2, 2. Es sei $\psi(\gamma)$ in ζ stetig. Bei hinreichend grossem k ist

$$\psi(\zeta)-\varepsilon < \psi(\gamma) < \psi(\zeta)+\varepsilon \quad \text{im Intervall } \zeta-\frac{2}{k} < \gamma < \zeta+\frac{2}{k},$$

also wegen (134)

$$\psi(\zeta)-\varepsilon < \psi(\eta_\tau) \leqq \psi(\eta_{\tau+1}) < \psi(\zeta)+\varepsilon.$$

Die Hauptungleichung, mit $\tau=\tau$ und mit $\tau+1$ statt τ angewendet, liefert

$$\psi(\zeta)-\varepsilon < \chi(\gamma_\tau) \leqq \chi(\gamma_{\tau+1}) < \psi(\zeta)+\varepsilon+\frac{1}{k},$$

womit wegen $\chi(\gamma_\tau) \leqq \chi(\zeta) \leqq \chi(\gamma_{\tau+1})$ die Behauptung von Schritt XI vollständig bewiesen ist.

Schritt XII: Abschluss des Beweises. Ich kann hier den vierten Schritt des Beweises von Satz 9 (dritte Mitteilung, S. 14) wörtlich wiederholen; ich brauche dabei nur die Worte „Satz 5", „stetig" und „$\varphi(\gamma) \leqq \psi(\gamma) \leqq \Phi(\gamma)$" durch „Satz 20", „besitzt die Eigenschaft $\mathfrak{G}(U)$" und „$\varphi(\gamma) \leqq \psi(\gamma) \leqq \Phi(\gamma)$ und Eigenschaft $\mathfrak{G}(U)$" zu ersetzen. Hiermit ist Satz 13 vollständig bewiesen.

Mathematics. — *Ueber einige* VINOGRADOFF*sche Methoden.* Von J. G. VAN DER CORPUT. (Dritte Mitteilung).

(Communicated at the meeting of March 28, 1936).

Hilfssatz 8: *Es sei $\varepsilon > 0$ und es sei c die in Hilfssatz 1 diesem ε zugeordnete Zahl*[1]*). Sind die Voraussetzungen von Satz 10 erfüllt*[1]*) und ist l ganz $\geqq 1$, werden jedem der in diesem Satz genannten Brüche $\frac{p}{q}$ natürliche Zahlen $X_1, \ldots, X_l$ mit*

$$c\,(2^{\xi+\eta+\varepsilon} X_{\lambda+1}^{\xi} Y^{\eta+\varepsilon})^{1+\varepsilon} \leqq X_\lambda \text{ und } X_{\lambda+1}^{n} \leqq X_\lambda^{n-1} \quad (\lambda=1,\ldots,l-1) \quad (19)$$

zugeordnet, und wird schliesslich noch

$$H_\lambda = (2\,X_\lambda)^{\xi}\,(2\,Y)^{\eta+\varepsilon} \qquad (\lambda=1,\ldots,l). \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (20)$$

gesetzt, so genügt die in (10) definierte Summe Σ der Beziehung[1]*)*

$$\Sigma = O\,(X_1 \ldots X_l)^{(\frac{1}{2}+\xi)(1+\varepsilon)}\, Y^{l(\eta+\varepsilon)(1+\varepsilon)}\, (X_1^{\frac{1}{2}n+\frac{1}{2}\xi+\varepsilon}\, Y^{\frac{3}{4}+\frac{1}{2}\eta+\varepsilon} +$$
$$+ X_1^{\frac{1}{4}n+\frac{1}{4}\xi+\varepsilon}\, Y^{\frac{1}{2}+\frac{1}{4}t+\frac{1}{4}\eta+\varepsilon}).$$

---

[1]) Vergl. die zweite Mitteilung, S. 495 und 496. Diese Proceedings, (**39** N⁰. 3 und 4), enthalten die erste und zweite Mitteilung, (S. 345 und 494).

In dieser Mitteilung soll $U = O(V)$ heissen, dass bei geeignet von q unabhängig gewähltem γ die Ungleichung $|U| \leqq \gamma V$ gilt.

Beweis: Aus (11) folgt

$$q = O(Y^{t+\frac{1}{2}\varepsilon}) \text{ und } q^{-1}\tau = O(Y^{1-t+\frac{1}{2}\varepsilon}), \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (21)$$

also

$$\tau = q \,.\, q^{-1}\tau = O(Y^{1+\varepsilon}) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (22)$$

Nach Hilfssatz 1 ist

$$\Sigma = O \sum_{\substack{|h_1| \leqq c H_1^{1+\varepsilon} \\ h_1 \neq 0}} \cdots \sum_{\substack{|h_l| \leqq c H_l^{1+\varepsilon} \\ h_l \neq 0}} |S_{h_1,\ldots,h_l}|, \quad . \quad . \quad . \quad (23)$$

wenn

$$S_{h_1,\ldots,h_l} = \sum_{y=Y}^{2Y-1} \sum_{x_1=X_1}^{2X_1-1} \cdots \sum_{x_l=X_l}^{2X_l-1} e^{2\pi i \alpha g(y)(h_1 f(x_1) + \ldots + h_l f(x_l))}$$

gesetzt wird. Hilfssatz 5, mit $\dfrac{\varepsilon}{t+\frac{1}{2}\varepsilon}$ statt ε angewendet, liefert

$$S_{h_1,\ldots,h_l} = O\{Y^{\frac{3}{4}} F^{\frac{1}{2}} + Y^{\frac{1}{2}} G^{\frac{\varepsilon}{4(t+\frac{1}{2}\varepsilon)}} F^{\frac{1}{4}} (1+q^{-1}G)^{\frac{1}{4}} (F\tau + q \log q)^{\frac{1}{4}}\} N^{\frac{1}{2}}, \quad . \; (24)$$

und zwar gleichmässig in $h_1, \ldots, h_l$. Hierin ist wegen (12)

$$G = g(2Y) - g(Y) = O(Y^{t+\frac{1}{2}\varepsilon})$$

und

$$F = 1 + 2 \sum_{\lambda=1}^{l} |h_\lambda| (f(2X_\lambda) - f(X_\lambda))$$

$$= 1 + O \sum_{\lambda=1}^{l} X_\lambda^{\xi} Y^{\eta+\varepsilon} X_\lambda^{n+\varepsilon} \quad \text{wegen (20) und Voraussetzung } A$$

$$= O\, X_1^{n+\xi+\varepsilon} Y^{\eta+\varepsilon}$$

wegen (19). Mit Rücksicht auf (21) und (22) folgt nun

$$(1+q^{-1}G)(F\tau + q \log q) = F\tau + q \log q + q^{-1}\tau G F + G \log q$$

$$= O(X_1^{n+\xi+\varepsilon} Y^{\eta+\varepsilon} Y^{1+\varepsilon} + Y^{t+\varepsilon}$$

$$+ Y^{1-t+\frac{1}{2}\varepsilon} Y^{t+\frac{1}{2}\varepsilon} X_1^{n+\xi+\varepsilon} Y^{\eta+\varepsilon} + Y^{t+\varepsilon})$$

$$= O(X_1^{n+\xi+\varepsilon} Y^{1+\eta+2\varepsilon} + Y^{t+\varepsilon}),$$

also

$$Y^2 G^{\frac{\varepsilon}{t+\frac{1}{2}\varepsilon}} F (1+q^{-1}G)(F\tau + q \log q)$$

$$= O\, Y^{2+\varepsilon} X_1^{n+\xi+\varepsilon} Y^{\eta+\varepsilon} (X_1^{n+\xi+\varepsilon} Y^{1+\eta+2\varepsilon} + Y^{t+\varepsilon})$$

$$= O(X_1^{2n+2\xi+2\varepsilon} Y^{3+2\eta+4\varepsilon} + X_1^{n+\xi+\varepsilon} Y^{2+\eta+t+3\varepsilon}).$$

Ausserdem ist

$$Y^3 F^2 = O\, X_1^{2n+2\xi+2\varepsilon}\, Y^{3+2\eta+2\varepsilon}$$

Formel (24) geht somit über in

$$S_{h_1,\ldots,h_l} = O\left(X_1^{\frac{1}{2}n+\frac{1}{2}\xi+\frac{1}{2}\varepsilon}\, Y^{\frac{3}{4}+\frac{1}{2}\eta+\varepsilon} + X_1^{\frac{1}{4}n+\frac{1}{4}\xi+\frac{1}{4}\varepsilon}\, Y^{\frac{1}{2}+\frac{1}{4}\eta+\frac{1}{4}t+\varepsilon}\right) N^{\frac{1}{2}}. \quad (25)$$

Jetzt brauche ich noch eine obere Schranke für $N = N\begin{pmatrix} X_1 \ldots . X_l \\ h_1 \ldots . h_l \end{pmatrix}$ für jedes in der Summe Σ vorkommende Glied. Für $\lambda = 1, \ldots, l-1$ ist

$$\begin{aligned} |h_{\lambda+1}|\, X_{\lambda+1}^n &\leqq c\, H_{\lambda+1}^{1+\varepsilon}\, X_{\lambda+1}^n \\ &= c\,(2^{\xi+\eta+\varepsilon}\, X_{\lambda+1}^{\xi}\, Y^{\eta+\varepsilon})^{1+\varepsilon}\, X_{\lambda+1}^n && \text{wegen (20)} \\ &\leqq X_\lambda \,.\, X_\lambda^{n-1} && \text{wegen (19)} \\ &\leqq |h_\lambda|\, X_\lambda^n, \end{aligned}$$

sodass Hilfssatz 6 angewendet werden kann. Dieser Hilfssatz besagt

$$\begin{aligned} N = N\begin{pmatrix} X_1 \ldots X_l \\ h_1 \ldots . h_l \end{pmatrix} &= O\,(X_1 \ldots X_l)^{1+\varepsilon} \prod_{\lambda=1}^{l-1} \left(1 + \frac{|h_{\lambda+1}|\, X_{\lambda+1}^n}{|h_\lambda|\, X_\lambda^{n-1}}\right) \\ &= O\,(X_1 \ldots X_l)^{1+\varepsilon} \prod_{\lambda=1}^{l-1} \left(1 + \frac{|h_{\lambda+1}|}{|h_\lambda|}\right) \end{aligned}$$

vermöge (19), also

$$N^{\frac{1}{2}} \begin{pmatrix} X_1 \ldots X_l \\ h_1 \ldots . h_l \end{pmatrix} = O\,(X_1 \ldots X_l)^{\frac{1}{2}(1+\varepsilon)} \prod_{\lambda=1}^{l-1} \left(1 + \frac{|h_{\lambda+1}|^{\frac{1}{2}}}{|h_\lambda|^{\frac{1}{2}}}\right).$$

Aus Hilfssatz 7 folgt nun

$$\begin{aligned} \sum_{\substack{|h_1| \leqq c H_1^{1+\varepsilon} \\ h_1 \neq 0}} \cdots \sum_{\substack{|h_l| \leqq c H_l^{1+\varepsilon} \\ h_l \neq 0}} N^{\frac{1}{2}} \begin{pmatrix} X_1 \ldots X_l \\ h_1 \ldots . h_l \end{pmatrix} &= O\,(X_1 . \ldots X_l)^{\frac{1}{2}(1+\varepsilon)}\, (H_1 \ldots H_l)^{1+\varepsilon} \\ &= O\,(X_1 \ldots X_l)^{(\frac{1}{2}+\xi)(1+\varepsilon)}\, Y^{l(\eta+\varepsilon)(1+\varepsilon)} \end{aligned}$$

wegen (20), sodass die Behauptung aus (23) und (25) hervorgeht.

Beweis von Satz 10.

Voraussetzung A enthält die Ungleichungen $t \geqq 2$ und

$$\left(2 + \frac{1}{n}\right)(8t-9)\,\xi + (24 + 16\, n \log 8\,(t-1))\,\eta \leqq 3 . \quad . \quad . \quad (26)$$

Hieraus folgt $\xi < \frac{1}{2}$ und

$$3\xi + 3\left(\frac{1-\xi}{t-1} + 8n + 8\xi\right)\eta < 3,$$

also

$$8(n+\xi)\eta < (1-\xi)\left(1 - \frac{\eta}{t-1}\right) = (1-\xi)\frac{t-1-\eta}{t-1}. \quad . \quad . \quad (27)$$

Ist l die kleinste ganze Zahl mit

$$\left(1-\frac{1}{n}\right)^l < \frac{1}{8(t-1)}, \quad \text{also} \quad \left(1-\frac{1}{n}\right)^{l-1} \geqq \frac{1}{8(t-1)}, \quad . \quad (28)$$

so ist $l \geqq 1$ und

$$l-1 \leqq \frac{\log 8(t-1)}{-\log\left(1-\frac{1}{n}\right)} < n \log 8(t-1). \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (29)$$

Wird

$$\chi = \tfrac{1}{2}t - \tfrac{3}{4} - (\tfrac{1}{2}-\xi)\frac{n(t-1-\eta)}{n+\xi}\left(1-\left(1-\frac{1}{n}\right)^l\right)$$

gesetzt, so gilt wegen

$$(\tfrac{1}{2}-\xi)\frac{n}{n+\xi} = \tfrac{1}{2} - \frac{\xi(1+2n)}{2(n+\xi)} \geqq \tfrac{1}{2} - \xi\frac{1+2n}{2n}$$

und (28) die Ungleichung

$$\chi < \tfrac{1}{2}t - \tfrac{3}{4} - \left(\tfrac{1}{2} - \xi\frac{1+2n}{2n}\right)(t-1-\eta)\left(1-\frac{1}{8(t-1)}\right)$$

$$< \tfrac{1}{2}t - \tfrac{3}{4} - \left(\tfrac{1}{2} - \xi\frac{1+2n}{2n}\right)(t-1)\left(1-\frac{1}{8(t-1)}\right) + \tfrac{1}{2}\,.\,\eta\,.\,1$$

$$= -\tfrac{3}{16} + \tfrac{1}{16}\left(2+\frac{1}{n}\right)(8t-9)\xi + \tfrac{1}{2}\eta,$$

sodass aus (26) und (29) folgt

$$\chi + l\eta < 0.$$

Hieraus folgt mit Rücksicht auf (27), dass bei geeignet gewähltem, nur von n, t, ξ und η abhängigem positivem ε

$$\left.\begin{array}{l}(-1+(\tfrac{1}{2}+\xi)(1+\varepsilon))\,n\left(1-\left(1-\dfrac{1}{n}\right)^{l}\right)\dfrac{t-1-\eta}{n+\xi}+\dfrac{\varepsilon\,(t-1-\eta)}{n+\xi}\\ \qquad +\,l\,(\eta+\varepsilon)(1+\varepsilon)-\tfrac{3}{4}+\tfrac{1}{2}\,t+\varepsilon<0\end{array}\right\}. \qquad (30)$$

und ausserdem

$$-\frac{(1-\xi\,(1+\varepsilon))\,(t-1-\eta)}{8\,(t-1)\,(n+\xi)}+(\eta+\varepsilon)\,(1+\varepsilon)<0\ .\ \ .\ \ . \qquad (31)$$

ist. Der vorige Hilfssatz kann nun mit

$$X_1=[Y^{\frac{t-1-\eta}{n+\xi}}] \text{ und } X_{\lambda+1}=[X_\lambda^{1-\frac{1}{n}}] \quad (\lambda=1,\ldots,l-1)\ .\ \ .\ \ . \qquad (32)$$

angewendet werden. Denn es ist alsdann für $\lambda=1,\ldots,l-1$

$$\begin{aligned}(X_{\lambda+1}^{\xi}\,Y^{\eta+\varepsilon})^{1+\varepsilon}\,X_\lambda^{-1} &\leqq X_\lambda^{-1+\xi(1+\varepsilon)}\,Y^{(\eta+\varepsilon)(1+\varepsilon)}\\ &\leqq X_l^{-(1-\xi(1+\varepsilon))}\,Y^{(\eta+\varepsilon)(1+\varepsilon)}\\ &\leqq X_1^{-(1-\xi(1+\varepsilon))\left(1-\frac{1}{n}\right)^{l-1}}\,Y^{(\eta+\varepsilon)(1+\varepsilon)}\\ &= O\,Y^{-(1-\xi(1+\varepsilon))\frac{1}{8(t-1)}\cdot\frac{t-1-\eta}{n+\xi}+(\eta+\varepsilon)(1+\varepsilon)}\end{aligned}$$

wegen (28) und (32). Aus (31) folgt, dass der letzte Exponent negativ ist, sodass für hinreichend grosses q

$$c\,(2^{\xi+\eta+\varepsilon}\,X_{\lambda+1}^{\xi}\,Y^{\eta+\varepsilon})^{1+\varepsilon}\leqq X_\lambda \qquad (\lambda=1,\ldots,l-1)$$

ist. Ausserdem ist $X_{\lambda+1}^{n}\leqq X_\lambda^{n-1}$ für $\lambda=1,\ldots,l-1$, sodass die Voraussetzungen des vorigen Hilfssatzes erfüllt sind. Dieser Hilfssatz liefert

$$\begin{aligned}\Sigma &= O(X_1\ldots X_l)^{(\frac{1}{2}+\xi)(1+\varepsilon)}\,Y^{l(\eta+\varepsilon)(1+\varepsilon)}\,X_1^{\varepsilon}\,(Y^{\frac{1}{2}(t-1-\eta)+\frac{3}{4}+\frac{1}{2}\eta+\varepsilon}+Y^{\frac{1}{4}(t-1-\eta)+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}t+\frac{1}{4}\eta+\varepsilon})\\ &= O(X_1\ldots X_l)^{(\frac{1}{2}+\xi)(1+\varepsilon)}\,X_1^{\varepsilon}\,Y^{l(\eta+\varepsilon)(1+\varepsilon)+\frac{1}{4}+\frac{1}{2}t+\varepsilon},\end{aligned}$$

also

$$Y^{-1}\,(X_1\ldots X_l)^{-1}\,\Sigma=O\,(X_1\ldots X_l)^{-1+(\frac{1}{2}+\xi)(1+\varepsilon)}\,Y^{\frac{\varepsilon\,(t-1-\eta)}{n+\xi}+l(\eta+\varepsilon)(1+\varepsilon)-\frac{3}{4}+\frac{1}{2}t+\varepsilon}$$

Hierin ist

$$(X_1\ldots X_l)^{-1}=O X_1^{-1-\left(1-\frac{1}{n}\right)-\ldots-\left(1-\frac{1}{n}\right)^{l-1}}=O X_1^{-n\left(1-\left(1-\frac{1}{n}\right)^{l}\right)}.$$

Folglich ist Y^{-1} $(X_1 \ldots\ldots X_l)^{-1}\, \Sigma$ höchstens derselben Grössenordnung wie die Potenz von y, deren Exponent gleich der linken Seite von (30), also negativ ist.

Für hinreichend grosses q ist also

$$Y^{-1} X_1^{-1} \ldots X_l^{-1} \,|\, \Sigma \,|< 1.$$

Nach der zu Anfang der zweiten Mitteilung gemachten Bemerkung existiert darum alsdann wenigstens ein System ganzer Zahlen λ, x, y, z mit $1 \leqq \lambda \leqq l$, $X_\lambda \leqq x < 2\, X_\lambda$, $Y \leqq y < 2\, Y$ und

$$0 < \alpha\, f(x)\, g\,(y) - \beta - z < \frac{1}{H_\lambda} = \frac{1}{(2\, X_\lambda)^\xi\, (2\, Y)^{\eta + \varepsilon}}.$$

Hierin ist $x < 2\, X_\lambda \leqq 2\, X_1 < 2^t\, Y^t$ und $y < 2\, Y$, also

$$(2\, X_\lambda)^\xi\, (2\, Y)^{\eta + \varepsilon} \geqq x^{\xi + \frac{\varepsilon}{1+t}}\, y^{\eta + \frac{\varepsilon}{1+t}},$$

somit

$$0 < \alpha\, f(x)\, g\,(y) - \beta - z < \frac{1}{x^{\xi + \delta}\, y^{\eta + \delta}}$$

falls $\delta = \frac{\varepsilon}{1+t}$ gesetzt wird. Schliesslich ist

$$x < 2\, X_\lambda \leqq 2\, X_1 \leqq 2\, Y^{\frac{t-1-\eta}{n+\xi}}$$

und

$$\begin{aligned}
\liminf_{q \to \infty} \frac{\log x}{\log q} &\geqq \liminf_{q \to \infty} \frac{\log X_l}{\log q} \\
&= \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{l-1} \cdot \frac{t-1-\eta}{n+\xi} \liminf_{q \to \infty} \frac{\log Y}{\log q} \qquad \text{wegen (32)} \\
&\geqq \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{l-1} \cdot \frac{t-1-\eta}{n+\xi} \cdot \frac{1}{t} > 0
\end{aligned}$$

wegen (11). Hiermit ist Satz 10 vollständig bewiesen.