits durch die Homomorphismen $H^n_{f,\mathfrak{R}_1}$ bestimmt.*

Zum Beweise braucht man nur zu zeigen, dass aus der Uebereinstimmung der Homomorphismen $H^n_{f,\mathfrak{R}_1}$, $H^n_{g,\mathfrak{R}_1}$ die Aussage (c) des Satzes 1.1 folgt.

Betrachten wir noch etwas näher den Fall, wo X ein *Polyeder* ist.

Satz 1.3. *Wenn X ein Polyeder ist* (und Y beliebig), *wird der n-dimensionale Homologietypus einer Abbildung $f \varepsilon Y^X$ durch die Homomorphismen $H^n_{f,\mathfrak{Z}_m}$* ($m = 0, 2, \ldots$) *bestimmt. Ist überdies die Gruppe $\tau_{n-1}(X)$ leer, so reicht bereits der Homomorphismus $H^n_{f,\mathfrak{Z}_0}$ zur Bestimmung des Homologietypus aus.*

Wenn zwei Abbildungen in *jeder Dimension* denselben Homologietypus besitzen, so sagen wir, sie haben schlechthin *den gleichen Homologietypus*.

Abbildungen aus derselben Klasse haben immer den gleichen Homologietypus.

2. Das Hauptergebnis dieser Arbeit ist:

Theorem I. *Sei X ein n-dimensionaler kompakter Raum* (n endlich und $\geqq 2$) *und Y ein kompakter Raum*[8b]) (von beliebiger Dimension) *mit den folgenden Eigenschaften: a) Y ist lokal zusammenhängend bis zur Ordnung n* (einschliesslich) *im* LEFSCHETZ'*schen Sinne*[9]). *b) Die Fundamentalgruppe $\pi_1(Y)$, sowie die Homologiegruppen $\beta_i(Y)$ für $i = 0, 1, \ldots, n-1$ sind leer*[10]). *Behauptung: Die Klassen der Abbildungen $f \varepsilon Y^X$ sind durch ihre Homologietypen*[10a]) *bestimmt.*

8b) Die Voraussetzung, Y sei kompakt, könnte bei geeigneter Fassung des Begriffs des Homologietypus entbehrt werden.

9) Vgl. Fussnote [4]). Wegen der Beziehung der LEFSCHETZschen Definition zur ALEXANDROFF-ČECHschen Definition des lokalen Zusammenhanges, die auf dem Homologiebegriff beruht, vgl. HUREWICZ, Fund. Math. **25**, S. 467.

10) Setzt man Y als zusammenhängend voraus, so ist die Bedingung b) nach dem Aequivalenzsatz mit dem Verschwinden der ersten $n-1$ Homotopiegruppen von Y gleichbedeutend.

10a) Die Homologietypen fallen hier natürlich mit den Homologietypen in der Dimension n zusammen (die Gruppen $\beta_i(Y, \mathfrak{A})$, verschwinden nämlich für $i < n$ bei beliebig gewähltem Koeffizientenbereich).

Nehmen wir für X die n-Sphäre S_n, so geht das Theorem I in einen Teil des oben erwähnten Aequivalenzsatzes über. Nehmen wir für Y die S_n und für X ein beliebiges n-dimensionales Polyeder, so erhalten wir den oben gleichfalls erwähnten HOPFschen Satz.

Zum Beweis des Theorems I setzen wir zunächst voraus, X sei ein Polyeder (laut Satz 1.3 behauptet das Theorem in diesem Fall, dass die Abbildungsklassen durch die Homomorphismen $H^n_{f,\mathfrak{Z}_m}$ $(m=0,2,3,\ldots)$ bestimmt sind). Wörtlich wie bei HOPF [11]) führen wir die Behauptung auf den folgenden *Erweiterungssatz* zurück:

Satz 2.1. *Sei P ein $(n+1)$-dimensionales Polyeder, Q ein Teilpolyeder von P* (von derselben oder kleinerer Dimension). *Der Raum Y genüge den Voraussetzungen des Theorems I. Falls die Abbildung $f \varepsilon Y^Q$ jedem Zykel modulo m $(m=0,2,3\ldots)$ von Q, der in P homolog Null ist, das Element Null der Gruppe $\beta_n(Y,\mathfrak{Z}_m)$ zuordnet, so lässt sich f zu einer Abbildung $F \varepsilon Y^P$ erweitern.*

3. Den Beweis von 2.1 führen wir ähnlich wie im HOPFschen Fall $(Y=S_n)$; dabei wird wesentlich der Aequivalenzsatz [11a]) benützt, der hier ungefähr dieselbe Rolle spielt, wie bei HOPF die Beziehung zwischen den Abbildungsklassen und den Abbildungsgraden im Fall der Abbildungen der Sphäre auf sich selbst.

Sei Q_{n-1} das $(n-1)$-dimensionale Gerüst von Q (das Polyeder, gebildet von den n-dimensionalen Simplizes von Q). y_0 sei ein fester Punkt von Y. Die Abbildung f lässt sich stetig deformieren in eine Abbildung f' mit $f'(Q_{n-1})=y_0$ (Vgl. D II, S. 526). Da die Erweiterbarkeit einer Abbildung bei stetiger Deformation nicht verloren geht [11b]), dürfen wir von vorneherein annehmen $f(Q_{n-1})=y_0$.

Jedem orientierten n-dimensionalen Simplex T von Q ist vermöge f ein bestimmtes Element von $\beta_n(Y)$ zugeordnet, nämlich das Bild des Grunzykels der aus T durch Identifizierung der Randpunkte entstehenden Sphäre. Dieses Element bezeichnen wir mit $\varphi(T)$ und ordnen jedem Komplex $K=\Sigma\, e_i T_i$ (wo e_i ganze Zahlen und T_i n-dimensionale Simplizes von Q sind) das Element

$$\varphi(K)=\Sigma\, e_i\,\varphi(T_i) \tag{$'$}$$

zu. Bezeichnen wir mit $\mathfrak{L}$ die abelsche Gruppe der (reinen) *n-dimensionalen Komplexe von P* (gemeint sind Komplexe mit ganzzahligen Koeffizienten). Die n-dimensionalen Komplexe von Q bilden einen Untergruppe $\mathfrak{L}'$ von $\mathfrak{L}$. Sei schliesslich $\mathfrak{L}''$ die Untergruppe von $\mathfrak{L}$, bestehend aus den in *P nullhomologen Zykeln* (Modulo 0).

---

[11]) Vgl. a.a.O., S. 43—44.

[11a]) Nach der Fussnote [10]) genügt Y den Voraussetzungen des Aequivalenzsatzes.

[11b]) Vgl. D II, S. 525.

Die Formel ($'$) definiert einen *Homomorphismus von* $\mathfrak{L}'$ *in* $\beta_n(Y)$ Die Voraussetzung des Satzes 2.1 lässt sich so formulieren: Falls der Komplex $K \varepsilon \mathfrak{L}'$ homolog Null ist modulo m in P $(m = 0, 2, \ldots)$, d.h., falls eine Relation

$$K = K_1 + m\,K_2 \qquad (K_1 \,\varepsilon\, \mathfrak{L}'' \quad , \quad K_2 \,\varepsilon\, \mathfrak{L})$$

besteht, gilt

$$('') \qquad \varphi(K) \equiv 0 \pmod m$$

(damit ist gemeint, dass $\varphi(K)$ das m-fache eines Elements von $\beta_n(y)$ ist). Daraus schliessen wir ähnlich wie bei HOPF, dass *der Homomorphismus* φ *sich zu einem Homomorphismus* Φ *von* $\mathfrak{L}$ *in* $\beta_n(Y)$ *erweitern lässt, und zwar so, dass für* $K \varepsilon \mathfrak{L}''$

$$('') \qquad \Phi(K) = 0$$

gelte.

Man stützt sich dabei auf den folgenden leicht beweisbaren algebraïschen Satz: Sei $\mathfrak{L}$ ein endlicher Modul (d.h. eine abelsche Gruppe mit endlich vielen Erzeugenden und ohne Elemente endlicher Ordnung). $\mathfrak{L}'$ und $\mathfrak{L}''$ seien Untermoduln von $\mathfrak{L}$, und $\mathfrak{A}$ sei eine beliebige abelsche Gruppe, (in unserem Fall ist dies die Gruppe $\beta_n(Y)$). Ist dann φ ein Homomorphismus von $\mathfrak{L}'$ in $\mathfrak{A}$, bei dem jedes Element $c \,\varepsilon\, \mathfrak{L}'$ von der Gestalt

$$c = c_1 + mc_2 \qquad (c_1 \,\varepsilon\, \mathfrak{L}'' \quad , \quad c_2 \,\varepsilon\, \mathfrak{L})$$

in das m-fache eines Elements von $\mathfrak{A}$ übergeht, so lässt sich φ zu einem Homomorphismus Φ von $\mathfrak{L}$ in $\mathfrak{A}$ erweitern, bei dem der ganze Modul $\mathfrak{L}''$ auf die Null abgebildet wird.

Die Relation ($''$) gilt insbesondre, wenn K der Rand ist eines $(n+1)$-dimensionalen Simplexes von P.

Jedes *nicht* in Q vorkommende n-dimensionale Simplex T (das wir uns mit einer bestimmten Orientierung versehen denken) bilden wir jetzt stetig in Y ab, so dass der Rand von T in den Punkt y_0 übergeht und der Grundzykel der aus T durch Identifizierung der Randpunkte hervorgehenden n-Sphäre auf das Element $\Phi(T)$ von $\beta_n(Y)$ abgebildet wird. Die Existenz einer derartigen Abbildung steht nach dem Aequivalenzsatz fest.

Auf diese Weise wird die Abbildung f auf das n-dimensionale Gerüst von P erweitert. Sie lässt jedem n-dimensionalen Zykel C das Element $\Phi(C)$ von $\beta_n(Y)$ entsprechen. Dem Randzykel R eines $(n+1)$-dimensionalen Simplexes U wird also das Element Null zugeordnet; hieraus folgt aber nach dem Aequivalenzsatz, dass die Sphäre R *nullhomotop* abgebildet wird, d.h. die Abbildung lässt sich auf das ganze Simplex U erweitern. Damit ist die Fortsetzbarkeit von f auf P bewiesen, und somit auch das Theorem I für den Fall, dass X ein Polyeder ist.

4. Der Beweis unter allgemeinen Voraussetzungen erfolgt durch Zurückführung auf den eben behandelten Spezialfall. Sei $\{\varepsilon_\nu\}$ eine gegen 0 konvergierende Folge positiver Zahlen. Unter Anwendung des ALEXANDROFF*schen Ueberführungssatzes* [12]) bestimmen wir für $\nu = 1, 2, \ldots$ ein n-dimensionales Polyeder P_ν das aus dem Raum X durch eine ε_ν-Transformation [13]), (d.h. eine Transformation, die je zwei Punkte mit Abstand $> \varepsilon_\nu$ auf verschiedene Punkte abbildet) φ_ν hervorgeht. Wir dürfen ohne weiteres annehmen, die Kantenlängen der Simplizes von P seien $< 1/n$. Sei jetzt $f \varepsilon Y^X$ beliebig gegeben. Für $\nu = 1, 2, \ldots$ definieren wir in der folgenden Weise eine Abbildung $f_\nu \varepsilon Y^{P_\nu}$: Ist p ein Eckpunkt von P, so setzen wir $f_\nu(p) = f(x)$, wo x einer der Punkte ist mit $\varphi_\nu(x) = p$. Die so für die Menge der Eckpunkte von P_ν definierte Abbildung erweitern wir nachträglich auf das ganze Polyeder P_ν, wobei wir dafür sorgen, dass die Durchmesser der Bilder der Simplizes von P_ν mit wachsendem ν gleichmässig gegen Null konvergieren. Dass man die letzte Bedingung tatsächlich realisieren kann, ist eine leichte Folgerung aus dem lokalen Zusammenhang von Y in den Dimensionen $0, 1, \ldots, n-1$.

Sei g eine zweite Abbildung aus Y^X. Wir wenden auf g dasselbe Verfahren wie soeben auf f und erhalten Abbildungen $g_\nu \varepsilon Y^{P_\nu}$. Haben nun f und g *denselben Homologietypus*, so haben, wie man leicht zeigen kann, für hinreichend grosses ν auch die Abbildungen f_ν und g_ν denselben Homologietypus (sonst könnte nämlich die Bedingung (c) des Satzes 1.1 für die Abbildungen f und g nicht erfüllt sein), sind also nach dem eben bewiesenen Spezialfall des Theorems I einander homotop. Dann sind offenbar auch die Abbildungen

$$f'_\nu(x) = f_\nu(\varphi_\nu(x)) \quad , \quad g'_\nu(x) = g_\nu(\varphi_\nu(x)) \qquad (x \varepsilon X)$$

einander homotop. Nun sieht man leicht, dass die Abbildungen f'_ν bzw. g'_ν gleichmässig gegen f bzw. g konvergieren. Unter Berücksichtigung des lokalen Zusammenhanges von Y ergibt sich hieraus nach einem Satz von KURATOWSKI [14]), dass für genügend grosses ν f'_ν derselben Klasse angehört wie f und g'_ν derselben Klasse wie g. Damit ist aber nach dem Vorangehenden gezeigt, dass f und g in dieselbe Klasse gehören.

---

[12]) Vgl. ALEXANDROFF, Ann. of Math. **30**, S. 20. Einfachere Beweise: KURATOWSKI, Fund. Math. **20**, S. 191, HUREWICZ, Sitzungsberichte d. Preuss. Ak. **24**, S. 759, Fussnote [1]) (die beiden zuletzt zitierten Beweise sind identisch).

[13]) Die von ALEXANDROFF (vgl. a.a.O., S. 103) eingeführten ε-Abbildungen (und die damit eng zusammenhängenden ε-Verschiebungen) spielen eine überaus wichtige Rolle in den topologischen Untersuchungen der letzten Zeit (vgl. etwa meinen Beweis des MENGER-NÖBELINGschen Einbettungssatzes in der eben zitierten Arbeit, der sich wesentlich auf den Begriff der ε-Abbildung stützt).

[14]) Der KURATOWSKIsche Satz behauptet, dass der Raum Y^X durch Bögen lokal zusammenhängend ist, wenn Y bis zur Ordnung n lokal zusammenhängend ist und X einen beliebigen höchstens n-dimensionalen kompakten Raum bedeutet. Vgl. Fund. Math. **20**, S. 285.

5. Ein besonders interessanter Fall liegt vor, wenn die Torsionsgruppe $\tau_n(Y)$ leer ist. Nach Satz 1.2 ist in diesem Fall der Homologietypus einer Abbildung $f \varepsilon Y^X$ also nach Theorem I auch ihre Abbildungsklasse durch den Homomorphismus $H^n_{f,\mathfrak{R}_1}$ bestimmt. Betrachtet man die Gruppen $\beta_n(X, \mathfrak{R}_1)$, $\beta_n(Y, \mathfrak{R}_1)$ als *topologische* Gruppen [14a]), so sind die Homomorphismen $H^n_{f,\mathfrak{R}_1}$ *stetig*. Umgekehrt, kann mit den oben angewendeten Methoden gezeigt werden, dass man jeden stetigen Homomorphismus von $\beta_n(X, \mathfrak{R}_1)$ in $\beta_n(Y, \mathfrak{R}_1)$ durch eine Abbildung $f \varepsilon Y^X$ realisieren kann (dies gilt unabhängig von der Voraussetzung, dass $\tau_n(Y)$ leer ist, sogar für dim $X = n + 1$). Man hat also

Theorem II. *Sind die Voraussetzungen des Theorems I erfüllt, und ist ausserdem Y torsionsfrei in der n-ten Dimension, so gehört zu jedem stetigen Homomorphismus der Gruppe $\beta_n(X, \mathfrak{R}_1)$ in die Gruppe $\beta_n(Y, \mathfrak{R}_1)$ genau eine Abbildungsklasse von X in Y.*

Ein ähnlicher (nur etwas komplizierterer) Satz gilt unter allgemeinen Voraussetzungen des Theorems I. Zur Aufzählung der Abbildungsklassen muss man dann ausser dem Homomorphismus $H^n_{f,\mathfrak{R}_1}$ noch gewisse Homomorphismen der Gruppen $\beta_n(X, \mathfrak{Z}_m)$ (für endlich viele Werte von m) in zyklische Untergruppen von $\tau_n(Y)$ heranziehen.

Nehmen wir jetzt an, die Gruppe $\beta_n(Y)$ sei *zyklisch* von unendlicher Ordnung, dann ist $\beta_n(Y, \mathfrak{R}_1)$ mit $\mathfrak{R}_1$ stetig isomorph. Die stetigen Homomorphismen von $\beta_n(X, \mathfrak{R}_1)$ in $\mathfrak{R}_1$ sind die sogenannten *Charaktere* von $\beta_n(X, \mathfrak{R}_1)$ [15]). Diese Charaktetere sind nach Theorem II ein-eindeutig den Abbildungsklassen zugeordnet. Wenden wir dies auf den Fall $Y = S_n$ an:

Theorem III. *Ist X ein kompakter n-dimensionaler Raum, so entspricht jedem Charakter der Gruppe $\beta_n(X, \mathfrak{R}_1)$ eine und nur eine Abbildungsklasse von X in die n-Sphäre.*

In der Terminologie von FREUDENTHAL [15a]) bedeutet dies, dass die "HOPFsche Gruppe" von X zur Gruppe $\beta_n(X, \mathfrak{R}_1)$ *dual* [16]) ist.

6. Geht ein Element $c \varepsilon \beta_n(X, \mathfrak{A})$ bei dem durch die Abbildung $f \varepsilon Y^X$ verursachten Homomorphismus $H^n_{f,\mathfrak{A}}$ in die Null über, so sagen wir c werde durch f *nullhomolog abgebildet*. Sei X eine Teilmenge von Y. Die Elemente von $\beta_n(X, \mathfrak{A})$, die bei der *identischen* Abbildung nullhomolog abgebildet werden, nennen wir kurz *nullhomolog in Y* (dies sind also Elemente, die durch in Y nullhomologe Vollzykeln dargestellt

---

14a) Vgl. PONTRJAGIN, Ann. of Math. **35**, S. 909.

15) Vgl. PONTRJAGIN, Ann. of Math. **35**, S. 369.

15a) Vgl. FREUDENTHAL, Comp. Math. **2**, S. 134.

16) Vgl. PONTRJAGIN a.a.O.

werden). Anknüpfend an den Satz 2.1, kann man den folgenden *Erweiterungssatz* beweisen:

Satz 6.1. *Sei X ein kompakter höchstens $(n+1)$-dimensionaler Raum, M eine abgeschlossene Teilmenge von X und Y ein den Voraussetzungen des Theorems I genügender Raum. Damit eine Abbildung $f \varepsilon Y^M$ sich zu einer Abbildung $F \varepsilon Y^X$ erweitern lasse, ist notwendig und hinreichend, dass die in X nullhomologen Elemente der Gruppen $\beta_n(M, \mathfrak{R}_1)$, $\beta_n(M, \mathfrak{Z}_m)$ $(m = 0, 2, 3 \ldots)$ durch f nullhomolog abgebildet werden.*

Falls Y torsionsfrei in der n-ten Dimension ist, braucht man nur die Gruppe $\beta_n(M, \mathfrak{R}_1)$ zu berücksichtigen. Eine Folgerung aus Satz 6.1: Wenn kein von Null verschiedenes Element von $\beta_n(M, \mathfrak{R}_1)$ in X nullhomolog ist (und nur in diesem Falle) lässt sich *jede* Abbildung $f \varepsilon S_n^M$ auf X erweitern. Daraus gewinnt man sehr leicht die bekannte ALEXANDROFF-PONTRJAGINsche [17]) Charakterisierung der Dimensionszahl eines kompakten Raumes X mit Hilfe der Zykeln modulo I.

7. Bisjetzt beschäftigten wir uns mit der Klassifizierung der *Abbildungen*. Jetzt wollen wir *Räume* nach ihren Homotopieeigenschaften einteilen. Wir beschränken uns auf kompakte Räume.

Definition. Von zwei kompakten Räumen X und Y sagen wir, sie haben *denselben Homotopietypus*, wenn es eine Abbildung $f \varepsilon Y^X$ und eine Abbildung $\varphi \varepsilon X^Y$ gibt, so dass die zusammengesetzten Abbildungen $f.\varphi$ und $\varphi.f$ den *identischen* Abbildungen (von X in X, bzw. von Y in Y) homotop sind.

Man sieht leicht: Wenn X denselben Homotopietypus hat wie Y und Y denselben Homotopietypus wie Z, so haben auch X und Z denselben Homotopietypus. Es liegt also wirklich eine Klasseneinteilung der kompakten Räume vor. Alle zusammenziehbaren Räume haben denselben Homotopietypus, so dass also Räume von verschiedenen Dimensionen denselben Homotopietypus haben können.

Räume vom gleichen Homotopietypus haben isomorphe Homologiegruppen (bei jeder Wahl des Koeffizientenbereiches) und isomorphe Homotopiegruppen. Umgekehrt, kann man in manchen Fällen aus der Isomorphie der Homologiegruppen auf die Gleichheit der Homotopietypen schliessen.

Betrachten wir beispielweise zwei n-dimensionale (n endlich und $\geqq 2$) kompakte lokal zusammenziehbare Räume Y und Y', deren Fundamentalgruppen und Homologiegruppen bis auf die n-te verschwinden. Aus dem Theorem I folgt leicht: *Damit Y und Y' denselben Homotopietypus haben, ist notwendig und hinreichend, dass die Gruppen $\beta_n(Y)$ und $\beta_n(Y')$ isomorph seien.*

Es erhebt sich die Frage: Unter welchen Voraussetzungen lässt sich

---

[17]) Vgl. die sub [8a]) zitierte Arbeit.

aus der Gleichheit des Homotopietypen die Uebereinstimmung der *topologischen* Typen folgern. Beispielweise: Sind zwei *geschlossene Mannigfaltigkeiten* vom gleichen Homotopietypus immer homöomorph? Aus der positiven Beantwortung der letzten Frage würde sich sofort die *Richtigkeit der* POINCARÉ*schen Vermutung* [18]) *ergeben*, denn nach dem obigen hat eine n-dimensionale Mannigfaltigkeit deren Fundamentalgruppe und Homologiegruppen bis auf die letzte leer sind, den Homotopietypus der n-Sphäre.

[18]) Vgl. D II S. 523.

Mathematics. — *Electromagnetism, independent of metrical geometry. 5. Quantum-theoretical commutability-relations for light-waves.* By D. VAN DANTZIG. (Communicated by Prof. J. A. SCHOUTEN).

(Communicated at the meeting of December 21, 1935).

§ 1. *Introduction.*

In some previous papers [1]) MAXWELL's equations were brought into the form:

$$I \quad \partial_j \mathfrak{H}^{ij} = \mathfrak{s}^i; \qquad II \quad 2\,\partial_{[j}\,\varphi_{i]} = F_{ji}; \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

whereas between the quantities $\mathfrak{s}^i$ (current and charge), φ_i (potentials), F_{ij} (fieldbivector, composed of **E** and **B**), $\mathfrak{H}^{ij}$ (composed of **H** and **D**) exist the "linking equations" (Cf. [7]))

$$I \quad \varphi_i = \int \gamma_{ik'}\,\mathfrak{s}^{k'}\,d\Sigma'; \qquad II \quad \mathfrak{H}^{ij} = \tfrac{1}{2}\int \Gamma^{ijk'l'}\,F_{k'l'}\,d\Sigma' \quad . \quad (2)$$

(where $d\Sigma'$ is the four-dimensional volume-element), solved by

$$I \quad \mathfrak{s}^i = \int \Gamma^{ik'}\,\varphi_{k'}\,d\Sigma'; \qquad II \quad F_{ij} = \int \tfrac{1}{2}\,\gamma_{ijk'l'}\,\mathfrak{H}^{k'l'}\,d\Sigma' \quad . \quad . \quad (3)$$

with

$$I \quad \Gamma^{ik'} = \partial_j\,\partial_{l'}\,\Gamma^{ijk'l'}; \qquad II \quad \gamma_{ijk'l'} = 4\,\partial_{[i}\,\partial_{[k'}\,\gamma_{j]l']} \quad . \quad . \quad . \quad (4)$$

It is the purpose of this paper to show that also the fundamental equations of *quantum*-electrodynamics, viz. the commutability-relations for light-waves, can be brought into our scheme. These relations, which were studied by DIRAC [2]), JORDAN and PAULI [3]), HEISENBERG and PAULI [4]),

[1]) The preceding papers under the same main-title appeared in these proceedings, viz. I The foundations, **37** (1934) 521—525; II Variational principles and further generalisation of the theory, ibidem 526—531; III Mass and motion, ibidem 643—652; IV Momentum and energy; waves, ibidem 825—836. They are quoted here as I, II, III, IV.

[2]) P. A. M. DIRAC, Proc. Royal Soc. **114** (1927) 243, 710; **136** (1932) 433.

[3]) P. JORDAN und W. PAULI, Zur Quantenelektrodynamik ladungsfreier Felder, ZS. f. Ph. **47** (1928) 151—173.

[4]) W. HEISENBERG und W. PAULI, Zur Quantendynamik der Wellenfelder, ZS. f. Ph. **56** (1929) 1—61; **59** (1930) 168—190. Cf. also L. ROSENFELD, ibidem **76** (1932) 729—734.