Mathematics. — *Eine Klasse von Ringen im Hilbertschen Raum.* By HANS FREUDENTHAL. (Communicated by Prof. L. E. J. BROUWER.)

(Communicated at the meeting of May 23, 1936.)

1. (a) $\mathfrak{R}$ sei ein *separabler reeller euklidischer Raum* (Elemente: a, b, c, d, e; reelle Zahlen: kleine griechische Buchstaben); es gebe also in $\mathfrak{R}$ ein inneres Produkt mit den üblichen Eigenschaften und die zugehörige starke Topologie.

(b) $\mathfrak{R}$ sei ein *kommutativer einseitig topologischer Ring* ($\lim\limits_n ab_n = a \lim\limits_n b_n$).

(c) $|ab| \leqq \delta_a |b|$ unabhängig von b.

(d) $(ca, b) = (a, cb)$.

2. Wir vervollständigen $\mathfrak{R}$ metrisch zu einem reellen Hilbertschen Raum $\mathfrak{H}$ (Elemente: x, y).

H_a sei der überalldicht definierte beschränkte (wegen 1c) Hermitesche (wegen 1d) lineare Operator, der $x \in \mathfrak{R}$ überführt in $ax \in \mathfrak{R}$; $H_a x = ax$.

H_a läszt sich stetig auf ganz $\mathfrak{H}$ fortsetzen. Das deuten wir so: ax wird sinnvoll für alle $a \in \mathfrak{R}$, $x \in \mathfrak{H}$. Man sieht, dasz dabei alle vom Produkt geforderten Eigenschaften erhalten bleiben (in 1c tritt x für b ein, in 1d tritt x für a, y für b ein).

Weiter dehnen wir die Definition des Produktes so aus, dasz wir,

$$\left.\begin{array}{l} \text{falls } \lim\limits_n a_n \text{ und (für alle } x) \lim a_n x \text{ existieren,} \\ \lim\limits_n a_n \in \overline{\mathfrak{R}} \quad , \quad (\lim\limits_n a_n)\, x = \lim\limits_n a_n x \text{ setzen.} \end{array}\right\} \qquad (*)$$

$\overline{\mathfrak{R}}$ ist linear, und die erweiterte Multiplikation erfüllt alle Bedingungen aus 1 (insbesondere gelten b und c, weil eine konvergente Folge gleichmäszig beschränkter linearer Operatoren in einem linearen Raum einen ebenso beschränkten Limes besitzt). Elemente von $\overline{\mathfrak{R}}$ werden wie die von $\mathfrak{R}$ bezeichnet.

Ein in $\mathfrak{H}$ überall definierter Operator H heisze *realisierbar*, wenn $a \in \overline{\mathfrak{R}}$ mit $Hx = ax$ (identisch in $x \in \mathfrak{H}$) existiert; wir setzen dann $H = H_a$.

3. Wir suchen eine *„realisierbare Spektraldarstellung"* für die H_a. Wir betrachten ein $a \in \overline{\mathfrak{R}}$ mit $\delta_a \leqq 1$ (das ist keine Einschränkung, da sich diese Normierung durch Multiplikation mit einer reellen Zahl stets erreichen läszt).

Wenn wir jetzt von Polynomen sprechen, so meinen wir stets solche ohne konstantes Glied (nur solche lassen sich auf Elemente von $\overline{\mathfrak{R}}$ anwenden, da wir in $\mathfrak{R}$ keine Eins angenommen haben).

Für $\alpha > 0$ definieren wir

$$\varphi_\alpha(\tau) = \begin{matrix} 0 \\ 1 - \dfrac{\alpha}{\tau} \end{matrix}, \text{ wenn } \begin{matrix} \tau \leqq \alpha \\ \tau \geqq \alpha \end{matrix}.$$

In $-1 \leqq \tau \leqq 1$ läszt sich $\varphi_\alpha(\tau)$ gleichmäszig durch Polynome $\varphi_{\alpha,n}(\tau)$ approximieren. Man weisz, dasz $\lim\limits_n \varphi_{\alpha,n}(H_a)$ gleichmäszig existiert. Jedenfalls existiert also $\lim\limits_n \varphi_{\alpha,n}(a)x$, speziell also $\lim\limits_n \varphi_{\alpha,n}(a)a$.

Wir setzen $\psi_\alpha = \tau\varphi_\alpha$, $\psi_{\alpha,n} = \tau\varphi_{\alpha,n}$. Dann existiert erstens $\lim\limits_n \psi_{\alpha,n}(a)$, zweitens (wegen der gleichmäszigen Konvergenz von $\psi_{\alpha,n}(\tau)$, $-1 \leqq \tau \leqq 1$) auch $\lim\limits_n \psi_{\alpha,n}(H_a)$, also sicher (für alle x) $\lim\limits_n \psi_{\alpha,n}(a)x$. Wegen (*) ist daher $\lim\limits_n \psi_{\alpha,n}(a) \in \overline{\mathfrak{R}}$, also $\psi_\alpha(H_a)$ realisierbar (durch $\psi_\alpha(a) = \lim\limits_n \psi_{\alpha,n}(a)$).
Ist H_a spektraldargestellt,

$$H_a = \int_{-1}^{+1} \lambda \, dE_{\lambda,a},$$

so ist

$$\psi_\alpha(H_a) = \int_{-1}^{+1} \psi_\alpha(\lambda) \, dE_{\lambda,a}$$

realisierbar durch $\psi_\alpha(a)$.

Sei $0 < \beta < \gamma$. Wir setzen $\dfrac{\psi_\beta - \psi_\gamma}{\gamma - \beta} = \chi_{\beta,\gamma}$ und $\eta_\gamma = \lim\limits_n \chi^n_{\beta,\gamma}$. Dann ist

$$\eta_\gamma = \begin{matrix} 0 \\ 1 \end{matrix}, \text{ wenn } \begin{matrix} \tau < \gamma \\ \tau \geqq \gamma \end{matrix}.$$

Man hat für alle x

$$\lim_n \chi^n_{\beta,\gamma}(H_a)\,x = \eta_\gamma(H_a)\,x = (1 - E_{\gamma,a})\,x,$$

also *erstens* die Existenz von $\lim\limits_n \chi^n_{\beta,\gamma}(a)x$, also speziell die von $\lim\limits_n \chi^n_{\beta,\gamma}(a)\chi_{\beta,\gamma}(a)$, also *zweitens* die von $\lim\limits_n \chi^n_{\beta,\gamma}(a)\ (= \eta_\gamma(a))$. Wegen (*) ist $\eta_\gamma(a) \in \overline{\mathfrak{R}}$, und dies Element realisiert $1 - E_{\gamma,a}$. Wir haben also:

Ist $E_{\lambda,a}$ die Spektralschar von H_a, so ist (für $\lambda > 0$) $1 - E_{\lambda,a}$ realisierbar und (analog zu beweisen) *(für $\lambda < 0$) $E_{\lambda,a}$ realisierbar.*

4. Sei $0 < \beta < \gamma$. Wir setzen $\dfrac{\psi_\beta(a) - \psi_\gamma(a)}{\gamma - \beta} = a_{\beta,\gamma}$ und zeigen, *dasz* $\lim\limits_{\beta=0} a_{\beta,\gamma}$ *existiert* (analoges gilt natürlich für $0 > \beta > \gamma$).

Man hat (für $0 < \beta_1 < \beta_2 < \beta_3$) $a_{\beta_1, \beta_2} + a_{\beta_2, \beta_3} = a_{\beta_1, \beta_3}$ und für zwei bis auf die Endpunkte zueinander fremde positive Intervalle $[\beta, \gamma]$ und $[\beta', \gamma']$: $a_{\beta, \gamma}\, a_{\beta', \gamma'} = 0$ (da dasselbe für die zugehörigen H, die Abschnitte der Spektralzerlegung von H_a, gilt). Aus der zweiten Gleichung folgt, wenn man in 1d ersetzt a durch $\eta_{\beta'}(a)$, b durch $a_{\beta, \gamma}$, c durch $a_{\beta', \gamma'}$: $(a_{\beta', \gamma'}, \eta_{\beta'}(a), a_{\beta, \gamma}) = 0$, also $(a_{\beta', \gamma'}, a_{\beta, \gamma}) = 0$. Um die behauptete Konvergenz zu erhalten, braucht man also nur die Konvergenz von $\sum\limits_n |a_{\beta_n, \beta_{n+1}}|^2$ zu beweisen, wenn $\beta_n > 0$ eine monotone Nullfolge ist. Diese Summe existiert aber, weil alle Partialsummen $\leqq |a|^2$ sind.

5. Sei $\mathfrak{E}$ die Gesamtheit der $e \in \mathfrak{R}$ mit $e^2 = e$. Mit e_1, e_2 liegt auch $e_1 e_2$ in $\mathfrak{E}$, und, falls $e_1 e_2 = e_1$, auch $e_2 - e_1$; ferner (wie man durch eine ähnliche Ueberlegung wie die in 4 zeigt) mit jeder Menge aus $\mathfrak{E}$ mit beschränkten $|e|$ auch ihr (dann existierendes) Produkt. Durch ungefähr dieselben Ueberlegungen wie die in einer früheren Note des Verf. [1]) kann man $\mathfrak{E}$ als ein System von Teilmengen einer gewissen Menge deuten, wenn man den Durchschnitt von e_1 und e_2 durch $e_1 e_2$ und die Vereinigung durch $e_1 + e_2 - e_1 e_2$ deutet. Man erhält: $\mathfrak{E}$ ist ein $\mathfrak{E}_1$ oder ein $\mathfrak{E}_2$ oder direkte „Summe" eines $\mathfrak{E}_1$ und eines $\mathfrak{E}_2$, wo $\mathfrak{E}_1$ erzeugt wird von endlich oder abzählbar unendlich vielen „minimalen" e_n und alle Vereinigungen von e_{n_k} erhält, für die $\sum |e_{n_k}|^2$ konvergiert, und wo $\mathfrak{E}_2$ besteht aus allen Teilmengen endlichen Maszes eines endlichen oder unendlichen Intervalls (Teilmengen vom Masze null werden dabei wie leere Mengen behandelt).

6. Aus den Ergebnissen von 3 und 4 folgt wie üblich für $a \in \mathfrak{R}$ ($\delta_a \leqq 1$) die Integraldarstellung

$$a = \int_0^1 (\lambda - 1)\, de_\lambda + \int_0^1 (1 - \lambda)\, de'_\lambda; \qquad (\ast\ast)$$

hier ist e_λ und $e'_\lambda \in \mathfrak{E}$ definiert für alle λ, $0 \leqq \lambda < 1$ (für $\lambda = 1$ ist der zugehörige Projektionsoperator nicht notwendig realisierbar) und e_λ und e'_λ sind Spektralscharen, $e_\lambda e_\mu = e_\lambda$, $e'_\lambda e'_\mu = e'_\lambda$ (für $\lambda \leqq \mu$), $e_0 = e'_0 = 0$, $\lim\limits_{\lambda = 1} (e_\lambda + e'_\lambda)\, x = x$.

Analog den Betrachtungen in 4 sieht man, dasz die rechte Seite von $(\ast\ast)$ dann und nur dann ein Element von $\mathfrak{R}$ darstellt, wenn

$$\int_0^1 (1 - \lambda)^2\, de_\lambda + \int_0^1 (1 - \lambda)^2\, de'_\lambda$$

existiert.

[1]) Siehe diese Proceedings **39**, 641—651 (1936), insbesondere 14 . 12 . $_{1-4}$.

7. Wie a.a.O. schlieszt man aus 5 und 6: $\mathfrak{H}$ ist ein $\mathfrak{H}_1$ oder ein $\mathfrak{H}_2$ oder direkte Summe eines $\mathfrak{H}_1$ und eines $\mathfrak{H}_2$. Dabei kann $\mathfrak{H}_1$ endlich oder unendlichdimensional sein. Im ersten Fall besteht $\mathfrak{H}_1$ aus den Systemen von k reellen Zahlen, das innere Produkt von $(\xi_1, \dots, \xi_k)$ und $(\eta_1, \dots, \eta_k)$ ist durch $\sum\limits_{n=1}^{k} \varrho_n \, \xi_n \, \eta_n$ definiert (ϱ_n feste positive Zahlen) und das Produkt durch $(\xi_1 \eta_1, \dots, \xi_k \eta_k)$. Im zweiten Fall besteht $\mathfrak{H}_1$ aus den abzählbar unendlichen Folgen reeller Zahlen mit konvergentem $\Sigma \, \varrho_n \, \xi_n^2$, das innere Produkt und das Produkt sind ähnlich erklärt wie soeben (letztes nicht für alle Paare). $\mathfrak{H}_2$ besteht aus den im endlichen oder unendlichen Intervall definierten reellen Funktionen, für die $\int \varphi(\xi)^2 \, d\xi$ im Sinne von Lebesgue existiert, das innere Produkt von φ und ψ ist durch $\int \varphi(\xi) \, \psi(\xi) \, d\xi$ erklärt, das Produkt (nicht für alle Paare) durch $\varphi(\xi) \, \psi(\xi)$. Summe usw. sind in allen Fällen in natürlicher Weise erklärt.

$\mathfrak{R}_1$ besteht aus den Elementen von $\mathfrak{H}_1$, für die auch $\Sigma \, \xi_n^2$ existiert. $\mathfrak{R}_2$ aus denen von $\mathfrak{H}_2$, die als Funktionen nach Vernachlässigung einer Menge vom Masz null beschränkt sind.

$\overline{\mathfrak{R}}$ ergibt sich als ein $\mathfrak{R}_1$ oder ein $\mathfrak{R}_2$ oder als direkte Summe eines $\mathfrak{R}_1$ und eines $\mathfrak{R}_2$. Damit ist über $\mathfrak{R}$, das in $\overline{\mathfrak{R}}$ überalldicht liegt, alles gesagt, was sich überhaupt sagen läszt.

Man kann dies Ergebnis übrigens noch etwas anders aussprechen, wenn man die ϱ_n aus dem inneren Produkt in das Produkt hineintransformiert.

8. Auf Grund der vorstehenden Untersuchungen läszt sich die Gesamtheit der meszbaren Funktionen über dem endlichen oder unendlichen Intervall abstrakt einführen durch Adjunktion gewisser Operatoren zu $\mathfrak{R}$. Wir gehen darauf nicht näher ein.

Mathematics. — *Zur Abstraktion des Integralbegriffs.* By HANS FREUDENTHAL. (Communicated by Prof. L. E. J. BROUWER.)

(Communicated at the meeting of May 23, 1936.)

In den letzten Jahren haben verschiedene Verfasser Verallgemeinerungen des Integralbegriffs formuliert, die sich bei allerlei Anwendungen als nötig erwiesen haben[1]). Diese Verallgemeinerungen reichen aber für die Bedürfnisse der Anwendungen noch nicht aus. Hier folgt eine Verallge-

[1]) Wir knüpfen hier an A. KOLMOGOROFF an [Math. Ann. **103**, 654—682, (1930)].