

essais sur modèle réduit on arrive souvent à adopter sans le savoir le régime de cavitation légère.

Or, avec les grands nombres de REYNOLDS c'est à dire pour les exécutions à grande échelle l'épaisseur de la couche limite est proportionnelle aux dimensions linéaires des organes mécaniques. Les dimensions des bulles, le temps de disparition, le chemin parcouru après le moment critique sont indépendants de l'échelle. Il s'ensuit que par unité de surface des organes, l'énergie superficielle mise en jeu augmente avec les dimensions linéaires et que pour les grandes machines hydrauliques ainsi que pour les hélices des bateaux les effets de cavitation peuvent être importants tandis qu'ils étaient imperceptibles pour les modèles.

Mathematics. — *Verteilungsfunktionen.* Von J. G. VAN DER CORPUT.
(Sechste Mitteilung).

(Communicated at the meeting of February 29, 1936).

Beweis einer hinreichenden Bedingung.

In der vierten Mitteilung (S. 21)¹⁾ habe ich Satz 20 formuliert, der eine hinreichende Bedingung liefert, damit eine vorgegebene Zahlenfolge so umgeordnet werden kann, dass die Menge der Verteilungsfunktionen der umgeordneten Menge eine vorgegebene Funktionenmenge sei. Die vorliegende Mitteilung enthält den Beweis dieses Satzes.

Hilfssatz 11: *Jeder Folge*

$$U: \quad u_1, u_2, \dots$$

kann eine positive Funktion $g(\gamma)$ zugeordnet werden, mit der Eigenschaft dass für jedes ganze $q > 0$ und für jede Funktion $\chi(\gamma)$ mit Eigenschaft $\mathcal{G}(U)$ die Folge u_q, u_{q+1}, \dots eine Teilfolge V enthält, die für jedes γ und jedes ganze $x > 0$ der Ungleichung

$$|V_\gamma(x) - x\chi(\gamma)| < 24\sqrt{x} + g(\gamma)$$

genügt.

Beweis von Hilfssatz 11.

Erster Schritt: Die Funktion

$$\psi(\gamma) = \chi(\gamma) - \sum_{\substack{e \text{ in } r(U) \\ e < \gamma}} r_e - \sum_{\substack{\sigma \text{ in } l(U) \\ \lambda \leq \gamma}} l_\lambda, \dots \dots \dots (97)$$

¹⁾ Die vorigen Mitteilungen kommen vor in diesen Proceedings 38, 813—821, 1058—1066 (1935); 39, 10—19, 19—26, 149—153 (1936).

wo $r_\rho = \chi(\rho+) - \chi(\rho)$ und $l_\lambda = \chi(\lambda) - \chi(\lambda-)$ ist, ist stetig, monoton-nichtabnehmend, ≥ 0 und ≤ 1 . Für jedes Zahlpaar η und ζ mit $\eta \leq \zeta$ ist

$$\psi(\zeta) - \psi(\eta) \leq \chi(\zeta) - \chi(\eta) \quad (98)$$

Beweis: Für jedes Zahlpaar η und ζ mit $\eta \leq \zeta$ ist

$$\psi(\zeta) - \psi(\eta) = \chi(\zeta) - \chi(\eta) - \sum_{\substack{\rho \text{ in } r(U) \\ \eta \leq \rho < \zeta}} r_\rho - \sum_{\substack{\lambda \text{ in } l(U) \\ \eta < \lambda \leq \zeta}} l_\lambda \quad . . . (99)$$

sodass einerseits wegen $r_\rho \geq 0$ und $l_\lambda \geq 0$ Ungleichung (98) gilt, andererseits $\psi(\zeta) - \psi(\eta) \geq 0$ ist. Hiermit ist die Monotonie von $\psi(\gamma)$ bewiesen.

Aus (97) geht hervor

$$\lim_{\gamma \rightarrow -\infty} \psi(\gamma) = \lim_{\gamma \rightarrow -\infty} \chi(\gamma) \geq 0, \text{ also } \psi(\gamma) \geq 0 \quad . . (100)$$

und

$$\psi(\gamma) \leq \chi(\gamma) \leq 1.$$

Die Funktion $\chi(\gamma)$ besitzt die Eigenschaft $\mathfrak{G}(U)$. Diese Funktion, also wegen (97) auch $\psi(\gamma)$, ist somit ausserhalb $r(U)$ nach rechts, ausserhalb $l(U)$ nach links stetig. Aus (99) folgt: gehört η zu $r(U)$, so ist

$$\lim_{\substack{\zeta > \eta \\ \zeta \rightarrow \eta}} (\psi(\zeta) - \psi(\eta)) = \chi(\eta+) - \chi(\eta) - r_\eta = 0;$$

gehört ζ zu $l(U)$, so ist

$$\lim_{\substack{\eta < \zeta \\ \eta \rightarrow \zeta}} (\psi(\zeta) - \psi(\eta)) = \chi(\zeta) - \chi(\zeta-) - l_\zeta = 0.$$

Folglich ist $\psi(\gamma)$ in $r(U)$ nach rechts, in $l(U)$ nach links, also überall stetig.

Hiermit ist die Behauptung des ersten Schrittes bewiesen.

Zweiter Schritt: Wird

$$\lim_{\gamma \rightarrow -\infty} \psi(\gamma) = \lim_{\gamma \rightarrow -\infty} \chi(\gamma) = d_0 \quad (\text{vergl. (100)}); \quad . . (101)$$

$$1 - \lim_{\gamma \rightarrow \infty} \chi(\gamma) = d_1; \quad -d_0 + \lim_{\gamma \rightarrow \infty} \psi(\gamma) = d_2, \quad . . (102)$$

$$\begin{aligned} \psi_2(\gamma) &= \frac{\psi(\gamma) - d_0}{d_2} && \text{falls } d_2 > 0 \quad (103) \\ &= 0 && \text{falls } d_2 = 0 \end{aligned}$$

gesetzt, so besitzt, falls $d_2 > 0$ ist, $\psi_2(\gamma)$ die Eigenschaft $\mathfrak{G}(U)$.

Beweis: Nach dem ersten Schritt ist $\psi_2(\gamma)$ stetig und monoton-nichtabnehmend. Aus der Definition folgt $0 \leq \psi_2(\gamma) \leq 1$.

Gibt es zwei Zahlen η und ζ mit

$$\psi_2(\eta) < \psi_2(\zeta), \dots \dots \dots (104)$$

so ist $\psi(\eta) < \psi(\zeta)$, also wegen (98) $\chi(\eta) < \chi(\zeta)$. Da $\chi(\gamma)$ die Eigenschaft $\mathfrak{G}(U)$, also die Eigenschaft $\mathfrak{G}(U)$ besitzt, enthält U dann unendlich viele Zahlen u mit $\eta \leqq u < \zeta$.

Gibt es ein η mit $\psi_2(\eta) < 1$ (bezw. ein ζ mit $\psi_2(\zeta) > 0$), so gilt (104) bei geeignetem gewähltem ζ (bezw. η), sodass U dann unendlich viele Zahlen mit $\eta \leqq u < \zeta$, also $u \leqq \eta$ (bezw. $\eta < \zeta$) enthält.

Folglich besitzt $\psi_2(\gamma)$ die Eigenschaft $\mathfrak{G}(U)$.

Dritter Schritt: Definition der Folge V und der Funktion $g(\gamma)$. Es werde

$$k = 3 + (\text{Elementanzahl von } r(U)) + (\text{Elementanzahl von } l(U))$$

gesetzt. Bei unbeschränkt wachsendem γ geht (97) wegen (102) über in

$$d_0 + d_1 + d_2 + \sum_{\varrho \text{ in } r(U)} r_\varrho + \sum_{\lambda \text{ in } l(U)} l_\lambda = 1.$$

Nach Hilfssatz 9 (S. 25) kann dann die Folge der natürlichen Zahlen in k zahlenfremde Mengen $\mathfrak{D}^0, \mathfrak{D}^1, \mathfrak{D}^2, \mathfrak{R}^\varrho, \mathfrak{Q}^\lambda$ (wobei ϱ die Menge $r(U)$ und λ die Menge $l(U)$ durchläuft) mit folgenden Eigenschaften zerlegt werden:

Für ein \varkappa mit $0 \leqq \varkappa \leqq 2$ und $d_\varkappa = 0$ ist \mathfrak{D}^\varkappa leer; für ein ϱ in $r(U)$ mit $r_\varrho = 0$ ist \mathfrak{R}^ϱ leer; für ein λ in $l(U)$ mit $l_\lambda = 0$ ist \mathfrak{Q}^λ leer; für jedes ganze $x \geqq 0$ ist

$$|\mathfrak{D}^\varkappa - d_\varkappa x| \leqq 5\sqrt{x} \quad (\varkappa = 0, 1, 2), \dots \dots \dots (105)$$

$$|\mathfrak{R}^\varrho - r_\varrho x| \leqq 5\sqrt{x} \quad (\varrho \text{ in } r(U)), \dots \dots \dots (106)$$

$$|\mathfrak{Q}^\lambda - l_\lambda x| \leqq 5\sqrt{x} \quad (\lambda \text{ in } l(U)); \dots \dots \dots (107)$$

hierin bezeichnen $\mathfrak{D}^\varkappa, \mathfrak{R}^\varrho$ und \mathfrak{Q}^λ die Anzahl der in $\mathfrak{D}^\varkappa, \mathfrak{R}^\varrho$ und \mathfrak{Q}^λ vorkommenden Zahlen $\leqq x$. Schliesslich ist für jedes γ und jedes ganze $x \geqq 0$

$$\left| \sum_{\substack{\varrho \text{ in } r(U) \\ \varrho < \gamma}} (\mathfrak{R}^\varrho - r_\varrho x) + \sum_{\substack{\lambda \text{ in } l(U) \\ \lambda < \gamma}} (\mathfrak{Q}^\lambda - l_\lambda x) \right| \leqq 5\sqrt{x},$$

also wegen (107)

$$\left| \sum_{\substack{\varrho \text{ in } r(U) \\ \varrho < \gamma}} (\mathfrak{R}^\varrho - r_\varrho x) + \sum_{\substack{\lambda \text{ in } l(U) \\ \lambda \leqq \gamma}} (\mathfrak{Q}^\lambda - l_\lambda x) \right| \leqq 10\sqrt{x} \dots \dots (108)$$

Durch Anwendung des vorigen Hilfssatzes (S. 150) mit u_q, u_{q+1}, \dots statt U zerlegt man die Folge u_q, u_{q+1}, \dots in $k + 1$ Teilmengen $D^0, D^1, D^2, R^e, L^1, Z$ mit den fünf im vorigen Hilfssatz genannten Eigenschaften (man beachte, dass die Begriffe $\mathfrak{G}(U); r(U); l(U); U$ nach unten (oben)

beschränkt; und Häufungspunkt von U sich nicht ändern, wenn U durch u_q, u_{q+1}, \dots ersetzt wird).

Ich definiere nun folgendermassen v_x für $x=1, 2, \dots$. Die natürliche Zahl x kommt in einer und nur einer der k Mengen $\mathfrak{D}^0, \mathfrak{D}^1, \mathfrak{D}^2, \mathfrak{R}^e, \mathfrak{L}^\lambda$ vor. Kommt x in \mathfrak{D}^ν ($0 \leq \nu \leq 2$) vor, so sei v_x die \mathfrak{D}^ν -te in D^ν auftretende Zahl; kommt x in \mathfrak{R}^e vor, so sei v_x die \mathfrak{R}^e -te in R_e auftretende Zahl und kommt schliesslich x in \mathfrak{L}^λ vor, so sei v_x die \mathfrak{L}^λ -te in L^λ auftretende Zahl. So ist die Folge

$$V: \quad v_1, v_2, \dots$$

restgelegt.

Die Funktion $g(\gamma)$ werde definiert wie folgt: für jeden Häufungspunkt von U sei $g(\gamma) = 3|\gamma|$; sonst sei

$$g(\gamma) = 3|\gamma| + \frac{3}{\gamma - \alpha} + \frac{3}{\beta - \gamma}; \quad \dots \dots \dots (109)$$

hierin bezeichnet (α, β) das grösste γ enthaltende Intervall, das in seinem Innern keinen Häufungspunkt von U enthält.

Vierter Schritt: Abschluss des Beweises. Die Folge u_q, u_{q+1}, \dots ist in $k+1$ Teilmengen $D^0, D^1, D^2, R^e, L^\lambda, Z$ zerlegt. V ist aus zu $D^0, D^1, D^2, R^e, L^\lambda$ gehörigen Zahlen aufgebaut, ist somit eine Teilfolge von u_q, u_{q+1}, \dots . Aus der im vorigen Schritt gegebenen Definition von V folgt für jedes γ und jedes ganze $x > 0$

$$V_\gamma(x) = \sum_{x=0}^2 D_\gamma^\nu(\mathfrak{D}_\nu) + \sum_{\varrho \text{ in } \mathfrak{r}(U)} R_\gamma^\varrho(\mathfrak{R}_\varrho) + \sum_{\lambda \text{ in } \mathfrak{l}(U)} L_\gamma^\lambda(\mathfrak{L}_\lambda);$$

hierin ist, falls d_1^0, d_2^0, \dots die Folge D^0 bezeichnet, $D_\gamma^0(t)$ die Anzahl der Zahlen $d_\xi^0 < \gamma$ mit $\xi \leq t$; analog $D_\gamma^1(t), D_\gamma^2(t), R_\gamma^\varrho(t)$, und $L_\gamma^\lambda(t)$.

Durch Anwendung der 5 im vorigen Hilfssatz genannten Eigenschaften, bzw. mit $x = \mathfrak{D}_0, \mathfrak{D}_1, \mathfrak{D}_2, \mathfrak{R}_\varrho$ und \mathfrak{L}_λ angewendet, liefert die obige für $V_\gamma(x)$ gefundene Beziehung die Ungleichung

$$\left. \begin{aligned} & | V_\gamma(x) - \mathfrak{D}_0 - \mathfrak{D}_2 \psi_2(\gamma) - \sum_{\substack{\varrho \text{ in } \mathfrak{r}(U) \\ \varrho < \gamma}} \mathfrak{R}_\varrho - \sum_{\substack{\lambda \text{ in } \mathfrak{l}(U) \\ \lambda \leq \gamma}} \mathfrak{L}_\lambda | \\ & \leq \frac{1}{2} |\gamma| + \frac{1}{2} |\gamma| + 2 + 2 \log x + \Sigma' \frac{1}{\gamma - \varrho} + \Sigma'' \frac{1}{\lambda - \gamma}; \end{aligned} \right\} (110)$$

hierin wird die Summe Σ' erstreckt über die etwaigen in $\mathfrak{r}(U)$ vorkommenden ϱ mit $\varrho < \gamma < P_\varrho$, und die Summe Σ'' über die etwaigen in $\mathfrak{l}(U)$ vorkommenden λ mit $A_\lambda < \gamma < \lambda$.

Aus den im vorigen Hilfssatz für P_ϱ und A_λ gegebenen Definitionen geht hervor, dass jede der zwei Summen Σ' und Σ'' aus höchstens einem Gliede besteht, und dieses Glied ist wegen (109) höchstens $\frac{1}{3} g(\gamma)$, sodass

die rechte Seite von (110) wegen $|\gamma| \leq \frac{1}{3}g(\gamma)$ und $1 + \log x < 2\sqrt{x}$ kleiner ist als $4\sqrt{x} + g(\gamma)$. Aus (105) und (108) folgt dann

$$|V_\gamma(x) - d_0 x - d_2 x \psi_2(\gamma) - x \sum_{\substack{\rho \text{ in } r(U) \\ \rho < \gamma}} r_\rho - x \sum_{\substack{\lambda \text{ in } l(U) \\ \lambda \leq \gamma}} l_\lambda| \\ < 4\sqrt{x} + g(\gamma) + 5\sqrt{x} + 5\sqrt{x} + 10\sqrt{x} = 24\sqrt{x} + g(\gamma).$$

Hieraus geht die Behauptung hervor; denn aus (97) folgt

$$d_0 + d_2 \psi_2(\gamma) + \sum_{\substack{\rho \text{ in } r(U) \\ \rho < \gamma}} r_\rho + \sum_{\substack{\lambda \text{ in } l(U) \\ \lambda \leq \gamma}} l_\lambda = d_0 + d_2 \psi_2(\gamma) + \chi(\gamma) - \psi(\gamma) \quad (111) \\ = \chi(\gamma) \text{ falls (103) gilt,}$$

und sonst ist $\psi_2(\gamma)$ identisch gleich Null und $d_2 = 0$, also wegen (101) und (102) $\psi(\gamma)$ identisch gleich d_0 , sodass auch dann Ausdruck (111) gleich $\chi(\gamma)$ ist.

Beweis von Satz 20.

Nach dem vorigen Hilfssatz, mit $q = q_1 = 1$ angewendet, enthält U eine Teilfolge

$$V^1: \quad v_1^{(1)}, v_2^{(1)}, \dots \text{ mit } |V_\gamma^1(x) - x \varphi_1(\gamma)| < 24\sqrt{x} + g(\gamma),$$

gültig für jedes γ und jedes ganze $x \geq 1$; hierin ist $V_\gamma^1(x)$ die Anzahl der Zahlen $v_\xi^{(1)} < \gamma$ mit $\xi \leq x$ (analog $V_\gamma^n(x)$ nachher).

Ich wähle die natürliche Zahl q_2 so gross, dass $v_1^{(1)}$ im System $u_1, u_2, \dots, u_{q_2-1}$ vorkommt. Wiederum nach dem vorigen Hilfssatz, aber jetzt mit $q = q_2$ angewendet, enthält die Folge $u_{q_2}, u_{q_2+1}, \dots$ eine Teilfolge

$$V^2: \quad v_1^{(2)}, v_2^{(2)}, \dots \text{ mit } |V_\gamma^2(x) - x \varphi_2(\gamma)| < 24\sqrt{x} + g(\gamma).$$

Ich wähle nun die natürliche Zahl q_3 so gross, dass $(v_1^{(1)}, v_1^{(2)}, v_2^{(2)})$ ein Teilsystem von (u_1, \dots, u_{q_3-1}) ist und ich wende wiederum den vorigen Hilfssatz an. So weitergehend finde ich natürliche Zahlen q_1, q_2, \dots und Folgen

$$V^n: \quad v_1^{(n)}, v_2^{(n)}, \dots \quad (n \geq 1)$$

mit folgenden Eigenschaften:

Ist $n \geq 2$, so bilden die Zahlen $v_\tau^{(n)} (\tau = 1, \dots, n-1; \tau = 1, \dots, \nu!)$ ein Teilsystem von (u_1, \dots, u_{q_n-1}) ; für jedes $n \geq 1$ ist V^n eine Teilfolge von $u_{q_n}, u_{q_n+1}, \dots$, und für jedes $n \geq 1$, jedes γ und jedes ganze $x > 0$ gilt die Ungleichung

$$|V_\gamma^n(x) - x \varphi_n(\gamma)| < 24\sqrt{x} + g(\gamma) \dots \dots \dots (112)$$

Die Folge

$$T: \quad v_1^{(1)}, v_1^{(2)}, v_2^{(2)}, v_1^{(3)}, \dots, v_6^{(3)}, \dots, v_1^{(n)}, \dots, v_{n!}^{(n)}, \dots$$

ist dann eine Teilfolge von U . Ich werde nun zeigen, dass \mathfrak{M} die Menge der Verteilungsfunktionen von T ist.

1. Ist $\psi(\gamma)$ irgend eine zu \mathfrak{M} gehörige Funktion, so ist für jedes γ
- $$\varphi_n(\gamma) \rightarrow \psi(\gamma), \quad \dots \quad (113)$$

wenn die natürliche Zahl n eine geeignet gewählte Folge N unbeschränkt wachsend durchläuft. Wird nun $x = 1! + \dots + n!$ gesetzt, so ist

$$V_\gamma^n(n!) \leq T_\gamma(x) \leq V_\gamma^n(n!) + 1! + \dots + (n-1)!,$$

also

$$\frac{T_\gamma(x) - V_\gamma^n(n!)}{x} \rightarrow 0.$$

Aus (112) (mit $n!$ statt x angewendet) und (113) folgt

$$\frac{V_\gamma^n(n!)}{n!} \rightarrow \psi(\gamma), \quad \text{also} \quad \frac{V_\gamma^n(n!)}{x} \rightarrow \psi(\gamma), \quad \text{somit} \quad \frac{T_\gamma(x)}{x} \rightarrow \psi(\gamma),$$

wenn n die Folge N unbeschränkt wachsend durchläuft. Die Funktion $\psi(\gamma)$ ist also eine Verteilungsfunktion von T .

2. Es sei $\psi(\gamma)$ eine Verteilungsfunktion von T , also

$$\frac{T_\gamma(x)}{x} \rightarrow \psi(\gamma), \quad \dots \quad (114)$$

wenn die natürliche Zahl x eine geeignet gewählte Folge X unbeschränkt wachsend durchläuft. Wird jedem x der Folge X die durch die Ungleichungen

$$1! + \dots + n! \leq x < 1! + \dots + (n+1)!$$

eindeutig festgelegte natürliche Zahl n zugeordnet, so ist für jedes γ

$$\begin{aligned} V_\gamma^n(n!) + V_\gamma^{n+1}(x-n!) &\leq T_\gamma(x) \\ &\leq V_\gamma^n(n!) + V_\gamma^{n+1}(x-n!) + 1! + \dots + (n-1)!, \end{aligned}$$

also wegen (112) (mit $n = n$ und mit $n+1$ statt n angewendet)

$$\begin{aligned} T_\gamma(x) - x\varphi_n(\gamma) - (x-n!)(\varphi_{n+1}(\gamma) - \varphi_n(\gamma)) &| \\ &\leq 48\sqrt{x} + 2g(\gamma) + 1! + \dots + (n-1)!. \end{aligned}$$

Durchläuft nun x die Folge X , so folgt hieraus wegen (114) und (59), dass $\varphi_n(\gamma)$ nach $\psi(\gamma)$ strebt, sodass $\psi(\gamma)$ eine Grenzfunktion der Folge $\varphi_1(\gamma), \varphi_2(\gamma), \dots$ ist.

Hiermit ist bewiesen, dass \mathfrak{M} die Menge der Verteilungsfunktionen von T ist. Hilfssatz 3¹⁾ besagt nun, dass U so umgeordnet werden kann, dass die umgeordnete Folge und T dieselben Verteilungsfunktionen besitzen, womit Satz 20 bewiesen ist.

¹⁾ These Proceedings 38, S. 1061 (1935).