dass die linearen Komposita $\psi(\gamma)$ die Eigenschaft $\mathfrak{E}(U)$ besitzen. Ich brauche also nur noch eine Folge $\varphi_1(\gamma), \varphi_2(\gamma), \ldots$ von Funktionen mit der Eigenschaft $\mathfrak{G}(U)$ anzugeben, die den drei in Satz 20 genannten Bedingungen genügt. Für $k=1$ habe ich das schon im vorigen Hilfssatz getan, da $\mathfrak{M}$ für $k=1$ aus nur einer Funktion $\psi_1(\gamma)$ mit der Eigenschaft $\mathfrak{E}(U)$ besteht. Ich darf also $k \geqq 2$ voraussetzen und eine aus Funktionen mit der Eigenschaft $\mathfrak{G}(u)$ bestehende Folge $\chi_1(\gamma), \chi_2(\gamma), \ldots$ annehmen, die die drei in Satz 20 genannten Eigenschaften besitzt, wenn darin $\mathfrak{M}$ durch die Menge $\mathfrak{M}^*$ der linearen Komposita $\mu_1 \psi_1(\gamma) + \ldots + \mu_{k-1} \psi_{k-1}(\gamma)$ ersetzt wird; hierin sind die $k-1$ Koeffizienten $\geqq 0$ und besitzen eine Summe gleich Eins. Um nun eine Folge $\varphi_1(\gamma), \varphi_2(\gamma), \ldots$ mit den verlangten Eigenschaften anzugeben, brauche ich nur den Beweis von Satz 8 wörtlich zu wiederholen, wenn ich nur auf S. 816 (Z. 1 v u.) und 817 (Z. 1 v. o.) die Worte „stetiger monoton-nichtabnehmender Funktionen $\geqq 0$ und $\leqq 1$" durch „von Funktionen mit der Eigenschaft $\mathfrak{G}(U)$" ersetze.

Hiermit ist Satz 12 bewiesen.

Mathematics. — *Ueber einige* VINOGRADOFF*sche Methoden.* Von J. G. VAN DER CORPUT. (Zweite Mitteilung).

(Communicated at the meeting of March 28, 1936).

In dieser zweiten Mitteilung leite ich mittels einer VINOGRADOFFschen Methode einige Hilfssätze ab, die ich für den Beweis des Hauptsatzes (Satz 4) der ersten Mitteilung [1]) brauche. Diese Methode stützt sich auf die folgenden Gedanken.

Es sei $H > 1$ und es bezeichne

$$\varphi(w; H) = \sum_{h=-\infty}^{\infty} a_{h,H}\, e^{2\pi i h w} \text{ mit } a_{0,H} = 0$$

eine goniometrische Reihe (oder ein goniometrisches Polynom), die im Intervall $\frac{1}{H} \leqq w \leqq 1$ einen Wert $\geqq 1$ besitzt (vergl. Hilfssatz 1): es mögen $l, Y, X_1, \ldots, X_l$ natürliche, α und β beliebige reelle Zahlen, $H_1, \ldots, H_l$ beliebige Zahlen > 1 bezeichnen, und es seien die Funktionen $f(x)$ und $g(x)$ für jedes ganze $x > 0$ definiert. Um zu zeigen, dass es wenigstens ein System ganzzahliger λ, x, y, z mit

$$1 \leqq \lambda \leqq l; \quad X_\lambda \leqq x < 2X_\lambda; \quad Y \leqq y < 2Y$$

und

$$0 < \alpha f(x) g(y) - \beta - z < \frac{1}{H_\lambda}$$

---

1) Siehe Proc. Royal Acad. Amsterdam, **39**, 345, (1936).

gibt, brauche ich nur zu zeigen, dass die Summe

$$\Sigma = \sum_{y=Y}^{2Y-1} \sum_{x_1=X_1}^{2X_1-1} \dots \sum_{x_l=X_l}^{2X_l-1} \varphi(\alpha f(x_1) g(y) - \beta; H_1) \dots \varphi(\alpha f(x_l) g(y) - \beta; H_l) \quad (10)$$

einen Absolutwert $< Y X_1 \dots X_l$ besitzt; denn wenn das Ungleichungssystem keine Lösung hat, so ist nach Definition von φ jeder Faktor $\varphi(\alpha f(x_\lambda) g(y) - \beta; H_\lambda) \geqq 1$ $(1 \leqq \lambda \leqq l)$, also $\Sigma \geqq Y X_1 \dots X_l$. Ich brauche somit eine obere Schranke für $|\Sigma|$, und um diese zu gewinnen, genügt es für jedes System ganzer nicht-verschwindender Zahlen $h_1, \dots, h_l$ eine obere Schranke für den Absolutwert der Summe

$$S = \sum_{y=Y}^{2Y-1} \sum_{x_1=X_1}^{2X_1-1} \dots \sum_{x_l=X_l}^{2X_l-1} e^{2\pi i \alpha g(y)(h_1 f(x_1) + \dots + h_l f(x_l))}$$

abzuleiten. Besonders erfreulich ist, dass Herr VINOGRADOFF mittels einer vernüftigen originellen Methode eine hinreichend kleine obere Schranke für $|S|$ gefunden hat. (Vergl. Hilfssatz 5). In dieser Schranke tritt die kleinste (von $h_1, \dots, h_l$, $X_1, \dots, X_l$ und der Wahl der Funktion f abhängige) Zahl N auf mit der Eigenschaft, dass für jedes ganze w die Anzahl der ganzzahligen Systeme $x_1, \dots, x_l$, $x'_1, \dots, x'_l$ mit

$$\sum_{\lambda=1}^{l} h_\lambda (f(x_\lambda) - f(x'_\lambda)) = w;$$

$$X_\lambda \leqq x_\lambda < 2X_\lambda \quad \text{und} \quad X_\lambda \leqq x'_\lambda < 2X_\lambda \qquad (\lambda = 1, \dots, l)$$

höchstens N ist. Darum leite ich in Hilfssatz 6 eine obere Schranke für N ab. So finde ich für $|\Sigma|$ eine obere Schranke, die mir ermöglicht, Satz 4 zu beweisen.

Ich werde nicht nur Satz 4 herleiten, sondern sogar den folgenden Satz, der etwas allgemeiner ist.

Satz 10: *Voraussetzung A sei erfüllt* [1]*; zu der reellen rationalen Zahl* α *gehöre eine Folge irreduzibler Brüche* $\frac{p}{q}$ *mit unbeschränkt wachsenden Nennern und mit* $\left| \alpha - \frac{p}{q} \right| \leqq \frac{\tau}{q^2}$, *wo* τ *eine von* q *abhängige Zahl* $\geqq 1$ *und* $< q$ *bedeutet; jedem dieser Brüche* $\frac{p}{q}$ *sei eine natürliche Zahl* Y *mit*

$$\frac{1}{t} \leqq \liminf_{q \to \infty} \frac{\log Y}{\log q} \leqq \limsup_{q \to \infty} \frac{\log Y}{\log \frac{q}{\tau}} \leqq \frac{1}{t-1} \quad . \quad . \quad . \quad (11)$$

und

$$\limsup_{q \to \infty} \frac{\log g(Y)}{\log Y} \leqq t \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (12)$$

zugeordnet.

---

[1]) Der Leser findet diese Voraussetzung in der ersten Mitteilung auf S. 345.

Bei geeignet nur von n, t, ξ und η abhängigem positivem δ gehört alsdann zu jedem der Brüche $\frac{p}{q}$ mit hinreichend grossem Nenner und zu jedem reellen β mindestens ein System ganzer Zahlen x, y, z mit

$$0 < \alpha f(x) g(y) - \beta - z < x^{-\xi-\delta} y^{-\eta-\delta},$$

$$Y \leqq y < 2Y; \quad 1 \leqq x < 2Y^{\frac{t-1-\eta}{n+\xi}} \text{ und } \liminf_{q \to \infty} \frac{\log x}{\log q} > 0.$$

Der Spezialfall dieses Satzes mit $\tau = 1$ ist mit Satz 4 der ersten Mitteilung identisch.

Hilfssatz 1: *Jedem positiven ε kann ein nur von ε abhängiges $c > 0$ zugeordnet werden mit der Eigenschaft, dass zu jedem $H > 1$ ein reelles goniometrisches Polynom*

$$\varphi(w; H) = \sum_{|h| \leqq c H^{1+\varepsilon}} a_{h,H} e^{2\pi i h w} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (13)$$

mit $a_{0,H} = 0$, $|a_{h,H}| \leqq c$ und

$$\varphi(w; H) \geqq 1 \qquad \text{im Intervall } \frac{1}{H} \leqq w \leqq 1$$

gehört.

Beweis: Es sei N die kleinste ganze Zahl $\geqq \frac{1+\varepsilon}{\varepsilon}$, sodass $N \geqq 2$ und $N \leqq (N-1)(1+\varepsilon)$ ist. Im Intervall $0 \leqq v \leqq 1$ definiere ich eine bei gegebenem ε eindeutig bestimmte N-mal stetig differentiierbare reelle Funktion $\psi(v)$ mit

$$\int_0^1 \psi(v)\, dv = 1 \text{ und } \psi^{(\nu)}(0) = \psi^{(\nu)}(1) = 0 \qquad (\nu = 0, \ldots, N-1).$$

Die Funktion $\chi(w, H)$ mit der Periode 1 und

$$\chi(w; H) = 2 - 2H\psi(Hw) \quad \text{im Intervall } 0 \leqq w \leqq \frac{1}{H}$$

$$= 2 \qquad \text{im Intervall } \frac{1}{H} < w < 1,$$

besitzt eine Fourierentwicklung

$$\chi(w; H) = \sum_{h=-\infty}^{\infty} a_{h,H} e^{2\pi i h w}.$$

Dabei ist

$$a_{0,H} = \int_0^1 2\,dw - 2H \int_0^{\frac{1}{H}} \psi(Hw)\,dw = 2-2\int_0^1 \psi(v)\,dv = 0$$

und

$$|a_{h,H}| = \left| \int_0^1 \chi(w;H)\, e^{-2\pi i h w}\,dw \right| \leqq \tfrac{1}{2}\int_0^{\frac{1}{H}} c_1 H\,dw + \tfrac{1}{2}\int_{\frac{1}{H}}^1 c_1\,dw < c_1;$$

hierin bezeichnet c_1 (desgl. c_2 nachher) eine geeignet gewählte, nur von ε abhängige Zahl.

Für $h \neq 0$ ist

$$a_{h,H} = \frac{1}{2\pi i h}\int_0^1 \chi'(w;H)\, e^{-2\pi i h w}\,dw$$

$$= -\frac{2H^2}{2\pi i h}\int_0^{\frac{1}{H}} \psi'(Hw)\, e^{-2\pi i h w}\,dw$$

$$= -\frac{2H^{N+1}}{(2\pi i h)^N}\int_0^{\frac{1}{H}} \psi^{(N)}(Hw)\, e^{-2\pi i h w}\,dw,$$

also

$$|a_{h,H}| \leqq c_2 H^N |h|^{-N}.$$

Wird nun c so gross gewählt, dass

$$c_1 \leqq c \text{ und } 2c_2 c^{-N} + \frac{2}{N-1} c_2 c^{1-N} \leqq 1$$

ist, dann ist $|a_{h,H}| \leqq c$ und

$$\Big| \sum_{|h| > cH^{1+\varepsilon}} a_{h,H}\, e^{2\pi i h w} \Big| \leqq 2 \sum_{h > cH^{1+\varepsilon}} c_2 H^N h^{-N}$$

$$< 2c_2 H^N (cH^{1+\varepsilon})^{-N} + 2\int_{cH^{1+\varepsilon}}^{\infty} c_2 H^N u^{-N}\,du$$

$$< 2c_2 c^{-N} + \frac{2}{N-1} c_2 H^N (cH^{1+\varepsilon})^{1-N}$$

$$< 2c_2 c^{-N} + \frac{2}{N-1} c_2 c^{1-N} \qquad \text{wegen } N \leqq (N-1)(1+\varepsilon)$$

$$\leqq 1,$$

sodass das im Hilfssatze durch die Formel (13) definierte goniometrische Polynom $\varphi(w; H)$ im Intervall $\frac{1}{H} \leqq w \leqq 1$ einen Wert $\geqq 2 - 1 = 1$ besitzt. Hiermit ist Hilfssatz 1 bewiesen.

Hilfssatz 2: *Es sei $\tau \geqq 1$, $U > 0$, D ganz, α reell; p und q seien teilerfremde ganze Zahlen ($q > 0$) mit $\left|\alpha - \frac{p}{q}\right| \leqq \frac{\tau}{q^2}$. Dann ist*

$$\sum_{v=D}^{D+q-1} \mathit{Min}\left(U, \frac{1}{(\alpha v)}\right) \leqq 6\,U\tau + 2\,q \log q;$$

hierin ist Min (a, b) die kleinere der Zahlen a und b; (w) ist die Entfernung von w zur nächsten ganzen Zahl.

Beweis: Wird $C = D + \frac{1}{2} q$ oder $D + \frac{1}{2}(q-1)$ gesetzt, je nachdem q gerade oder ungerade ist, so ist $|(v - C)| \leqq \frac{1}{2} q$ für jedes im Intervall $D \leqq v \leqq D + q - 1$ liegende v, also wegen $\left|\alpha - \frac{p}{q}\right| \leqq \frac{\tau}{q^2}$

$$\left|\alpha v - \alpha C - \frac{p}{q}(v - C)\right| \leqq \frac{\tau |v - C|}{q^2} \leqq \frac{\tau}{2q}. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (14)$$

Durchläuft v das System $D, D+1, \ldots, D+q-1$, so durchläuft $p(v-C)$, da p und q teilerfremd sind, ein vollständiges Restsystem mod. q. Bezeichnet r_v den zwischen $-\frac{1}{2}$ (excl,) und $\frac{1}{2}$ (incl.) gewählten Rest modulo Eins von $\alpha C + \frac{p}{q}(v-C)$, so bilden die Punkte $r_D, r_{D+1}, \ldots, r_{D+q-1}$ ein äquidistantes System mit Entfernung $\frac{1}{q}$. Die Anzahl der v mit $-\frac{5\tau}{2q} \leqq r_v \leqq \frac{5\tau}{2q}$ ist somit höchstens 6τ und der Beitrag dieser v zu der Summe $\sum_{v=D}^{D+q-1}$ ist höchstens $6\,U\tau$. Für alle v mit $r_v > \frac{5\tau}{2q}$ gilt wegen (14) die Ungleichung $(\alpha v) \geqq r_v - \frac{\tau}{2q}$, sodass der Beitrag dieser v höchstens

$$\frac{1}{\frac{2}{q}} + \frac{1}{\frac{3}{q}} + \ldots + \frac{1}{\frac{q}{q}} < q \int_1^q \frac{du}{u} = q \log q$$

ist. Genau so findet man dieselbe obere Schranke für den Beitrag der v mit $r_v < -\frac{5}{2q}$, womit Hilfssatz 2 bewiesen ist.

Hilfssatz 3: *Ist $\tau \geqq 1$, G ganz > 0, $U > 0$, α reell und bezeichnen p und q teilerfremde ganze Zahlen ($q > 0$) mit $\left|\alpha - \frac{p}{q}\right| \leqq \frac{\tau}{q^2}$, so ist*

$$\sum_{v=1}^{G} Min\left(U, \frac{1}{(\alpha v)}\right) \leqq (2+q^{-1} G)(6\, U\tau + 2q \log q).$$

Beweis: Ist $H = \left[\frac{G-1}{q}\right]$, so ist $H < 1 + q^{-1} G$. Ich wende nun den vorigen Hilfssatz $H+1$ mal an, nämlich mit $D = 1, q+1, \ldots, Hq+1$. Addition der entstehenden Ungleichungen liefert Hilfssatz 3.

Hilfssatz 4: *Sind F und G natürliche Zahlen, ist $\tau \geqq 1$ und ist der reellen Zahl α ein irreduzibler Bruch $\frac{p}{q}$ mit $q > 0$ und $\left|\alpha - \frac{p}{q}\right| \leqq \frac{\tau}{q^2}$ zugeordnet, so ist*

$$\sum_{v=1}^{G} \Big| \sum_{|w| \leqq \frac{1}{2}(F-1)} e^{2\pi i \alpha v w} \Big| \leqq (2+q^{-1} G)(6\, F\tau + 2q \log q).$$

Beweis: Für jedes nicht-ganze αv ist

$$\Big| \sum_{|w| \leqq \frac{1}{2}(F-1)} e^{2\pi i \alpha v w} \Big| \leqq \frac{2}{|\sin \pi \alpha v|} \leqq \frac{1}{(\alpha v)},$$

wo (z) die Entfernung von z zur nächsten ganzen Zahl bezeichnet. Es ist somit

$$\sum_{v=1}^{G} \Big| \sum_{|w| \leqq \frac{1}{2}(F-1)} e^{2\pi i \alpha v w} \Big| \leqq \sum_{v=1}^{G} Min\left(F, \frac{1}{(\alpha v)}\right)$$

$$\leqq (2+q^{-1} G)(6\, F\tau + 2q \log q)$$

nach dem vorigen Hilfssatz.

Hilfssatz 5: *Es mögen $l, Y, X_1, \ldots, X_l$ natürliche Zahlen bezeichnen; es sei $h_\lambda \neq 0$ ganz für $\lambda = 1, \ldots\ldots, l$; für jedes ganze $x > 0$ seien $f(x)$ und $g(x)$ definiert, ganzwertig und monoton-wachsend.*

Für jedes ganze w sei die Anzahl der ganzzahligen Systeme $x_1, \ldots, x_l, x'_1, \ldots\ldots, x'_l$ mit

$$\sum_{\lambda=1}^{l} h_\lambda (f(x_\lambda) - f(x'_\lambda)) = w; \quad X_\lambda \leqq x_\lambda < 2X_\lambda; \quad X_\lambda \leqq x'_\lambda < 2X_\lambda \quad (\lambda = 1, \ldots, l)$$

höchstens gleich der von w unabhängigen Zahl N; für jedes positive ganze v sei die Anzahl der positiven ganzzahligen Zahlpaare y und y' mit $g(y) - g(y') = v$ höchstens gleich $C v^\varepsilon$, wo C und ε positive von v unabhängige Zahlen bedeuten.

Wird schliesslich der reellen Zahl α *noch ein irreduzibler Bruch* $\frac{p}{q}$ *mit* $q > 0$ *und* $\left|\alpha - \frac{p}{q}\right| \leqq \frac{\tau}{q^2}$ *zugeordnet* $(\tau \geqq 1)$, *so hat die Summe*

$$S = \sum_{y=Y}^{2Y-1} \sum_{x_1=X_1}^{2X_1-1} \cdots \sum_{x_l=X_l}^{2X_l-1} e^{2\pi i \alpha g(y)(h_1 f(x_1) + \ldots + h_l f(x_l))}$$

einen Absolutwert

$$|S| \leqq Y^{\frac{3}{4}} N^{\frac{1}{2}} F^{\frac{1}{2}} + 3\, C^{\frac{1}{4}}\, Y^{\frac{1}{2}}\, G^{\frac{1}{4}\varepsilon} N^{\frac{1}{2}} F^{\frac{1}{4}} (1 + q^{-1} G)^{\frac{1}{4}} (F\tau + q \log q)^{\frac{1}{4}};$$

hierin ist

$$F = 1 + 2 \sum_{\lambda=1}^{l} |h_\lambda| (f(2X_\lambda) - f(X_\lambda)) \text{ und } G = g(2Y) - g(Y).$$

Beweis: Nach der CAUCHYschen Ungleichung ist

$$|S|^2 \leqq Y \sum_{y=Y}^{2Y-1} \left| \sum_{x_1=X_1}^{2X_1-1} \cdots \sum_{x_l=X_l}^{2X_l-1} \right|^2$$

$$= Y \sum_{y=Y}^{2Y-1} \sum_{x_1=X_1}^{2X_1-1} \cdots \sum_{x_l=X_l}^{2X_l-1} \sum_{x'_1=X_1}^{2X_1-1} \cdots \sum_{x'_l=X_l}^{2X_l-1} e^{2\pi i \alpha g(y) w}$$

wo

$$w = \sum_{\lambda=1}^{l} h_\lambda (f(x_\lambda) - f(x'_\lambda))$$

ist. Folglich ist

$$|S|^2 \leqq Y \sum_{x_1=X_1}^{2X_1-1} \cdots \sum_{x_l=X_l}^{2X_l-1} \sum_{x'_1=X_1}^{2X_1-1} \cdots \sum_{x'_l=X_l}^{2X_l-1} \left| \sum_{y=Y}^{2Y-1} e^{2\pi i \alpha g(y) w} \right|,$$

also

$$|S|^2 \leqq Y N \sum_{|w| \leqq \frac{1}{2}(F-1)} \left| \sum_{y=Y}^{2Y-1} e^{2\pi i \alpha g(y) w} \right|. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (15)$$

Hierin nimmt w höchstens F verschiedene Werte an, sodass nach der CAUCHYschen Ungleichung

$$\left\{ \sum_{|w| \leqq \frac{1}{2}(F-1)} \left| \sum_{y=Y}^{2Y-1} e^{2\pi i \alpha g(y) w} \right| \right\}^2 \leqq F \sum_{|w| \leqq \frac{1}{2}(F-1)} \left| \sum_{y=Y}^{2Y-1} e^{2\pi i \alpha g(y) w} \right|^2$$

$$= F \sum_{|w| \leqq \frac{1}{2}(F-1)} \sum_{y=Y}^{2Y-1} \sum_{y'=Y}^{2Y-1} e^{2\pi i \alpha (g(y) - g(y')) w}$$

$$\leqq F \sum_{y=Y}^{2Y-1} \sum_{y'=Y}^{2Y-1} \left| \sum_{|w| \leqq \frac{1}{2}(F-1)} e^{2\pi i \alpha (g(y) - g(y')) w} \right|$$

ist. Hierin ist

$$\sum_{y=Y}^{2Y-1} \sum_{y'=Y}^{2Y-1} = \sum_{\substack{y=Y \\ y=y'}}^{2Y-1} \sum_{y'=Y}^{2Y-1} + \sum_{\substack{y=Y \\ y<y'}}^{2Y-1} \sum_{y'=Y}^{2Y-1} + \sum_{\substack{y=Y \\ y>y'}}^{2Y-1} \sum_{y'=Y}^{2Y-1} = S_1 + S_2 + S_3$$

mit $|S_1| \leqq YF$ und

$$|S_2| = |S_3| \leqq \sum_{v=1}^{g(2Y)-g(Y)} C v^{\varepsilon} \Big| \sum_{|w| \leqq \frac{1}{2}(F-1)} e^{2\pi i \alpha v w} \Big|$$

$$\leqq C G^{\varepsilon} \sum_{v=1}^{G} \Big| \sum_{|w| \leqq \frac{1}{2}(F-1)} e^{2\pi i \alpha v w} \Big|$$

$$\leqq C G^{\varepsilon} (2 + q^{-1} G)(6 F\tau + 2 q \log q) \qquad \text{nach Hilfssatz 4}$$

$$< 3^3 C G^{\varepsilon} (1 + q^{-1} G)(F\tau + q \log q).$$

Folglich ist

$$\Big\{ \sum_{|w| \leqq \frac{1}{2}(F-1)} \Big| \sum_{y=Y}^{2Y-1} e^{2\pi i \alpha g(y) w} \Big| \Big\}^{\frac{1}{2}} <$$

$$Y^{\frac{1}{4}} F^{\frac{1}{2}} + 3 F^{\frac{1}{4}} C^{\frac{1}{4}} G^{\frac{1}{4}\varepsilon} (1 + q^{-1} G)^{\frac{1}{4}} (F\tau + q \log q)^{\frac{1}{4}},$$

sodass die Behauptung aus (15) folgt.

Hilfssatz 6: *Es sei $f(x)$ für jedes positive ganze x definiert, ganzwertig und monoton-wachsend mit*

$$\lim_{x \to \infty} \frac{\log (f(2x) - f(x))}{\log x} = n \text{ und } \liminf_{x \to \infty} \frac{\log (f(x+1) - f(x))}{\log x} \geqq n - 1, \tag{16}$$

wo $n > 1$ ist. Es seien $l, X_1, \ldots, X_l$ natürliche Zahlen; h_λ sei ganz $\neq 0$ für $\lambda = 1, \ldots, l$ mit

$$|h_1| X_1^n \geqq |h_2| X_2^n \geqq \ldots \geqq |h_l| X_l^n. \quad . \quad . \quad . \quad . \tag{17}$$

Bezeichnet $N = N\begin{pmatrix} X_1 \ldots X_l \\ h_1 \ldots h_l \end{pmatrix}$ die kleinste Zahl mit der Eigenschaft, dass für jedes ganze w die Anzahl der ganzzahligen Systeme $(x_1, \ldots, x_l, x'_1, \ldots, x'_l)$ mit

$$\sum_{\lambda=1}^{l} h_\lambda (f(x_\lambda) - f(x'_\lambda)) = w; \; X_\lambda \leqq x_\lambda < 2 X_\lambda, \; X_\lambda \leqq x'_\lambda < 2 X_\lambda \; (\lambda = 1, \ldots, l) \tag{18}$$

höchstens gleich N ist, so gehört zu jedem positiven ε eine nur von ε, l und der Wahl der Funktion f abhängige positive Zahl c_3 mit

$$N\begin{pmatrix} x_1 \ldots x_l \\ h_1 \ldots h_l \end{pmatrix} \leqq c_3 X_1^{1+\varepsilon} \ldots X_l^{1+\varepsilon} \prod_{\lambda=1}^{l-1} \left(1 + \frac{|h_{\lambda+1}| X_{\lambda+1}^n}{|h_\lambda| X_\lambda^{n-1}}\right).$$

Beweis: Wegen der Monotonie der Funktion f gibt es bei gegebenen w und x'_1 höchstens ein einziges x_1 mit $h_1(f(x_1) - f(x'_1)) = w$, sodass $N\binom{X_1}{h_1} \leqq X_1$ ist. Ich darf also $l \geqq 2$ und

$$N\begin{pmatrix} x_2 \ldots x_l \\ h_2 \ldots h_l \end{pmatrix} \leqq c_4 X_2^{1+\frac{1}{2}\varepsilon} \ldots X_l^{1+\frac{1}{2}\varepsilon} \prod_{\lambda=2}^{l-1} \left(1 + \frac{|h_{\lambda+1}| X_{\lambda+1}^n}{|h_\lambda| X_\lambda^{n-1}}\right)$$

annehmen, wobei c_4 (desgl. c_5, c_6, c_7, c_8 nachher) eine geeignet gewählte, nur von ε, l und f abhängige positive Zahl bezeichnet.

Aus (16) folgt

$$\sum_{\lambda=2}^{l} |h_\lambda| (f(2X_\lambda) - f(X_\lambda)) \leqq c_5 \sum_{\lambda=2}^{l} |h_\lambda| X_\lambda^{n+\frac{1}{2}\varepsilon}$$

$$\leqq c_5 X_2^{\frac{1}{2}\varepsilon} \ldots X_l^{\frac{1}{2}\varepsilon} \sum_{\lambda=2}^{l} |h_\lambda| X_\lambda^n$$

$$\leqq c_6 X_2^{\frac{1}{2}\varepsilon} \ldots X_l^{\frac{1}{2}\varepsilon} |h_2| X_2^n$$

wegen (17). Für jedes System $x_1, \ldots, x_l$, $x'_1, \ldots, x'_l$ mit (18) ist somit

$$|h_1(f(x_1) - f(x'_1)) - w| \leqq \sum_{\lambda=2}^{l} |h_\lambda| (f(2X_\lambda) - f(X_\lambda))$$

$$\leqq c_6 X_2^{\frac{1}{2}\varepsilon} \ldots X_l^{\frac{1}{2}\varepsilon} |h_2| X_2^n.$$

Aus (16) und der Monotonie von f geht hervor, dass im Intervall $X_1 \leqq x_1 < 2X_1$

$$|h_1| (f(x_1 + 1) - f(x_1)) \geqq c_7 |h_1| X_1^{n-1-\frac{1}{2}\varepsilon}$$

ist, sodass bei gegebenen $w, x_2, \ldots, x_l, x'_1, \ldots, x'_l$ die Anzahl der verschiedenen x_1 mit (18) höchstens

$$1 + \frac{2c_6}{c_7} X_1^{\frac{1}{2}\varepsilon} \ldots X_l^{\frac{1}{2}\varepsilon} \frac{|h_2| X_2^n}{|h_1| X_1^{n-1}} \leqq c_8 X_1^{\frac{1}{2}\varepsilon} \ldots X_l^{\frac{1}{2}\varepsilon} \left(1 + \frac{|h_2| X_2^n}{|h_1| X_1^{n-1}}\right)$$

ist. Bei gegebenen $w, x_2, \ldots, x_l, x'_2, \ldots, x'_l$ ist folglich die Anzahl der Zahlpaare (x_1, x'_1) mit (18) höchstens

$$c_8 X_1^{1+\frac{1}{2}\varepsilon} X_2^{\frac{1}{2}\varepsilon} \ldots X_l^{\frac{1}{2}\varepsilon} \left(1 + \frac{|h_2| X_2^n}{|h_1| X_1^{n-1}}\right),$$

sodass

$$N\begin{pmatrix} X_1 \dots X_l \\ h_1 \dots h_l \end{pmatrix} \leqq c_8\, X_1^{1+\frac{1}{2}\varepsilon} X_2^{\frac{1}{2}\varepsilon} \dots X_l^{\frac{1}{2}\varepsilon} \left(1 + \frac{|h_2|\, X_2^n}{|h_1|\, X_1^{n-1}}\right) N\begin{pmatrix} X_2 \dots X_l \\ h_2 \dots h_l \end{pmatrix}$$

$$\leqq c_3\, X_1^{1+\varepsilon} \dots X_l^{1+\varepsilon} \prod_{\lambda=1}^{l-1} \left(1 + \frac{|h_{\lambda+1}|\, X_{\lambda+1}^n}{|h_\lambda|\, X_\lambda^{n-1}}\right)$$

ist.

Hilfssatz 7: *Ist l ganz $\geqq 1$ und $L_1 \geqq L_2 \geqq \dots \geqq L_l \geqq 1$, so ist*

$$\sum_{\substack{|h_1| \leqq L_1 \\ h_1 \neq 0}} \dots \sum_{\substack{|h_l| \leqq L_l \\ h_l \neq 0}} \prod_{\lambda=1}^{l-1} \left(1 + \frac{|h_{\lambda+1}|^{\frac{1}{2}}}{|h_\lambda|^{\frac{1}{2}}}\right) \leqq c_9\, L_1 \dots L_l,$$

wo c_9 (desgl. c_{10} nachher) *nur von l abhängt.*

Beweis: Das im Hilfssatz auftretende Produkt $\prod_{\lambda=1}^{l-1}$ kann als Summe von 2^{l-1} Gliedern der Gestalt

$$B = \frac{|h_{\tau_1+1}|^{\frac{1}{2}}\, |h_{\tau_2+1}|^{\frac{1}{2}} \dots |h_{\tau_s+1}|^{\frac{1}{2}}}{|h_{\tau_1}|^{\frac{1}{2}}\, |h_{\tau_2}|^{\frac{1}{2}} \dots |h_{\tau_s}|^{\frac{1}{2}}}$$

geschrieben werden, wo $0 \leqq s \leqq l-1$, $1 \leqq \tau_1 < \tau_2 < \dots < \tau_s < l$ ist (für $s = 0$ ist $B = 1$). Man hat

$$\sum_{\substack{|h_1| \leqq L_1 \\ h_1 \neq 0}} \dots \sum_{\substack{|h_l| \leqq L_l \\ h_l \neq 0}} B \leqq c_{10}\, L_1 \dots L_l \frac{L_{\tau_1+1}^{\frac{1}{2}} \dots L_{\tau_s+1}^{\frac{1}{2}}}{L_{\tau_1}^{\frac{1}{2}} \dots L_{\tau_s}^{\frac{1}{2}}}$$

$$\leqq c_{10}\, L_1 \dots L_l,$$

woraus Hilfssatz 7 folgt.

Mathematics. — *Zur Theorie der p-Relationen.* Von R. WEITZENBÖCK.

(Communicated at the meeting of March 28, 1936).

Ich gebe im Nachstehenden einen besonders einfachen Beweis des Satzes von MERTENS, dass die quadratischen p-Relationen einen Modul für alle p-Relationen (ganzen rationalen Beziehungen zwischen G_d-Koordinaten = Determinanten einer Matrix) bilden. Er beruht auf dem Induktionsschluss von $d-1$ auf d. Bei $d = 2$ (Linienkoordinaten) lässt sich ein Satz von GORDAN aus der Theorie der binären Formen heranziehen, der hier in vereinfachter Form bewiesen wird.