Mathematics. — *Ueber einige* VINOGRADOFF*sche Methoden.* Von J. G. VAN DER CORPUT. (Erste Mitteilung).

(Communicated at the meeting of February 29, 1936).

Herr I. M. VINOGRADOFF hat der Zahlentheorie sehr vernüftige und überaus fruchtbare Methoden geschenkt. Der Entdecker veröffentlicht seine Beweise fast nur in Russisch und dabei noch so kurz gefasst, dass die Lektüre nicht leicht ist. Ich beabsichtige in diesen Noten einige seiner Methoden zu behandeln, zu verallgemeinern und etwas zu verschärfen. Um diese Mitteilungen zu verstehen, ist es nicht nötig, die VINOGRADOFF-schen Arbeiten zu kennen.

In dieser ersten Mitteilung geht es zunächst um die Frage, wie scharf eine beliebig vorgegebene reelle Zahl α durch einen Bruch $\frac{z}{u^k}$, dessen Nenner gleich der k^{ten} Potenz einer natürlichen Zahl u ist, approximiert werden kann; hierin ist k eine vorgegebene natürliche Zahl. Eine Antwort auf diese Frage bekommt der Leser in den folgenden zwei VINOGRADOFF-schen Sätzen [1]).

Satz 1: *Ist $k \geqq 1$ ganz, $\varkappa = 2^k$ und $\varepsilon > o$, so gehören zu jedem reellen α unendlich viele Brüche $\frac{z}{u^k}$ mit*

$$\left| \alpha - \frac{z}{u^k} \right| < u^{-k - \frac{2k}{k\varkappa + 2} + \varepsilon}.$$

Satz 2: *Ist $k \geqq 10$ ganz, so gehören zu jedem reellen α unendlich viele Brüche $\frac{z}{u^k}$ mit*

$$\left| \alpha - \frac{z}{u^k} \right| < u^{-k - \frac{1}{15 k^2 \log 10 k}}.$$

Man beachte, dass Satz 2 für grosses k viel schärfer als Satz 1 ist, weil dann $\frac{1}{2k}(k\varkappa + 2)$ viel grösser als $15\,k^2 \log 10\,k$ wird.

In dieser Mitteilung werde ich u.a. beweisen:

---

[1]) Satz 1 kommt vor in: Analytischer Beweis des Satzes über die Verteilung der Bruchteile eines ganzen Polynoms, Bull. Acad. Sci. URSS (6), **21** (1927) S. 567—578 (Russisch). Satz 2 in: Sur l'approximation au moyen des fractions rationnelles, dont les dénominateurs sont des puissances de nombres entiers. C. R. Acad. Sci. URSS 1935II, S. 1—5 (Russisch mit französischem Auszug).

Satz 3: *Ist k ganz* $\geqq 2$ *und wird*

$$3\zeta = 16k - \frac{9}{k} + 14 + 16k \log 8(k-1) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

gesetzt, so gehören zu jedem reellen α *unendlich viele Brüche* $\frac{z}{u^k}$ *mit*

$$\left| \alpha - \frac{z}{u^k} \right| < u^{-k-\frac{1}{\zeta}}.$$

Dieser Satz ist allgemeiner und in den Fällen, wo beide Sätze angewendet werden können, auch schärfer als Satz 2, da $15k^2 \log 10k$ für $k \geqq 10$ viel grösser als ζ ist. Für die Formulierung eines noch allgemeineren Satzes empfiehlt es sich, die folgende Voraussetzung einzuführen.

Voraussetzung A: Ich sage, dass Voraussetzung A gilt, falls $n > 1$, $t \geqq 2$, $\xi \geqq 0$, $\eta \geqq 0$ und

$$\left(2 + \frac{1}{n}\right)(8t-9)\,\xi + (24 + 16n \log 8(t-1))\,\eta \geqq 3$$

ist, weiter die Funktionen $f(x)$ und $g(x)$ für jedes positive ganze x definiert, ganzwertig, $\geqq 0$ und monoton-wachsend mit

$$\lim_{x \to \infty} \frac{\log(f(2x) - f(x))}{\log x} = n \quad \text{und} \quad \liminf_{x \to \infty} \frac{\log(f(x+1) - f(x))}{\log x} \geqq n-1$$

sind, und falls schliesslich für jedes positive ε die Anzahl der Paare natürlicher Zahlen y und y' mit $g(y) - g(y') = w$ für $w = 1, 2, \ldots$ den Wert $O(w^\varepsilon)$ hat.

Nun folgt der Hauptsatz dieser Mitteilung:

Satz 4: *Voraussetzung A sei erfüllt; zu der reellen irrationalen Zahl* α *gehöre eine Folge irreduzibler Brüche* $\frac{p}{q}$ *mit* $\left|\alpha - \frac{p}{q}\right| \leqq \frac{1}{q^2}$ *und mit unbeschränkt wachsenden Nennern* q*; jedem dieser Brüche* $\frac{p}{q}$ *sei eine natürliche Zahl* Y *mit*

$$\frac{1}{t} \leqq \liminf_{q \to \infty} \frac{\log Y}{\log q} \leqq \limsup_{q \to \infty} \frac{\log Y}{\log q} \leqq \frac{1}{t-1}$$

und

$$\limsup_{q \to \infty} \frac{\log g(Y)}{\log Y} \leqq t \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2)$$

zugeordnet.

Dann gehört zu jedem dieser Brüche $\frac{p}{q}$ *mit hinreichend grossem Nenner und zu jedem reellen* β *mindestens ein System ganzer Zahlen* x, y, z *mit*

$$0 < \alpha f(x) g(y) - \beta - z < x^{-\xi} y^{-\eta}, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (3)$$

$$Y \leqq y < 2Y; \quad 1 \leqq x < 2Y^{\frac{t-1-\eta}{n+\xi}} \text{ und } \liminf_{q \to \infty} \frac{\log x}{\log q} > 0 \quad . \quad . \quad (4)$$

Ich behaupte noch mehr: bei geeignet nur von n, t, ξ *und* η *abhängigem positivem* δ *gehört sogar zu jedem der Brüche* $\frac{p}{q}$ *mit hinreichend grossem Nenner und zu jedem reellen* β *mindestens ein System ganzer Zahlen* x, y, z *mit* (4) *und*

$$0 < \alpha f(x) g(y) - \beta - z < x^{-\xi-\delta} y^{-\eta-\delta} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (5)$$

Die zweite Mitteilung ist dem Beweis dieses Satzes gewidmet; in der vorliegenden ersten Mitteilung behandle ich einige Anwendungen. Aus Satz 4 geht unmittelbar hervor:

Satz 5: *Ist Voraussetzung A erfüllt und ist*

$$\limsup_{x \to \infty} \frac{\log g(x)}{\log x} \leqq t, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (6)$$

so hat (3) *für jedes reelle irrationale* α *und jedes reelle* β *unendlich viele ganzzahlige Lösungen* x, y, z*, wobei* x *und* y *positiv sind.*

Wird ζ durch (1) festgelegt und ist $k \geqq 2$ ganz, so sind Voraussetzung A und (6) mit

$$n = t = k; \quad \xi = \eta = \frac{1}{\zeta}; \quad f(x) = g(x) = x^k \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (7)$$

erfüllt, sodass die Ungleichung

$$0 < \alpha (xy)^k - \beta - z < (xy)^{-\frac{1}{\zeta}}$$

für jedes reelle irrationale α und jedes reelle β unendlich viele ganzzahlige Lösungen x, y, z mit positiven x und y besitzt; Satz 3 (der für rationales α evident ist) ist also nur ein Spezialfall von Satz 5.

Satz 5 liefert aber noch viel mehr. Setzt man z.B.

$$f(x) = g(x) = p_x^k \qquad (k \geqq 2 \text{ ganz}),$$

wo p_x die x^{te} Primzahl bezeichnet, und wird ζ wiederum durch (1) definiert, so sind die Voraussetzung A und die Bedingung (6) mit

$n = t = k$ und $\xi = \eta = \frac{1}{\zeta}$ erfüllt. Folglich gehören zu jedem irrationalen α unendlich viele Systeme ganzzahliger p, p', z mit

$$0 < \alpha - \frac{z}{(pp')^k} < (pp')^{-k-\frac{1}{\zeta}},$$

wobei p und p' sogar Primzahlen sind.

Die regelmäszige Kettenbruchentwicklung der irrationalen Zahl α

$$\alpha = b_0 + \cfrac{1}{b_1 + \cdots}$$

liefert die Näherungsbrüche

$$\frac{p_m}{q_m} = b_0 + \cfrac{1}{b_1 + \cdots + \cfrac{1}{b_m}} \qquad (m \geqq 0)$$

von α, die im folgenden Satz auftreten.

Satz 6: *Gilt für die Näherungsbrüche der irrationalen Zahl α die Beziehung*

$$\lim_{m \to \infty} \sup \frac{\log q_m}{\log q_{m-1}} \leqq \frac{t}{t-1}, \quad \ldots\ldots\ldots \quad (8)$$

so darf in Satz 5 die Voraussetzung (6) durch die weniger forderende Ungleichung

$$\lim_{x \to \infty} \inf \frac{\log g(x)}{\log x} \leqq t$$

ersetzt werden.

Beweis: Wegen der letzten Ungleichung gibt es eine Folge unbeschränkt wachsender natürlicher Zahlen Y mit (2). Bezeichnet $\frac{p}{q} = \frac{p_m}{q_m}$ den ersten Näherungsbruch von α mit $q_m \geqq Y^{t-1}$, so ist

$$\lim_{q \to \infty} \sup \frac{\log Y}{\log q} \leqq \frac{1}{t-1}.$$

Für hinreichend grosses q ist $Y^{t-1} > q_{m-1}$, also wegen (8)

$$\lim_{q \to \infty} \inf \frac{\log Y}{\log q} \geqq \frac{1}{t-1} \lim_{m \to \infty} \inf \frac{\log q_{m-1}}{\log q_m} \geqq \frac{1}{t}.$$

Folglich sind die Voraussetzungen von Satz 4 erfüllt, sodass die Behauptung von Satz 4, also von Satz 5 gilt.

Satz 7: *Ist Voraussetzung A mit* $\xi = 0$ *und* $\frac{1}{\eta} = 8 + \frac{16}{3} n \log 8(t-1)$ *erfüllt, gilt* (6) *und genügen die Näherungsbrüche der irrationalen Zahl* α *der Beziehung* (8), *so gehört zu jedem hinreichend grossen* L *und zu jedem reellen* β *mindestens ein System ganzer Zahlen* x, y, z *mit*

$$0 < \alpha f(x) g(y) - \beta - z < \frac{1}{L}; \quad 1 \leqq x < L^{\frac{t-1-\eta}{n\eta}} \text{ und } 1 \leqq y < L^{\frac{1}{\eta}}.$$

Beweis: Jeder Zahl $L \geqq 2^{\eta}$ und $\geqq 2^{\frac{n\eta}{t-1-\eta}}$ ordne ich die grösste natürliche Zahl Y mit

$$2\,Y \leqq L^{\frac{1}{\eta}} \text{ und } 2\,Y^{\frac{t-1-\eta}{n}} \leqq L^{\frac{t-1-\eta}{n\eta}}$$

zu. Bezeichnet dann wiederum $\frac{p}{q} = \frac{p_m}{q_m}$ den ersten Näherungsbruch von α mit $q_m \geqq Y^{t-1}$, so zeigt man genau wie beim Beweis des vorigen Satzes, dass die Voraussetzungen von Satz 4 erfüllt sind. Nach der zweiten Behauptung von Satz 4 besitzt die Ungleichung

$$0 < \alpha f(x) g(y) - \beta - z < y^{-\eta-\delta},$$

wo δ eine geeignet gewählte, nur von n und t abhängige positive Zahl bezeichnet, eine ganzzahlige Lösung x, y, z mit

$$1 \leqq x < 2\,Y^{\frac{t-1-\eta}{n}} \leqq L^{\frac{t-1-\eta}{n\eta}}$$

und

$$1 \leqq Y \leqq y < 2\,Y < L^{\frac{1}{\eta}}.$$

Aus der Definition von Y folgt $Y^{\eta+\delta} > L$ für hinreichend grosses L, also $y^{-\eta-\delta} \leqq Y^{-\eta-\delta} < \frac{1}{L}$. Hiermit ist Satz 7 bewiesen.

Der Spezialfall dieses Satzes mit $n = t = k$, $f(x) = g(x) = x^k$ und $\beta = 0$ liefert

Satz 8: *Ist* $k \geqq 2$ *ganz,* $\frac{1}{\eta} = 8 + \frac{16}{3} k \log 8(k-1)$ *und erfüllen die Näherungsbrüche* $\frac{p_m}{q_m}$ *der irrationalen Zahl* α *die Beziehung*

$$\limsup_{m \to \infty} \frac{\log q_m}{\log q_{m-1}} \leqq \frac{k}{k-1}, \quad \ldots\ldots\ldots \quad (9)$$

so gehört zu jedem hinreichend grossen L mindestens ein Bruch $\frac{z}{u^k}$ mit

$$\left| \alpha - \frac{z}{u^k} \right| < \frac{1}{L u^k} \text{ und } 1 \leqq u < L^{\frac{2k-1-\eta}{k\eta}}.$$

Wird die Bedingung (9) weggelassen, so finde ich ein viel unschärferes Resultat, nämlich:

Satz 9: *Ist $k \geqq 2$ ganz, so gehört zu jedem reellen α und zu jedem hinreichend grossen L wenigstens ein Bruch $\frac{z}{u^k}$ mit*

$$\left| \alpha - \frac{z}{u^k} \right| < \frac{1}{L u^k} \text{ und } 1 \leqq u < L^{\frac{32}{3} k^2 \log 8 (k-1)}.$$

Beweis: Ich darf α irrational voraussetzen, da die Behauptung sonst evident ist. Ich unterscheide verschiedene Fälle.

1. Es gebe einen Näherungsbruch $\frac{p}{q}$ von α mit

$$q^{\frac{1}{k}} \leqq L^{\frac{1}{\eta}} \leqq q^{\frac{1}{k-1}}.$$

Ich wende Satz 4 mit $n = t = k$; $f(x) = g(x) = x^k$; $\beta = 0$; $\xi = 0$ und $\eta^{-1} = 8 + \frac{16}{3} k \log 8 (k-1)$ an, wobei Y die grösste ganze Zahl mit

$$4\, Y^{\frac{2k-1-\eta}{k}} \leqq L^{\frac{2k-1-\eta}{k\eta}}$$

bezeichnet. Nach Satz 4 gibt es dann eine nur von k abhängige positive Zahl δ mit folgender Eigenschaft: ist L hinreichend gross, so gibt es einen Bruch $\frac{z}{u^k}$ mit

$$\left| \alpha - \frac{z}{u^k} \right| < \frac{1}{u^k\, Y^{\eta+\delta}} \text{ und } 1 \leqq u < L^{\frac{2k-1-\eta}{k\eta}}.$$

Aus der Definition von Y folgt, dass $Y^{\eta+\delta}$ für hinreichend grosses L grösser als L ist, sodass die Behauptung wegen

$$\frac{2k-1-\eta}{k\eta} < \frac{2}{\eta} = 16 + \frac{32}{3} k \log 8 (k-1) < \frac{32}{3} k^2 \log 8 (k-1)$$

gilt.

2. Tritt der unter 1. genannte Fall nicht auf, so gibt es bei hinreichend

grossem L zwei konsekutive Näherungsbrüche $\frac{P}{Q}$ und $\frac{p}{q}$ von α mit $Q < q$ und

$$Q^{\frac{1}{k-1}} < L^{\frac{1}{\eta}} < q^{\frac{1}{k}}.$$

Ist $q \geqq L\, Q^{k-1}$, so ist

$$\left| \alpha - \frac{P}{Q} \right| < \frac{1}{Qq} \leqq \frac{1}{L\, Q^k} \text{ und } Q < L^{\frac{k-1}{\eta}},$$

sodass wegen $\frac{k-1}{\eta} < \frac{32}{3} k^2 \log 8\,(k-1)$ die Behauptung mit $u = Q$ und $z = P\, Q^{k-1}$ gilt. Ich darf also $q < L\, Q^{k-1}$ annehmen, und ich wende jetzt wiederum Satz 4 mit $\xi = 0$ und $\eta^{-1} = 8 + \frac{16}{3} k \log 8\,(k-1)$ an, wobei Y die grösste ganze Zahl mit

$$4\, Y^{\frac{2k-1-\eta}{k}} \leqq q^{\frac{2k-1-\eta}{k^2}}$$

bezeichnet. Ich bekomme so eine nur von k abhängige positive Zahl δ mit folgender Eigenschaft: ist L hinreichend gross, so gibt es einen Bruch $\frac{z}{u^k}$ mit

$$\left| \alpha - \frac{z}{u^k} \right| < \frac{1}{u^k\, Y^{\eta+\delta}} \text{ und } 1 \leqq u \leqq 4\, Y^{\frac{2k-1-\eta}{k}}.$$

Für hinreichend grosses L ist $Y^{\eta+\delta}$ grösser als $q^{\frac{\eta}{k}} > L$ und man hat

$$u \leqq q^{\frac{2k-1-\eta}{k^2}} < (L\, Q^{k-1})^{\frac{2k-1-\eta}{k^2}} < L^{\left(1 + \frac{(k-1)^2}{\eta}\right) \cdot \frac{2k-1-\eta}{k^2}}.$$

Der letzte Exponent ist wegen $\eta < 1$ und $\frac{1}{\eta} < \frac{8}{3}(3 + 2k) \log 8\,(k-1)$ kleiner als

$$\left(\frac{1}{\eta} + \frac{k^2 - 2k + 1}{\eta}\right) \frac{2k-1}{k^2} < \frac{8}{3} \cdot \frac{(k^2 - 2k + 2)(2k-1)(3 + 2k)}{k^2} \log 8\,(k-1)$$

$$< \frac{32}{3} \frac{(k^2 - 2k + 2)(k+1)}{k} \log 8\,(k-1)$$

$$< \frac{32}{3} k^2 \log 8\,(k-1),$$

womit Satz 9 bewiesen ist.

Für $k \geqq 10$ hat Herr VINOGRADOFF das entsprechende Resultat gegeben, aber mit dem etwas grösseren Exponenten $15\, k^2 \log 10\, k$ statt $\frac{32}{3} k^2 \log 8\,(k-1)$. Es ist klar, dass diese VINOGRADOFFsche Behauptung Satz 2 als Spezialfall enthält.