Mathematics. — *Metrisches zur Theorie der Diophantischen Approximationen.* Von J. F. KOKSMA. (Communicated by Prof. J. G. VAN DER CORPUT).

(Communicated at the meeting of January 25, 1936).

§ 1. **Einleitung.**

1. Nach der bekannten WEYLschen Definition heiszt die Folge reeller Zahlen

$$f(1), \quad f(2), \ldots$$

(oder auch die Funktion $f(x)$ $(x=1,2,\ldots)$) gleichverteilt (mod. 1), wenn für jedes feste γ mit $0 \leqq \gamma \leqq 1$ die Anzahl N_γ der ganzen x mit $1 \leqq x \leqq N$ (N ganz) und

$$0 \leqq f(x) - [f(x)] < \gamma$$

der Beziehung

$$\frac{N_\gamma}{N} \to \gamma \text{ für } N \to \infty$$

genügt [1]).

Dabei bedeutet $[u]$ für reelles u die gröszte ganze Zahl $\leqq u$; die Zahl

$$u - [u],$$

für die man auch (u) schreibt, heiszt der Rest (mod. 1) von u.

In einer früheren Arbeit [2]) habe ich eine Klasse reeller Funktionen $f(x, \theta)$ der ganzzahligen Veränderlichen $x \geqq 1$ und der in einem Intervall $\alpha \leqq \theta \leqq \beta$ liegenden Veränderlichen θ angegeben mit der Eigenschaft, dasz $f(x, \theta)$ $(x=1, 2, \ldots)$ für fast alle θ aus dem betrachteten Intervall gleichverteilt (mod. 1) ist (d.h., dasz die θ in diesem Intervall für die $f(x, \theta)$ $(x=1, 2, \ldots)$ nicht gleichverteilt (mod. 1) ist, eine Menge vom BOREL-LEBESGUEschen Masz Null bilden).

Aus dem Hauptsatz jener Arbeit folgen als Spezialfälle u.a. der WEYLsche Satz, dasz die Folge

$$\theta\lambda(1), \quad \theta\lambda(2), \ldots$$

---

1) H. WEYL. Ueber die Gleichverteilung von Zahlen mod. Eins. Math. Ann. **77**, 313—352 (1916).

2) J. F. KOKSMA. Ein mengentheoretischer Satz über die Gleichverteilung modulo Eins. Compositio Math. **2**, 250—258 (1935).

für jede gegebene Folge ungleicher ganzer Zahlen

$$\lambda(1),\quad \lambda(2),\ldots$$

für fast alle reellen θ gleichverteilt (mod. 1) ist [3]), und der Satz, dasz die Folge

$$\theta,\quad \theta^2,\quad \theta^3,\ldots$$

für fast alle $\theta \geqq 1$ gleichverteilt (mod. 1) ist.

Obwohl diese Sätze (wie alle metrischen Sätze dieser Art) den wesentlichen Nachteil besitzen, dasz sie kein Mittel geben mit dem man auch nur für eine einzige Zahl θ des betreffenden Intervalles entscheiden kann, ob sie zu der Ausnahmemenge gehört oder nicht, beanspruchen sie doch ein gewisses Interesse wegen des Umstandes, dasz unsere Kenntnisse der asymptotischen Verteilung (mod. 1) reeller Zahlenfolgen sich noch stets auf nur wenige Klassen solcher Folgen beschränkt [4]).

2. In dieser Note wird das verwandte Problem untersucht, für fast alle θ des Intervalles $\alpha \leqq \theta \leqq \beta$ die Ordnung der Annäherung von Resten (mod. 1) $(f(x,\theta))$ $(x=1,2,\ldots)$ an beliebige vorgegebene Zahlen γ des Einheitsintervalles in Bezug auf x abzuschätzen. Nach einigen vorbereitenden Hilfssätzen in § 2, zeige ich in § 3 folgenden

Satz 1. Voraussetzungen. *Sei $f(x,\theta)$ eine reelle Funktion, die für jede natürliche Zahl $x \geqq 1$ und jede reelle Zahl θ eines gegebenen Intervalles $\alpha \leqq \theta \leqq \beta$ definiert ist; dabei mögen α und β zwei von x unabhängige reelle Zahlen mit $\alpha < \beta$ bedeuten. Sei ferner $f(x,\theta)$ für $x=1,2,\ldots$ stetig in Bezug auf θ und*

$$\Phi(x_1, x_2, \theta) = f(x_1, \theta) - f(x_2, \theta) \quad \ldots\ldots \quad (1)$$

*für jedes von θ unabhängiges Paar natürlicher Zahlen $x_1 \neq x_2$ eine im Intervall $\alpha \leqq \theta \leqq \beta$ nach θ stetig differenzierbare Funktion, deren Ableitung Φ'_θ in $\alpha \leqq \theta \leqq \beta$ monoton *) und beständig $\neq 0$ ist. Schlieszlich sei für $N \geqq 2$:*

$$B_N = \sum_{x_1=2}^{N} \sum_{x_2=1}^{x_1-1} Max\left(\frac{1}{|\Phi'_\theta(x_1,x_2,\alpha)|},\ \frac{1}{|\Phi'_\theta(x_1,x_2,\beta)|}\right) \quad .\ .\ (2)$$

Behauptung. *Zu jedem von θ in $\alpha \leqq \theta \leqq \beta$ unabhängigen Zahlpaar N, H ($N \geqq 2$ ganz, $H > 0$) gibt es eine in $\alpha \leqq \theta \leqq \beta$ liegende Menge $\mathfrak{M} = \mathfrak{M}(N, H)$ vom Masze*

$$m\,\mathfrak{M} < 100\left\{4(\beta-\alpha)H^{-3} + H^{-2}N^{-4/3}B_N \log Min\left(3+\frac{3B_N}{(\beta-\alpha)N},\ 12H^{-1}N^{1/3}\right)\right\} (3)$$

---

[3]) H. WEYL. L. c. 1).

[4]) Siehe: J. F. KOKSMA. Diophantische Approximationen. (Ergebnisse d. Math. Bd. IV, 4) Berlin 1936. Kap. VIII.

*) Monotonie im schwachen Sinne genügt.

folgender Beschaffenheit: Für jedes θ aus $\alpha \leqq \theta \leqq \beta$, aber ausserhalb der Menge $\mathfrak{M}$ hat das Ungleichungssystem

$$\gamma' \leqq f(x, \theta) - y < \gamma'', \quad 1 \leqq x \leqq N \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (4)$$

bei jeder Wahl der von x unabhängigen reellen Zahlen γ' und γ'' mit

$$\gamma'' - \gamma' \geqq H N^{-1/3}. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (5)$$

wenigstens ein ganzzahliges Lösungspaar x, y.

Wie ich in § 4 zeigen werde, ist in diesem Satz enthalten, der folgende

Satz 2. *Gelten die Voraussetzungen des Satzes 1, hat die Zahl*

$$D_N = \frac{B_N}{N^{4/3}} \log\left(2 + \frac{B_N}{N}\right) \qquad (N = 2, 3, \ldots)$$

eine von N unabhängige obere Schranke, und bedeutet $\psi(x)$ eine beliebig langsam mit wachsendem x nach Unendlich strebende positive Funktion der natürlichen Zahl x, so hat für fast alle θ aus $\alpha \leqq \theta \leqq \beta$, sowohl das Ungleichungssystem

$$\gamma < f(x, \theta) - y < \gamma + \frac{\psi(x)}{\sqrt[3]{x}}, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (6)$$

als auch das Ungleichungssystem

$$\gamma - \frac{\psi(x)}{\sqrt[3]{x}} < f(x, \theta) - y < \gamma \,. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (7)$$

für jede Wahl der von x unabhängigen reellen Zahl γ unendlich viele ganzzahligen Lösungspaare x, y.

3. Bevor wir zu den Beweisen dieser Sätze übergehen, mögen einige Anwendungen und Bemerkungen Platz finden.

Als unmittelbare Folge von Satz 2 zeige ich zunächst:

Satz 3. *Ist die reelle Funktion $f(x, \theta)$ für jede natürliche Zahl $x \geqq 1$ und jede reelle Zahl θ aus $\alpha \leqq \theta \leqq \beta$ (α und β von x unabhängig, $\alpha < \beta$) definiert und stetig differenzierbar in bezug auf θ, ist $f'(X, \theta) - f'(x, \theta)$ für jedes Paar von θ unabhängiger natürlicher Zahlen $X \neq x$ eine monotone Funktion von θ in $\alpha \leqq \theta \leqq \beta$, die in diesem Intervall einen Absolutwert $\geqq K$ besitzt, wo K eine geeignet gewählte von X, x und θ unabhängige positive Zahl bedeutet, und bezeichnet $\psi(x)$ eine beliebig langsam mit x gegen Unendlich strebende positive Funktion der natürlichen Zahl x, so hat für fast alle θ aus $\alpha \leqq \theta \leqq \beta$, sowohl das Ungleichungssystem (6) als auch das Ungleichungssystem (7) für jede Wahl der von x unabhängigen reellen Zahl γ unendlich viele ganzzahligen Lösungspaare x, y.*

Beweis. Offenbar sind die Voraussetzungen von Satz 1 erfüllt. Ich brauche also nur noch zu zeigen, dasz die in Satz 2 definierte Zahl D_N eine von N unabhängige obere Schranke besitzt; Anwendung von Satz 2 liefert dann nämlich alles.

Seien x_1 und N ganz mit $2 \leqq x_1 \leqq N$. Für beliebiges θ in $\alpha \leqq \theta \leqq \beta$ kann man die Zahlen

$$f'_\theta(1, \theta),\ f'_\theta(2, \theta), \dots,\ f'_\theta(N, \theta)$$

der Grösze nach ordnen; dann sind die Differenzen von je zwei aufeinander folgenden Zahlen in der neuen Reihenfolge alle $\geqq K$. Deshalb ist

$$\sum_{x_2=1}^{x_1-1} \frac{1}{|f'_\theta(x_1, \theta) - f'_\theta(x_2, \theta)|} < 2 \sum_{\mu=1}^{N} \frac{1}{\mu K} = \frac{2}{K}\left(1 + \sum_{\mu=2}^{N} \frac{1}{\mu}\right) \leqq$$

$$\leqq \frac{2}{K}\left(1 + \int_1^N \frac{dt}{t}\right) = \frac{2}{K}(1 + \log N) < \frac{2}{K} \log (3N).$$

Also ist nach der Definition von Φ in Satz 1, d.h. nach (1):

$$\sum_{x_2=1}^{x_1-1} Max\left(\frac{1}{|\Phi'_\theta(x_1, x_2, \alpha)|}, \frac{1}{|\Phi'_\theta(x_1, x_2, \beta)|}\right) < \frac{4}{K} \log (3N),$$

d.h. nach (2):

$$B_N < \frac{4N}{K} \log (3N),$$

so dasz $D_N = B_N N^{-4/3} \log\left(2 + \frac{B_N}{N}\right) \rightarrow 0$ für $N \rightarrow \infty$ und also D_N eine von N unabhängige obere Schranke hat.

Aus Satz 3 folgert der Leser ohne Mühe:

Satz 4. *Ist $\lambda(x)$ eine für jede natürliche Zahl x definierte reelle Funktion, ist $\lambda(x_1)$—$\lambda(x_2)$ für jedes Paar ungleicher natürlicher Zahlen x_1 und x_2 absolut $\geqq K$, wo K eine von x_1 und x_2 unabhängige positive Zahl bedeutet, und ist $\psi(x)$ eine beliebig langsam mit wachsendem x nach Unendlich strebende Funktion der natürlichen Zahl x, so hat für fast alle θ, sowohl das Ungleichungssystem*

$$\gamma < \theta \lambda(x) - y < \gamma + \frac{\psi(x)}{\sqrt[3]{x}},$$

als auch das System

$$\gamma - \frac{\psi(x)}{\sqrt[3]{x}} < \theta \lambda(x) - y < \gamma$$

für jede Wahl der von x unabhängigen reellen Zahl γ unendlich viele ganzzahligen Lösungspaare x, y.

Ferner zeige ich als weitere Anwendung von Satz 3 den

Satz 5. *Ist $M(x)$ für $x = 1, 2, \ldots$ definiert und $\geqq 1$, ist $M(x_1) - M(x_2)$ für jedes Paar ungleicher natürlicher Zahlen x_1 und x_2 absolut $\geqq K$, wo $K > 0$ von x_1 und x_2 unabhängig ist, und ist $\psi(x)$ eine beliebig langsam mit wachsendem x gegen Unendlich strebende positive Funktion der natürlichen Zahl x, so hat für fast alle $\theta \geqq 1$, sowohl das Ungleichungssystem*

$$\gamma < \theta^{M(x)} - y < \gamma + \frac{\psi(x)}{\sqrt[3]{x}},$$

als auch das System

$$\gamma - \frac{\psi(x)}{\sqrt[3]{x}} < \theta^{M(x)} - y < \gamma$$

für jede Wahl der von x unabhängigen reellen Zahl γ unendlich viele ganzzahligen Lösungspaare x, y.

Beweis. Ist $m \geqq 1$ eine beliebige feste natürliche Zahl, so brauche ich offenbar nur zu zeigen, dasz die Behauptung des Satzes 5 gültig ist für fast alle θ aus $m \leqq \theta \leqq m + 1$. Dazu setze ich in Satz 3

$$f(x, \theta) = \theta^{M(x)}, \quad \alpha = m, \quad \beta = m + 1.$$

Dann ist $f(x, \theta)$ für jedes ganze $x \geqq 1$ reell und stetig differenzierbar in bezug auf θ. Für $x \neq X$ ist

$$f'_\theta(X, \theta) - f'_\theta(x, \theta) = M(X)\, \theta^{M(X)-1} - M(x)\, \theta^{M(x)-1}$$

Ist $\overline{M}$ die gröszte, $\underline{M}$ die kleinste der Zahlen $M(X)$ und $M(x)$, so ist

$$\pm \{ f'_\theta(X, \theta) - f'_\theta(x, \theta) \} = \overline{M}\, \theta^{\overline{M}-1} - \underline{M}\, \theta^{\underline{M}-1}.$$

Die Funktion im rechten Glied ist wegen $\overline{M} > \underline{M} \geqq 1$, $\theta \geqq 1$ offenbar monoton steigend in bezug auf θ. Ueberdies ist offenbar

$$| f'_\theta(X, \theta) - f'_\theta(x, \theta) | \geqq \overline{M}\, \theta^{\overline{M}-1} - \underline{M}\, \theta^{\overline{M}-1} \geqq \overline{M} - \underline{M} \geqq K.$$

Alle Voraussetzungen von Satz 3 sind also erfüllt, q.e.d.

Als unmittelbare Folge von Satz 5 sei erwähnt

Satz 6. *Für fast alle $\theta \geqq 1$ hat sowohl das Ungleichungssystem*

$$\gamma < \theta^{x} - y < \gamma + \frac{\psi(x)}{\sqrt[3]{x}},$$

als auch das System

$$\gamma - \frac{\psi(x)}{\sqrt[3]{x}} < \theta^{x} - y < \gamma$$

für jede Wahl der von x unabhängigen reellen Zahl γ unendlich viele ganzzahligen Lösungspaare x, y. ($\psi(x)$ hat dieselbe Bedeutung wie in Satz 5.)

4. **Bemerkung zu den Sätzen 2—6.** Nehmen wir in Satz 2 ohne Beschränkung der Allgemeinheit

$$\frac{\psi(x)}{\sqrt[3]{x}} \to 0 \quad \text{für} \quad x \to \infty$$

an[5]), so folgt für hinreichend groszes x aus (6) mit $0 \leqq \gamma < 1$ und aus (7) mit $0 < \gamma \leqq 1$ die Beziehung

$$0 < f(x, \theta) - y < 1,$$

d.h.

$$y = [f(x, \theta)], \quad f(x, \theta) - y = (f(x, \theta)).$$

Satz 2 (und diese Bemerkung gilt ebensehr für die aus Satz 2 hergeleiteten Sätze 3—6) sagt also aus, wie scharf man für fast alle θ des betrachteten Intervalles $\alpha \leqq \theta \leqq \beta$ jede beliebige Zahl γ des Einheitsintervalles wenigstens durch Reste modulo Eins der Funktion $f(x, \theta)$ approximieren kann, und für $0 < \gamma < 1$ zwar nach belieben von links oder von rechts.

Bemerkung zu Satz 1. Selbstverständlich ist Satz 1 allgemeinerer Anwendungen fähig, als der in den Sätzen 2—6 enthaltenen. So werde bemerkt, dasz man die Beschränktheit der in Satz 2 definierten Zahl D_N leicht durch bedeutend weniger fordernde Voraussetzungen ersetzen kann, falls man Passendes über das Mindestwachstum der Funktion $\psi(x)$ voraussetzt.

Bemerkung zu Satz 4 und zum Beweise des Satzes 1. Ueber die Folgen der speziellen Gestalt

$$\theta\lambda(1), \theta\lambda(2), \ldots$$

aus Satz 4 stellte Herr FOWLER[6]) schon 1915 ausführliche metrische Untersuchungen an und zwar mit einer elementaren auf HARDY-LITTLEWOOD[7]) zurückgehenden Methode. Die von ihm gefundenen Approximationen der Reste (mod. 1) $(\theta\lambda(x))$ an reelle Zahlen γ des Einheitsintervalles gelten für fast alle θ bei genügend schnell mit x nach Unendlich strebendem $\lambda(x)$. Obwohl die Ordnung dieser Annäherung etwas weniger scharf ist als in Satz 4, sind seine Sätze wesentlich tiefer als Satz 4: sie liefern nämlich für

---

[5]) Siehe auch die Vorbemerkung in § 4, 1.

[6]) R. H. FOWLER. On the distribution of the set of points $(\lambda_n \theta)$. Proc. London Math. Soc. (2), **14**, 189—206 (1915).

[7]) G. H. HARDY—J. E. LITTLEWOOD. Some problems of Diophantine approximation. The fractional part of $n^k \theta$. Acta Math. **37**, 155—191 (1914). Für weitere Literatur siehe den unter [4]) zitierten Bericht, speziell: S. 10—11, 94—95, 116—118, 120—121.

fast alle θ, für alle groszen N und gleichmäszig in γ eine Abschätzung des Ausdruckes

$$R_\gamma(N) = N_\gamma - \gamma N$$

(für die Definition von N_γ siehe § 1, 1; $R_\gamma(N)$ heiszt das *Fehlerglied*). Aus den FOWLERschen Sätzen kann man deshalb für $N \to \infty$ einen asymptotischen Ausdruck für die Anzahl der ganzen Lösungspaare x, y des betrachteten Ungleichungssystems mit $1 \leqq x \leqq N$ herleiten.

Ferner bemerke ich, dasz in Satz 4 ein älterer von mir (mit Hilfe eines VAN DER CORPUTschen Satzes) bewiesener Satz enthalten ist [8]. Dieser Satz unterscheidet sich von Satz 4 dadurch, dasz in den betreffenden Ungleichungen der Ausdruck $\frac{\psi(x) \log x}{\sqrt[3]{x}}$ statt $\frac{\psi(x)}{\sqrt[3]{x}}$ auftritt. Herr SIEGEL teilte mir dann brieflich einen neuen Beweis dieses Satzes mit; dabei schaffte er sogar den Logarithmus beiseite und gab überdies meinem Satz eine allgemeinere Fassung (ähnlich der Behauptung von Satz 1 im speziellen Fall $f(x, \theta) = \theta\lambda(x)$, $\alpha = 0$, $\beta = 1$). Er ersetzte beim Beweise den von mir benutzten (sehr allgemeinen) VAN DER CORPUTschen Satz durch den in der Theorie der FOURIERschen Reihen bekannten Hilfssatz 4. Nun läszt sich der VAN DER CORPUTsche Satz auch durch einen ähnlichen, etwas schärferen Satz ersetzen [9], der ebenfalls im Stande ist den Logarithmus wegzuschaffen. Der SIEGELsche Ansatz ist aber für die Behandlung des betreffenden Problems unzweifelbar einfacher und geeigneter. Obwohl mit beiden Methoden scharfe Verallgemeinerungen des Satzes 4 für allgemeinere Funktionen $f(x, \theta)$ möglich sind, benutze ich aus obigen Gründen in dieser Arbeit die elegante SIEGELsche Methode.

§ 2. **Einige Hilfssätze.**

In der unter [2] zitierten Arbeit habe ich als Hilfssatz 1 bewiesen

Hilfssatz 1. *Unter den Voraussetzungen des Satzes 1 gilt für ganzes* $N \geqq 2$

$$\int_\alpha^\beta \left| \frac{1}{N} \sum_{x=1}^{N} e^{2\pi i f(x,\theta)} \right|^2 d\theta < \frac{\beta - \alpha}{N} + \frac{B_N}{N^2}.$$

Wir folgern aus Hilfssatz 1:

---

[8] J. F. KOKSMA. Ein mengentheoretischer Satz aus dem Gebiete der Diophantischen Approximationen. Proc. Royal Acad. Amsterdam, **35**, 959—969 (1932). Siehe auch die Bemerkungen in dem unter [4] zitierten Bericht auf S. 120—121.

[9] Dieser Satz dessen Beweis Herr VAN DER CORPUT demnächst gemeinsam mit Verfasser veröffentlichen wird, ist in spezialisierter Gestalt in dem unter [4] zitierten Bericht als IX Satz 4 zitiert.

Hilfssatz 2. *Unter den Voraussetzungen des Satzes 1 gilt für jedes Paar natürlicher Zahlen $N \geqq 2$ und $h \geqq 1$*

$$\int_{\alpha}^{\beta} \left| \sum_{x=1}^{N} e^{2\pi i h f(x,\theta)} \right|^2 d\theta < (\beta - \alpha) N + \frac{B_N}{h}.$$

Beweis. Die Voraussetzungen des Satzes 1 bleiben offenbar erfüllt, wenn man gleichzeitig

$$f(x, \theta) \text{ durch } hf(x, \theta), \ \Phi(x_1, x_2, \theta) \text{ durch } h\,\Phi(x_1, x_2, \theta),$$
$$\Phi'_\theta \text{ durch } h\,\Phi'_\theta \text{ und } B_N \text{ durch } \frac{B_N}{h}$$

ersetzt.

Anwendung von Hilfssatz 1 unter den so abgeänderten Voraussetzungen des Satzes 1 liefert sofort Hilfssatz 2.

Hilfssatz 3. *Unter den Voraussetzungen des Satzes 1 gibt es zu jeder natürlichen Zahl $N \geqq 2$ und jedem Paar positiver Zahlen H und k mit*

$$t = H N^{-1/3} < 1 \quad \ldots \ldots \ldots \quad (8)$$

im Intervall $\alpha \leqq \theta \leqq \beta$ eine Menge $\mathfrak{M}$ vom Masze

$$\left.\begin{array}{l} \mathfrak{m}\,\mathfrak{M} \leqq 4(\beta - \alpha) k^{-2} H^{-3} + \\ \quad + k^{-2} H^{-2} N^{-4/3} B_N \log \mathrm{Min}\left(3 + \dfrac{3 B_N}{(\beta - \alpha) N}, \ 12 H^{-1} N^{1/3}\right) \end{array}\right\}, \quad \ldots \quad (9)$$

folgender Beschaffenheit: Für jedes θ aus $\alpha \leqq \theta \leqq \beta$, aber ausserhalb der Menge $\mathfrak{M}$ gelten die unendlich vielen Ungleichungen

$$\left| \sum_{x=1}^{N} e^{2\pi i h f(x,\theta)} \right| < k H N^{2/3} (h t + 1)^{3/4} \qquad (h = 1, 2, \ldots). \quad \ldots \quad (10)$$

Beweis. Ist $h \geqq 1$ eine natürliche Zahl, so bedeute $\mathfrak{M}_h$ die Menge aller θ aus $\alpha \leqq \theta \leqq \beta$, für die

$$\left| \sum_{x=1}^{N} e^{2\pi i h f(x,\theta)} \right| \geqq k H N^{2/3} (h t + 1)^{3/4}.$$

Wegen der Stetigkeit von $f(x, \theta)$ ist diese Menge messbar und aus Hilfssatz 2 folgt sofort, dasz ihr Masz $\mathfrak{m}\,\mathfrak{M}_h$ der Beziehung

$$\{k H N^{2/3} (h t + 1)^{3/4}\}^2 \, \mathfrak{m}\,\mathfrak{M}_h < (\beta - \alpha) N + \frac{B_N}{h},$$

d.h.

$$\mathfrak{m}\,\mathfrak{M}_h < \left\{(\beta - \alpha) N + \frac{B_N}{h}\right\} k^{-2} H^{-2} N^{-4/3} (h t + 1)^{-3/2} \quad \ldots \quad (11)$$

genügt.

Die Vereinigungsmenge $\mathfrak{M}$ der Mengen

$$\mathfrak{M}_1, \mathfrak{M}_2, \ldots$$

hat die Eigenschaft, dasz für jede Zahl θ aus $\alpha \leqq \theta \leqq \beta$, welche ausserhalb dieser Menge $\mathfrak{M}$ liegt, sämtliche Ungleichungen (10) gelten. Sie ist offenbar messbar; ihr Masz sei $\mathfrak{m}\mathfrak{M}$. Aus (11) folgt dann

$$\left.\begin{aligned} \mathfrak{m}\mathfrak{M} < (\beta-\alpha)\, k^{-2} H^{-2} N^{-1/3} \sum_{h=1}^{\infty} (ht+1)^{-3/2} + \\ + k^{-2} H^{-2} N^{-4/3} B_N \sum_{h=1}^{\infty} h^{-1} (ht+1)^{-3/2}. \end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad (12)$$

Wir bemerken, dasz die Reihen rechterhand konvergieren und werden zeigen, dasz (9) aus (12) folgt; dadurch wird dann Hilfssatz 3 vollständig bewiesen sein.

Zunächst sei bemerkt, dasz

$$\sum_{h=1}^{\infty} \frac{1}{(ht+1)^{3/2}} \leqq \int_0^{\infty} \frac{du}{(ut+1)^{3/2}} = \frac{2}{t} = 2 H^{-1} N^{1/3}, \quad . \quad . \quad (13)$$

(wegen (8)), also

$$(\beta-\alpha)\, k^{-2} H^{-2} N^{-1/3} \sum_{h=1}^{\infty} (ht+1)^{-3/2} \leqq 2(\beta-\alpha)\, k^{-2} H^{-3} \quad . \quad . \quad (14)$$

Ist σ eine beliebige Zahl > 0, so ist wegen $ht + 1 > 1$:

$$\sum_{h=1}^{\infty} \frac{1}{h(ht+1)^{3/2}} < 1 + \sum_{h=2}^{[\sigma]+1} \frac{1}{h} + \sum_{h=[\sigma]+2}^{\infty} \frac{1}{h(ht+1)^{3/2}}$$

(die erste Summe rechterhand ist gleich Null zu setzen für $[\sigma] = 0$) also:

$$\left.\begin{aligned} \sum_{h=1}^{\infty} \frac{1}{h(ht+1)^{3/2}} < 1 + \int_1^{\sigma+1} \frac{du}{u} + \int_{\sigma}^{\infty} \frac{du}{u(ut+1)^{3/2}} = \\ = 1 + \log(1+\sigma) + \int_{\sigma}^{\infty} \frac{du}{u(ut+1)^{3/2}}. \end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad (15)$$

Wendet man (15) mit $\sigma = \frac{1}{t}$ an, so bekommt man

$$\sum_{h=1}^{\infty} \frac{1}{h\,(ht+1)^{3/2}} < 1 + \log\frac{2}{t} + \frac{1}{t^{3/2}} \int_{\frac{1}{t}}^{\infty} \frac{du}{u^{5/2}} = 1 + \tfrac{2}{3} + \log\frac{2}{t} =$$

$$= \tfrac{5}{3} + \log\frac{2}{t} < \log\frac{(2{,}8)^{5/3}.\,2}{t} < \log\frac{6.2}{t} = \log\frac{12}{t};$$

d.h. wegen (8)

$$\sum_{h=1}^{\infty} \frac{1}{h\,(ht+1)^{3/2}} < \log(12\,H^{-1}\,N^{1/3}) \quad . \; . \; . \; . \quad (16)$$

Wendet man nun (15) abermals an, jetzt mit $\sigma = \frac{B_N}{(\beta - \alpha)\,N}$, so findet man:

$$\sum_{h=1}^{\infty} \frac{1}{h\,(ht+1)^{3/2}} < 1 + \log\left(1 + \frac{B_N}{(\beta-\alpha)\,N}\right) + \frac{(\beta-\alpha)\,N}{B_N} \int_0^{\infty} \frac{du}{(ut+1)^{3/2}},$$

also wegen (13):

$$\sum_{h=1}^{\infty} \frac{1}{h\,(ht+1)^{3/2}} < \log\left(3 + \frac{3\,B_N}{(\beta-\alpha)\,N}\right) + \frac{2\,(\beta-\alpha)\,H^{-1}\,N^{4/3}}{B_N}. \qquad (17)$$

Aus (12), (14), (16) und (17) folgt

$$\left.\begin{aligned} &\mathfrak{m}\,\mathfrak{M} \leqq 4\,(\beta-\alpha)\,k^{-2}\,H^{-3} + \\ &+ k^{-2}\,H^{-2}\,N^{-4/3}\,B_N\,Min\left(\log(12\,H^{-1}\,N^{1/3}),\, \log\left(3 + \frac{3\,B_N}{(\beta-\alpha)\,N}\right)\right) \end{aligned}\right\} \quad (18)$$

und aus (18) folgt sofort (9), q.e.d.

Hilfssatz 4. *Ist τ eine positive Zahl < 1, so gilt für alle reellen u aus $\tau \leqq u \leqq 1$ die Identität*

$$\tau^2 + 2\sum_{h=1}^{\infty} \left(\frac{\sin\frac{\pi h \tau}{2}}{\frac{\pi h}{2}}\right)^2 \cos 2\pi h\,(u - \tfrac{1}{2}\tau) = 0 \qquad (\tau \leqq u \leqq 1). \;.\; (19)$$

Beweis. Wir betrachten die für alle reellen u definierte und stetige Funktion $\varphi(u)$ mit Periode 1, die für $-\frac{1}{2} \leqq u < \frac{1}{2}$ wie folgt festgelegt ist:

$\varphi(u) = 0$ für $-\frac{1}{2} \leqq u < -\frac{1}{2}\tau$ und $\frac{1}{2}\tau < u < \frac{1}{2}$;

$\varphi(u) = \frac{1}{2}\tau - |u|$ für $-\frac{1}{2}\tau \leqq u \leqq \frac{1}{2}\tau$.

Weil $\varphi(u)$ eine gerade Funktion ist hat ihre FOURIERsche Reihe die Gestalt

$$\varphi(u) = \tfrac{1}{2}\,a_0 + \sum_{h=1}^{\infty} a_h \cos 2\pi h u,$$

wo

$$\tfrac{1}{2}a_0=\tfrac{1}{4}\tau^2,\quad a_h=2\int\limits_{-1/2}^{1/2}\varphi(u)\cos 2\pi hu\,du=2\int\limits_{-1/2\tau}^{1/2\tau}\varphi(u)\cos 2\pi hu\,du=$$

$$=4\int\limits_{0}^{1/2\tau}\varphi(u)\cos 2\pi hu\,du=4\int\limits_{0}^{1/2\tau}(\tfrac{1}{2}\tau-u)\cos 2\pi hu\,du=$$

$$=\left\{4\,.\,(\tfrac{1}{2}\tau-u)\,.\,\frac{1}{2\pi h}\sin 2\pi hu\right\}_0^{1/2\tau}+\frac{4}{2\pi h}\int\limits_{0}^{1/2\tau}\sin 2\pi hu\,.\,du=$$

$$=\frac{1}{(\pi h)^2}(1-\cos\pi h\tau)=\frac{2\sin^2\dfrac{\pi h\tau}{2}}{(\pi h)^2}\qquad(h=1,2,\ldots).$$

Es besitzt also $\varphi(u)$ die gleichmäszig konvergente FOURIERsche Reihe

$$\varphi(u)=\frac{\tau^2}{4}+2\sum_{h=1}^{\infty}\left(\frac{\sin\dfrac{\pi h\tau}{2}}{\pi h}\right)^2\cos 2\pi hu.$$

Die durch Translation um $\frac{1}{2}\tau$ nach rechts aus $\varphi(u)$ entstehende Funktion $\psi(u)=\varphi\ (u-\frac{1}{2}\tau)$ genügt der Beziehung

$$\psi(u)=\varphi(u-\tfrac{1}{2}\tau)=0 \text{ für alle } u \text{ aus } \tau\leqq u\leqq 1,$$

d.h. es gilt die Identität (19).

§ 3. **Beweis von Satz 1.**

1. Sei H eine positive und $N\geqq 2$ eine ganze Zahl. Es werde

$$t=HN^{-1/3}$$

gesetzt. Ist $t\geqq 1$, so ist die Behauptung von Satz 1 trivial: man wähle für die daselbst auftretende Menge $\mathfrak{M}$ einfach die leere Menge. Wir nehmen für den Rest des Beweises denn auch

$$t=HN^{-1/3}<1 \quad . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \quad (20)$$

an und werden zeigen, dasz die Menge $\mathfrak{M}$ aus Hilfssatz 3 mit $k=\frac{1}{10}$ das in Satz 1 behauptete leistet. Zunächst sei bemerkt, dasz $\mathfrak{M}$ in $\alpha\leqq\theta\leqq\beta$ liegt, und dasz ihr Masz wegen (9) in der Tat der Ungleichung (3) genügt. Deshalb brauche ich noch nur zu zeigen, dasz die Ungleichungen (4) für jedes beliebige feste θ aus $\alpha\leqq\theta\leqq\beta$, aber ausserhalb der Menge $\mathfrak{M}$ und für jedes Paar von x unabhängiger reeller Zahlen γ' und γ'' mit

$$t\leqq\gamma''-\gamma'<1 \quad . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \quad (21)$$

wenigstens ein ganzzahliges Lösungspaar $x,\ y$ haben.

2. Zu diesem Zweck werde angenommen, dasz für ein Tripel θ, γ', γ'' obiger Art die Ungleichungen (4) *keine* ganzen Lösungen haben. Dann ist erst recht

$$\gamma''-\gamma' \leqq f(x,\theta)-\gamma'-[f(x,\theta)-\gamma'] < 1 \qquad \text{für } x=1,2,\ldots,N.$$

Setzt man

$$\tau=\gamma''-\gamma'$$

so ist wegen (20) und (21)

$$HN^{-1/3}=t\leqq\tau<1 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (22)$$

Wir wenden jetzt Hilfssatz 4 mit $u=(f(x,\theta)-\gamma')$ für $x=1,2,\ldots,N$ an; Addition lehrt

$$N\tau^2+2\sum_{h=1}^{\infty}\left\{\left(\frac{\sin\frac{\pi h\tau}{2}}{\frac{\pi h}{2}}\right)^2\sum_{x=1}^{N}\cos 2\pi h\,\{f(x,\theta)-\gamma'-\tfrac{1}{2}\tau\}\right\}=0,$$

d. h.

$$N\tau^2+\sum_{h=1}^{\infty}\left\{\left(\frac{\sin\frac{\pi h\tau}{2}}{\frac{\pi h}{2}}\right)^2\sum_{x=1}^{N}\left(e^{2\pi ih(f(x,\theta)-\gamma'-\frac{1}{2}\tau)}+e^{-2\pi ih(f(x,\theta)-\gamma'-\frac{1}{2}\tau)}\right)\right\}=0,$$

d. h.

$$N\tau^2\leqq 2\sum_{h=1}^{\infty}\left\{\left(\frac{\sin\frac{\pi h\tau}{2}}{\frac{\pi h}{2}}\right)^2\left|\sum_{x=1}^{N}e^{2\pi ihf(x,\theta)}\right|\right\} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (23)$$

3. Wegen unsrer Wahl von $\mathfrak{M}$ und θ gelten nach Hilfssatz 3 mit $k=\frac{1}{10}$ die sämtlichen Ungleichungen (10) mit $k=\frac{1}{10}$; d.h. es gilt wegen $t\leqq\tau$ (siehe (22)):

$$\left|\sum_{x=1}^{N}e^{2\pi ihf(x,\theta)}\right|<\frac{1}{10}HN^{2/3}(h\tau+1)^{3/4} \qquad (h=1,2,\ldots).$$

Aus (23) folgt also

$$N\tau^2\leqq\frac{HN^{2/3}}{5}\sum_{h=1}^{\infty}\left(\frac{\sin\frac{\pi h\tau}{2}}{\frac{\pi h}{2}}\right)^2(h\tau+1)^{3/4} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (24)$$

Es ist die Summe

$$\sum_{h=1}^{\infty}\left(\frac{\sin\frac{\pi h\tau}{2}}{\frac{\pi h}{2}}\right)^2(h\tau+1)^{3/4}=\tau^2\sum_{h=1}^{\left[\frac{1}{\tau}\right]}\left(\frac{\sin\frac{\pi h\tau}{2}}{\frac{\pi h\tau}{2}}\right)^2(h\tau+1)^{3/4}+$$

$$+\frac{4}{\pi^2}\sum_{h=\left[\frac{1}{\tau}\right]+1}^{\infty}\left(\frac{\sin\frac{\pi h\tau}{2}}{h}\right)^2(h\tau+1)^{3/4}<\tau^2\sum_{h=1}^{\left[\frac{1}{\tau}\right]}1\,.\,2^{3/4}+\frac{4}{\pi^2}\sum_{h=\left[\frac{1}{\tau}\right]+1}^{\infty}\frac{1}{h^2}\,.\,(2\tau)^{3/4}h^{3/4}<$$

$$<\tau\sqrt[4]{8}+\frac{4\tau^{3/4}\sqrt[4]{8}}{\pi^2}\int_{\left[\frac{1}{\tau}\right]}^{\infty}\frac{du}{u^{5/4}}=\tau\sqrt[4]{8}+\frac{16\sqrt[4]{8}}{\pi^2}\tau^{3/4}\left[\frac{1}{\tau}\right]^{-1/4},$$

also wegen $[u]>\frac{u}{2}$ für $u\geqq 1$:

$$<\tau\sqrt[4]{8}+\frac{32}{\pi^2}\tau,$$

d.h. wegen $\left(\frac{43}{25}\right)^4>8$ und $8\pi>8.3{,}14>25$:

$$<\tau\left\{\frac{43}{25}+32\,.\left(\frac{8}{25}\right)^2\right\}<5\tau.$$

Aus (24) folgt also

$$N\tau^2<HN^{2/3}\tau,$$

d.h.

$$\tau<HN^{-1/3},$$

was mit (22) im Widerspruch steht! Q.e.d.

§ 4. **Beweis von Satz 2.**

1. *Vorbemerkung.* Bei diesem Beweis dürfen wir ohne Beschränkung

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\psi(x)}{\sqrt[3]{x}}=0 \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (25)$$

annehmen, denn sonst setze man

$$\psi_1(x)=Min\,(\psi(x),\,log\,(3x))\qquad(x=1,2,\ldots),$$

so dasz

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\psi_1(x)}{\sqrt[3]{x}}=0,$$

und zeige Satz 2 mit ψ_1 statt ψ. Wegen

$$\psi_1(x) \leqq \psi(x)$$

folgt dann aber a fortiori die Richtigkeit von Satz 2 mit $\psi(x)$.

2. Wir setzen für ganzes $N \geqq 1$

$$\chi(N) = \sqrt[3]{N} \underset{\substack{1 \leqq x \leqq N \\ x \text{ ganz}}}{Min} \frac{\psi(x)}{\sqrt[3]{x}} \quad \ldots \ldots \quad (26)$$

und folgern hieraus zunächst

$$0 < \frac{\chi(N)}{\sqrt[3]{N}} \leqq \frac{\psi(x)}{\sqrt[3]{x}} \qquad (N \geqq 1\,;\, x = 1, 2, \ldots, N), \quad \ldots \quad (27)$$

während wir bemerken, dasz aus (27) speziell folgt:

$$0 < \frac{\chi(N)}{\sqrt[3]{N}} \leqq \frac{\psi(N)}{\sqrt[3]{N}} \to 0 \qquad \text{für } N \to \infty \quad \ldots \quad (28)$$

wegen (25).

Jedem $N \geqq 1$ kann man eindeutig die gröszte natürliche Zahl $n = n(N) \leqq N$ mit

$$\underset{\substack{1 \leqq x \leqq N \\ x \text{ ganz}}}{Min} \frac{\psi(x)}{\sqrt[3]{x}} = \frac{\psi(n)}{\sqrt[3]{n}}$$

zuordnen; aus (25) folgt dann sofort

$$n = n(N) \to \infty \qquad \text{für } N \to \infty \quad \ldots \ldots \quad (29)$$

und aus (26)

$$\chi(N) = \sqrt[3]{N} \frac{\psi(n)}{\sqrt[3]{n}} \geqq \psi(n).$$

Schlieszlich folgt deshalb aus (29):

$$\chi(N) \to \infty \text{ für } N \to \infty \quad \ldots \ldots \ldots \quad (30)$$

3. Weil die Voraussetzungen von Satz 1 gemäsz denen von Satz 2 erfüllt sind, gibt es nach der Behauptung von Satz 1 zu dem Zahlenpaar

$$N \geqq 2, \quad H = \tfrac{1}{2} \chi(N)$$

in $\alpha \leqq \theta \leqq \beta$ eine Menge $\mathfrak{M}$ mit den in dieser Behauptung erwähnten Eigenschaften. Diese Menge werde in der Folge mit $\mathfrak{M}(N)$ angedeutet. Weiter mögen K_1, K_2, K_3, K_4 geeignet zu wählende, von N unabhängige positive Zahlen bedeuten.

Dann ist für $N \geqq 2$:

$$N^{-4/3} B_N \log Min\left(3+\frac{3\,B_N}{(\beta-\alpha)\,N},\ 12 H^{-1} N^{1/3}\right) \leqq$$

$$\leqq N^{-4/3} B_N \log\left(K_1\left(2+\frac{B_N}{N}\right)\right) < K_2 D_N,$$

wo D_N die in Satz 2 definierte Zahl bedeutet, welche nach den Voraussetzungen dieses Satzes eine von N unabhängige obere Schranke besitzt. Aus (3) folgt also für $N \geqq 2$ (wegen (30) gilt $H \to \infty$ für $N \to \infty$):

$$\mathrm{m}\,\mathfrak{M}(N) \leqq 100\,(4\,(\beta-\alpha)\,H^{-3} + K_3 H^{-2}) < \tfrac{1}{4} K_4 H^{-2},$$

d.h. wegen der Definition von H:

$$\mathrm{m}\,\mathfrak{M}(N) < K_4 \{\chi(N)\}^{-2}. \qquad (31)$$

4. Wegen (30) gibt es eine Folge aufsteigender natürlicher Zahlen $N_1, N_2, \ldots$, derart, dasz

$$\chi(N_{\nu+1}) > 2\chi(N_\nu) \qquad (\nu = 1, 2, \ldots);$$

es konvergiert also die Reihe

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} \{\chi(N_\nu)\}^{-2}$$

und deshalb wegen (31) erst recht die Reihe

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} \mathrm{m}\,\mathfrak{M}(N_\nu). \qquad (32)$$

5. Es bedeute jetzt $\mathfrak{N}_n$ für $n = 1, 2, \ldots$ die Vereinigungsmenge der Mengen

$$\mathfrak{M}(N_n), \mathfrak{M}(N_{n+1}), \ldots;$$

dann gilt

$$\mathfrak{N}_1 > \mathfrak{N}_2 > \ldots \qquad (33)$$

Wegen der Konvergenz der Reihe (32) hat die *Durchschnittmenge* $\mathfrak{N}$ *der Mengen* (33) *das Masz Null. Fast alle* θ *aus* $\alpha \leqq \theta \leqq \beta$ *liegen also ausserhalb der Menge* $\mathfrak{N}$. Sei θ eine solche Zahl; dann *liegt* θ in höchstens endlich vielen der Mengen (33), also für gewisses $\nu_0 \geqq 1$ *in keiner der Mengen*

$$\mathfrak{M}(N_\nu) \qquad (\nu \geqq \nu_0).$$

Die Behauptung von Satz 1 lehrt dann für jedes $\nu \geqq \nu_0$, dasz das Ungleichungssystem

$$\gamma'_\nu \leqq f(x, \theta) - y < \gamma''_\nu\ ,\ 1 \leqq x \leqq N_\nu$$

für jedes Paar von x unabhängiger reeller Zahlen γ'_ν und γ''_ν mit

$$\gamma''_\nu - \gamma'_\nu \geqq \tfrac{1}{2} N_\nu^{-1/3} \chi(N_\nu) \qquad (\nu \geqq \nu_0) \quad \ldots\ldots \quad (34)$$

wenigstens ein ganzzahliges Lösungspaar x, y besitzt.

6. Wird nun einmal

$$\gamma'_\nu = \gamma + \tfrac{1}{2} N_\nu^{-1/3} \chi(N_\nu)\ ,\ \gamma''_\nu = \gamma + N^{-1/3} \chi(N_\nu) \qquad (\nu \geqq \nu_0)$$

und ein zweites Mal

$$\gamma'_\nu = \gamma - \tfrac{1}{2} N_\nu^{-1/3} \chi(N_\nu)\ ,\ \gamma''_\nu = \gamma \qquad (\nu \geqq \nu_0)$$

gesetzt, wo γ eine von ν unabhängige reelle Zahl bedeutet, so ist (34) erfüllt, und so folgt aus dem obigen, dasz die beiden Ungleichungssysteme

$$\gamma + \tfrac{1}{2} N_\nu^{-1/3} \chi(N_\nu) \leqq f(x, \theta) - y < \gamma + N_\nu^{-1/3} \chi(N_\nu), \quad 1 \leqq x \leqq N_\nu$$

bzw.

$$\gamma - \tfrac{1}{2} N_\nu^{-1/3} \chi(N_\nu) \leqq f(x, \theta) - y < \gamma, \quad 1 \leqq x \leqq N_\nu\,,$$

also erst recht die Systeme

$$\gamma < f(x, \theta) - y < \gamma + N_\nu^{-1/3} \chi(N_\nu), \quad 1 \leqq x \leqq N_\nu \quad \ldots \quad (35)$$

bzw.

$$\gamma - N_\nu^{-1/3} \chi(N_\nu) < f(x, \theta) - y < \gamma, \quad 1 \leqq x \leqq N_\nu \quad \ldots \quad (36)$$

für jedes $\nu \geqq \nu_0$ je ein ganzzahliges Lösungspaar x, y besitzen.

7. Jetzt beachte man, dasz aus (28) folgt:

$$N_\nu^{-1/3} \chi(N_\nu) \to 0 \qquad \text{für } \nu \to \infty.$$

Hieraus zieht man sofort die Folgerung, dasz ein Lösungspaar x, y von (35), bzw. von (36) nicht für jedes ν dasselbe sein kann, sondern, dasz vielmehr

$$x \to \infty \qquad \text{für } \nu \to \infty.$$

Anwendung von (27) mit $N = N_\nu$ lehrt nun, dasz a fortiori jedes der beiden Systeme

$$\gamma < f(x, \theta) - y < \gamma + \frac{\psi(x)}{\sqrt[3]{x}},$$

$$\gamma - \frac{\psi(x)}{\sqrt[3]{x}} < f(x, \theta) - y < \gamma$$

unendlich viele ganzen Lösungen x, y hat, q.e.d.