Mathematics. — *Ortsoperatoren in konkreten Hilbertschen Räumen.* I.

By HANS FREUDENTHAL. (Communicated by Prof. L. E. J. BROUWER.)

(Communicated at the meeting of June 27, 1936).

Differentialoperatoren unterscheiden sich von andern konkreten Operatoren, etwa den Integraloperatoren, Differenzenoperatoren, Substitutionsoperatoren, durch sehr allgemeine Züge; diese Züge wollen wir erfassen, indem wir den Begriff des Differentialoperators zu dem des Ortsoperators verallgemeinern.

1. (1 . 1) $\mathfrak{R}$ sei im Folgenden stets ein vollständiger unitärer Raum (Hilbertscher Raum ohne Dimensions- und Mächtigkeitsaxiome); seine Elemente werden mit x, y, z, seine linearen Teilräume mit groszen gotischen Buchstaben bezeichnet, lineare Operatoren in ihm mit groszen lateinischen Buchstaben. $\mathfrak{D}(A)$ bedeute die Definitionsmenge von A. A^* ist der zu A adjungierte Operator. Die Zeichen $\smile$, $\bigvee$ bzw. $\frown$, $\bigwedge$ deuten die Vereinigungs- bzw. Durchschnittsbildung an.

(1 . 2) Ist $\mathfrak{S}$ abgeschlossen und $A(\mathfrak{S} \frown \mathfrak{D}(A)) \subset \mathfrak{S}$ (d.h. $Ax \in \mathfrak{S}$ für jedes $x \in \mathfrak{S}$, für das A definiert ist), so verstehen wir unter $A \frown \mathfrak{S}$ den in $\mathfrak{S} \frown \mathfrak{D}(A)$ definierten und dort mit A übereinstimmenden Operator, aufgefaszt als Operator in dem unitären Raum $\mathfrak{S}$.

(1 . 3) **Satz:** A sei ein in $\mathfrak{R}$ überall dicht definierter linearer Operator. $\mathfrak{R}_n$ sei eine aufsteigende Folge abgeschlossener linearer Teilräume von $\mathfrak{R}$, deren Vereinigung in $\mathfrak{R}$ überall dicht liege; P_n sei die Projektion auf $\mathfrak{R}_n$. $\mathfrak{D}_n = \mathfrak{R}_n \frown \mathfrak{D}(A)$ sei überall dicht in $\mathfrak{R}_n$, und es sei $A\mathfrak{D}_n \subset \mathfrak{R}_n$. Wir setzen $A_n = A \frown \mathfrak{R}_n$ (also $\mathfrak{D}(A_n) = \mathfrak{D}_n$). Dann ist $P_n \mathfrak{D}(A^*) \subset \mathfrak{D}(A_n^*)$ für alle n und $A^* y = \lim A_n^* P_n y$.

Bemerkung: Dieser Satz liefert eine Abschätzung nach oben für $\mathfrak{D}(A^*)$.

Beweis: Sei $y \in \mathfrak{D}(A^*)$, also (Ax, y) beschränkt in $x \in \mathfrak{D}(A)$, $|x| \leqq 1$, also auch beschränkt in $x \in \mathfrak{D}(A_n)$, $|x| \leqq 1$. Nun ist aber $(Ax, y) = (A_n x, P_n y)$ für $x \in \mathfrak{D}(A_n)$, also $P_n y \in \mathfrak{D}(A_n^*)$ (womit ein Teil des Satzes bewiesen ist). Man darf also in der Gleichung A bzw. A_n in das rechte Glied des inneren Produktes bringen: $(x, A^* y) = (x, A_n^* P_n y)$ für $x \in \mathfrak{D}(A_n)$, also überhaupt für $x \in \mathfrak{R}_n$. Oder: $P_n(A_n^* P_n - P_n A^*) y = 0$. Also: $A_n^* P_n y = P_n A^* y$, woraus der Rest des Satzes unmittelbar folgt.

2. (2 . 1) $\mathfrak{e}$ sei ein topologischer Raum; $\mathfrak{e}$ sei mit einem Lebesgue-Fréchetschen Masz versehen (das für gewisse Teilmengen unendlich werden darf); jede offene Menge sei meszbar, $\mathfrak{m}$ sei stets eine meszbare Teilmenge von $\mathfrak{e}$. $\mathfrak{R}_{\mathfrak{m}}$ sei der unitäre Raum der auszerhalb $\mathfrak{m}$ verschwindenden absolutquadratintegrablen Funktionen über $\mathfrak{e}$. $P_{\mathfrak{m}}$ sei die Projektion von

$\mathfrak{R}_{\mathfrak{e}}$ auf $\mathfrak{R}_{\mathfrak{m}}$ (die nichts Anderes ist als die Multiplikation mit der auszerhalb $\mathfrak{m}$ verschwindenden, in $\mathfrak{m}$ gleich 1 gesetzten Funktion). Gleichheits- und Konvergenzbegriff für Funktionen seien die des unitären Raumes.

(2 . 2) Der in einem Teilraum von $\mathfrak{R}_{\mathfrak{e}}$ definierte lineare Operator A heiszt *Ortsoperator*, wenn für jedes $\mathfrak{m}$ gilt: Jede in $\mathfrak{m}$ verschwindende Funktion von $\mathfrak{R}_{\mathfrak{e}} \wedge \mathfrak{D}(A)$ wird durch A in eine ebensolche abgebildet; $\mathfrak{R}_{\mathfrak{m}} \wedge \mathfrak{D}(A)$ ist überall dicht in $\mathfrak{R}_{\mathfrak{m}}$.

(2 . 3) Eine gewisse abgeschlossene, nirgendsdichte Teilmenge $\mathfrak{r}$ von $\mathfrak{e}$ sei als *Rand* von $\mathfrak{e}$ ausgezeichnet. $\mathfrak{o}$ bedeute stets eine offene Menge, die aus $\mathfrak{e}$ entstehe durch Weglassen einer abgeschlossenen Umgebung von $\mathfrak{r}$. Der Rand von $\mathfrak{o}$ ist im üblichen Sinne zu verstehen.

(2 . 4) Bei den Anwendungen wird $\mathfrak{e}$ im Allgemeinen kompakt sein, und zwar entstanden aus dem im Kleinen kompakten Definitionsbereich durch Hinzufügung idealer Punkte, die alle oder teilweise als Punkte von $\mathfrak{r}$ auftreten können. Es ist klar, wie man dann den Satz (1 . 3) anwenden kann, wenn A ein Lokaloperator, $\mathfrak{o}_n$ eine gewisse aufsteigende Folge (2 . 3) und $\mathfrak{R}_n = \mathfrak{R}_{\mathfrak{o}_n}$ ist.

(2 . 5) Sei A Ortsoperator, $\mathfrak{m}_1 \subset \mathfrak{m}_2 \subset \mathfrak{e}$, $A_n = A \wedge \mathfrak{R}_{\mathfrak{m}_n}$, P die Projektion von $\mathfrak{R}_{\mathfrak{m}_2}$ auf $\mathfrak{R}_{\mathfrak{m}_1}$. Dann ist $P\mathfrak{D}(A_2^*) \subset \mathfrak{D}(A_1^*)$ und (soweit definiert) $PA_2^* y = A_1^* Py$. (Klar.)

(2 . 6) Ein Ortsoperator A heiszt hermitesch bzw. selbstadjungiert *im Innern von* $\mathfrak{e}$, wenn eine aufsteigende Folge $\mathfrak{o}_n$ existiert, $\mathfrak{r} \vee \bigvee \mathfrak{o}_n = \mathfrak{e}$, mit der Eigenschaft: Sei $A_n = A \wedge \mathfrak{R}_{\mathfrak{o}_n}$, $P_n = P_{\mathfrak{o}_n}$; dann ist 1. A_n hermitesch, 2. $\mathfrak{D}(A_n^*) \supset P_n \mathfrak{D}(A_{n+1})$ bzw. $\mathfrak{D}(A_n^*) = P_n \mathfrak{D}(A_{n+1})$. — Für den Fall eines kompakten $\mathfrak{e}$ zeigt man leicht, dasz diese Definitionen von der Wahl der Folge $\mathfrak{o}_n$ nicht abhängen (was aber nicht wesentlich ist.)

(2 . 7) Es läge nahe, in die Definition des Ortsoperators noch folgende natürliche Forderungen aufzunehmen: Für beliebige $\mathfrak{o}$ und $\mathfrak{o}'$ mit zueinander fremder abgeschlossener Hülle und beliebige x und x' aus $\mathfrak{D}(A)$ gibt es ein x'' aus $\mathfrak{D}(A)$, das in $\mathfrak{o}$ mit x und in $\mathfrak{o}'$ mit x' übereinstimmt. Für beliebige $\mathfrak{o}$ und $\mathfrak{o}'$ mit $\bar{\mathfrak{o}} \subset \mathfrak{o}'$ und beliebige x und x' aus $\mathfrak{D}(A)$ gibt es ein x'' aus $\mathfrak{D}(A)$, das in $\mathfrak{o}$ mit x und auszerhalb $\mathfrak{o}'$ mit x' übereinstimmt. Wir werden aber von der ersten Forderung keinen Gebrauch machen; die zweite dagegen werden wir teilweise verwenden, wir werden nämlich verlangen (mit den Bezeichnungen von 2 . 6):

(2 . 8) $P_n \mathfrak{D}(A) = P_n \mathfrak{D}(A_{n+1})$.

(2 . 9) Wir nennen $\mathfrak{T}(A)$ die Gesamtheit der $x \in \mathfrak{R}_{\mathfrak{e}}$, die in jedem $\mathfrak{o}_n$ mit einem geeigneten $x_n \in \mathfrak{D}(A)$ übereinstimmen. Dann ist also (für jedes n) $P_n \mathfrak{T}(A) = P_n \mathfrak{D}(A)$ und $\mathfrak{D}(A) \subset \mathfrak{T}(A)$.

3. Satz: A sei im Innern von $\mathfrak{e}$ selbstadjungiert, und es gelte (2 . 8). Dann ist $\mathfrak{D}(A_n) \subset \mathfrak{D}(A^*) \subset \mathfrak{T}(A)$ und $P_n \mathfrak{D}(A) = P_n \mathfrak{D}(A^*) = P_n \mathfrak{T}(A)$, und man kann für jedes $x \in \mathfrak{D}(A^*)$ $A^* x$ einfach so berechnen, dasz

man ein (stets existierendes) $y \in \mathfrak{D}(A)$ sucht, das in einem $\mathfrak{o}_n$ mit x übereinstimmt, und $A^* x = A y$ in ganz $\mathfrak{o}_n$ setzt. $\mathfrak{D}(A^*)$ läszt sich aus $\mathfrak{T}(A)$ durch eine *Randbedingung* herausheben, ebenso jede Fortsetzung von $\mathfrak{D}(A)$, in der A maximal oder selbstadjungiert ist, aus $\mathfrak{D}(A^*)$. Einschränkung durch eine Randbedingung bedeutet dabei: Zwei Elemente des einzuschränkenden Bereichs, die auszerhalb eines geeigneten $\mathfrak{o}_n$ übereinstimmen, gehören entweder alle beide wohl oder alle beide nicht zum eingeschränkten Bereich. Oder: Jedes auszerhalb eines geeigneten $\mathfrak{o}_n$ verschwindende Element des einzuschränkenden gehört zum eingeschränkten Bereich.

Die Behauptungen des Satzes sind in denen von 3.1—8 enthalten:

(3.1) Für $x \in \mathfrak{D}(A_{n+1})$ bzw. $\in \mathfrak{D}(A)$ ist $A_n^* P_n x = P_n A_{n+1} x$ bzw. $= P_n A x$. Also es gilt nicht nur die in 2.6.2 geforderte Uebereinstimmung von Definitionsbereichen, sondern auch die der zugehörigen Operatoren.

Beweis: $x \in \mathfrak{D}(A_{n+1})$. Wegen 2.6.1 und 2.5 hat man $P_n A_{n+1} x = P_n A_{n+1}^* x = A_n^* P_n x$. Sei nun $x \in \mathfrak{D}(A)$. Wegen 2.6.2 und 2.8 ist $P_n x \in \mathfrak{D}(A_n^*)$ und existiert $z \in \mathfrak{D}(A_{n+1})$ mit $P_n x = P_n z$. Dann ist aber auch, weil A Ortsoperator ist, $P_n A x = P_n A z$; das ist aber $= P_n A_{n+1} z = A_n^* P_n z$ (auf Grund des bereits bewiesenen ersten Teils der Aussage) $= A_n^* P_n x$.

(3.2) Ist $x \in \mathfrak{D}(A)$, $y \in \mathfrak{D}(A_m^*)$ bzw. $\in \mathfrak{D}(A^*)$ und stimmen x und y in $\mathfrak{o}_n$ $(n \leqq m)$ überein, so tun das auch $A x$ und $A_m^* y$ bzw. $A^* y$.

Beweis: Es sei $x \in \mathfrak{D}(A)$, $y \in \mathfrak{D}(A_m^*)$, $P_n x = P_n y$. Dann gilt $P_n A x = A_n^* P_n x = A_n^* P_n y = P_n A_m^* y$, und zwar gilt das erste Gleichheitszeichen wegen 3.1, das zweite nach Voraussetzung, das dritte nach 2.5 für $m > n$ (sonst ist es trivial). — Für $y \in \mathfrak{D}(A^*)$ hat man nach 2.6.2 und 2.8 $P_n y \in \mathfrak{D}(A_n^*)$ und kann dann weiter verfahren wie im ersten Teil des Beweises.

(3.3) Ist $x \in \mathfrak{D}(A_k^*)$, $y \in \mathfrak{D}(A_l^*)$ bzw. $x \in \mathfrak{D}(A_k^*)$, $y \in \mathfrak{D}(A^*)$ bzw. $x, y \in \mathfrak{D}(A^*)$ und stimmen x und y in $\mathfrak{o}_n$ $(n \leqq k, l)$ überein, so tun das auch $A_k^* x$ und $A_l^* y$ bzw. $A_k^* x$ und $A^* y$ bzw. $A^* x$ und $A^* y$.

Beweis: Sei $x \in \mathfrak{D}(A_k)$, $y \in \mathfrak{D}(A_l)$, $P_n x = P_n y$. Nach 2.6.2 und 2.8 existiert ein $z \in \mathfrak{D}(A)$ mit $P_n x = P_n y = P_n z$. Nach 3.2 stimmen $A_k^* x$ und $A_l^* y$ mit $A z$ in $\mathfrak{o}_n$ überein, also auch untereinander. — Ebenso ergibt sich der Rest.

(3.4) Ist $x \in \mathfrak{D}(A_m^*)$ bzw. $\in \mathfrak{D}(A^*)$ und verschwindet x auszerhalb $\mathfrak{o}_n$ $(n \leqq m)$, so tut das auch $A_m^* x$ bzw. $A^* x$.

Beweis: Sei $x \in \mathfrak{D}(A_m^*)$. Nach 2.6.2 und 2.8 existiert $z \in \mathfrak{D}(A)$ mit $P_m z = x$. Wegen 3.1 hat man $P_m A y = A_m^* P_m y = A_m^* x$. Da hier das erste Glied auszerhalb $\mathfrak{o}_n$ verschwindet, tut es auch das letzte. — Sei $x \in \mathfrak{D}(A^*)$. Da dann auch $P_m x = x \in \mathfrak{D}(A_m^*)$ ist, verschwindet, wie eben bewiesen, $A_m^* x$ auszerhalb $\mathfrak{o}_n$, also auch $A^* x = \lim A_n^* x$ (siehe 1.3).

(3.5) $\mathfrak{D}(A_n) \subset \mathfrak{D}(A^*)$.

Beweis: $x \in \mathfrak{D}(A_n)$, $y \in \mathfrak{D}(A)$. $(A x, y) = (A_n x, y) = (A_n x, P_n y) = (x, A_n^* P_n y) = (x, P_n A y) = (x, A y)$, und zwar ist das erste Gleichheitszeichen trivial, das zweite steht, weil A Ortsoperator ist, das dritte wegen 2.6.2 und 2.8, das vorletzte wegen 3.1, das letzte ist trivial. Wir haben also $x \in \mathfrak{D}(A^*)$.

(3.6) $P_n \mathfrak{D}(A) = P_n \mathfrak{D}(A_{n+1}) = P_n \mathfrak{D}(A^*) = P_n \mathfrak{T}(A)$. $\mathfrak{D}(A^*) \subset \mathfrak{T}(A)$.

Beweis: Die Beziehung zwischen erstem und zweiten Glied steht in 2.8, die zwischen erstem und vierten in 2.9. $P_n \mathfrak{D}(A^*) \subset \mathfrak{D}(A_n^*)$ wegen 1.3, $\subset P_n \mathfrak{D}(A_{n+1})$ wegen 2.6.2, $\subset P_n \mathfrak{D}(A^*)$ wegen 3.5, woraus die Gleichheit von zweitem und drittem Glied folgt. Der Rest ist klar.

(3.7) Ist $x \in \mathfrak{T}(A)$ und verschwindet x auszerhalb eines $\mathfrak{o}_n$, so ist $x \in \mathfrak{D}(A^*)$.

Beweis: Nach 3.6 ist $x = P_{n+1} x \in P_{n+1} \mathfrak{D}(A_{n+2}) \subset \mathfrak{D}(A_{n+1}^*)$, ferner $x = P_n x \in P_n \mathfrak{D}(A_{n+1})$.

Sei $y \in \mathfrak{D}(A)$; dann gibt es $y' \in \mathfrak{D}(A_{n+1})$ mit $P_n y' = P_n y$; da A Ortsoperator ist, hat man dann $P_n A y' = P_n A y$. Es gilt also: $(x, A y) = (x, P_n A y) = (x, P_n A y') = (P_n x, A y') = (P_n x, A_{n+1} y')$. Wegen des ersten Absatzes darf man weiterschreiben: $= (A_{n+1}^* x, y')$. Da x auszerhalb $\mathfrak{o}_n$ verschwindet, verschwindet wegen 3.4 auch $A_{n+1}^* x$ dort. Es ist also $A_{n+1}^* x = P_n A_{n+1}^* x = A_n^* x$ (wegen 2.5). Setzen wir das ein, so haben wir $(x, A y) = (A_n^* x, y') = (A_n^* x, P_n y') = (A_n^* x, P_n y) = (A_n^* x, y)$, woraus die Behauptung folgt.

(3.8) Ist $x \in \mathfrak{D}(A^*)$ und verschwindet x auszerhalb eines $\mathfrak{o}_n$, so gehört x zu jeder Erweiterung von $\mathfrak{D}(A)$, in der A^* maximal hermitesch ist.

Beweis: Sei auch $y \in \mathfrak{D}(A^*)$; dann existiert nach 3.5 ein $z \in \mathfrak{D}(A_{n+1})$ mit $P_n z = P_n y$, und es ist auch $P_n A^* z = P_n A^* y$ (wegen 3.4). $(A^* x, y) = (A^* x, P_n y) = (A^* x, P_n z) = (A^* x, z) = (x, A z) = (x, A^* z) = (x, P_n A^* z) = (x, P_n A^* y) = (x, A^* y)$ (erstes und drittes Gleichheitszeichen wegen 3.4). Das ist aber mit der Behauptung äquivalent.

4. Satz: Zu A gehört (unter den Voraussetzungen von Satz 3) eine in $\mathfrak{D}(A^*)$ definierte hermitesche Form $B(x, y)$, die nur vom Randverhalten der Argumente abhängt, die „Randform" von A, deren maximale Nullstellenräume über $\mathfrak{D}(A)$ *die* Räume über $\mathfrak{D}(A)$ sind, in denen A^* maximal hermitesch ist. Bei der Berechnung der Werte von $B(x, y)$ darf man nicht nur, sondern kann man auch die Argumente durch solche ersetzen, die innerhalb eines beliebigen $\mathfrak{o}_n$ verschwinden.

Man setze nämlich $(A^* x, y) - (x, A^* y) = i B(x, y)$; dann folgt die Aussage ohne weiteres aus 3.

5. Es ist wohl klar, wie die Sätze 3 und 4 bei der Untersuchung von Differentialoperatoren anzuwenden sind; wir gehen darauf hier nicht näher ein.