Mathematics. — *Ueber die Friedrichssche Fortsetzung halbbeschränkter Hermitescher Operatoren.* By HANS FREUDENTHAL. (Communicated by Prof. L. E. J. BROUWER.)

(Communicated at the meeting of June 27, 1936.)

1. Wir geben eine kurze Ableitung der K. FRIEDRICHSschen [1]) selbstadjungierten Fortsetzung halbbeschränkter Hermitescher Operatoren.

$\mathfrak{R}$ sei ein vollständiger unitärer Raum (Hilbertscher Raum ohne Dimensions- und Mächtigkeitsaxiome). H sei ein Hermitescher nach unten beschränkter linearer Operator in ihm (als Schranke nehmen wir etwa 1), H^* sei seine Adjungierte, $\mathfrak{D}$ und $\mathfrak{D}^*$ seien die bzw. Definitionsmengen. $(Hx, y) = (x, y)'$ ist ein in $\mathfrak{D}$ definiertes „neues" inneres Produkt; für die auf diesem inneren Produkt beruhende „neue" Metrik gilt $|x|' \geqq |x|$; die „neue" Topologie ist also schwächer als die alte. In der neuen Topologie läszt sich $\mathfrak{D}$ vervollständigen zu einem vollständigen unitären Raum $\mathfrak{R}'$. $\mathfrak{R}'$ läszt sich als Teilraum von $\mathfrak{R}$ (mit einer andern Topologie) auffassen, da eine Fundamentalfolge der neuen Topologie aus $\mathfrak{D}$ a fortiori Fundamentalfolge der alten Topologie ist.

Die Formel $(x, y)' = (Hx, y)$ galt definitionsgemäsz für $x, y \in \mathfrak{D}$; aus Stetigkeitsgründen gilt sie aber weiter für $x \in \mathfrak{D}$, $y \in \mathfrak{R}'$.

Wir definieren $\widetilde{\mathfrak{D}}$ als Durchschnitt von $\mathfrak{D}^*$ und $\mathfrak{R}'$ (das ist ein linearer Raum zwischen $\mathfrak{D}$ und $\mathfrak{D}^*$) und $\widetilde{H}$ als das auf $\widetilde{\mathfrak{D}}$ eingeschränkte H^*.

Satz: $\widetilde{H}$ ist selbstadjungiert.

Beweis: 1. Sei $x, y \in \widetilde{\mathfrak{D}}$. Dann gibt es Folgen x_m bzw. y_n aus $\mathfrak{D}$, die in der neuen Topologie nach x bzw. y konvergieren. Es konvergiert dann auch $(x_m, y_n)' = (Hx_m, y_n) = (x_m, Hy_n)$. Der Limes davon ist einerseits gleich

$$\lim_m \lim_n (Hx_m, y_n) = \lim_m (Hx_m, y) = \lim_m (x_m, \widetilde{H}y) = (x, \widetilde{H}y),$$

andererseits gleich

$$\lim_n \lim_m (x_m, Hy_n) = \lim_n (x, Hy_n) = \lim_n (\widetilde{H}x, y_n) = (\widetilde{H}x, y).$$

$\widetilde{H}$ ist also Hermitesch.

2. Sei $x \in \mathfrak{D}$, $y \in \mathfrak{R}$. $|(x, y)| \leqq |y| \cdot |x| \leqq |y| \cdot |x|'$; (x, y) ist also ein überall dicht in $\mathfrak{R}'$ definiertes, im Sinne von $\mathfrak{R}'$ beschränktes lineares Funktional von x, also mit einem geeignetem $y' \in \mathfrak{R}'$ darstellbar in der Form

$$(x, y) = (x, y')' = (Hx, y').$$

[1]) Math. Ann. **109**, 465—487 (1934). Insbesondere §§ 2—5.

Liest man diese Gleichung in umgekehrter Richtung, so sieht man, dasz (Hx, y') ein für $x \in \mathfrak{D}$ beschränktes Funktional (im Sinne von $\mathfrak{R}$) ist. Also ist y' in $\mathfrak{D}^*$, also auch im Durchschnitt von $\mathfrak{R}'$ und $\mathfrak{D}^*$, also $y' \in \widetilde{\mathfrak{D}}$ und $\widetilde{H} y' = y$. Da y willkürlich in $\mathfrak{R}$ war, bedeutet das $H\widetilde{\mathfrak{D}} = \mathfrak{R}$. Nach J. v. NEUMANN [2]) ist also $\widetilde{H}$ selbstadjungiert.

2. $\widetilde{H}$ hat dieselbe untere Grenze wie H. K. FRIEDRICHS [3]) hat gefragt, ob $\widetilde{H}$ als selbstadjungierte Fortsetzung von H durch diese Eigenschaft charakterisiert sei. Wir verneinen die Frage:

$\mathfrak{R}$ sei direkte Summe der Hilbertschen Räume $\mathfrak{R}_1$ und $\mathfrak{R}_2$; H_1 sei in $\mathfrak{R}_1$ definiert als der identische Operator, H_2 in $\mathfrak{D}_2 \subset \mathfrak{R}_2$ als halbbeschränkter Hermitescher Operator mit der unteren Schranke $\gamma > 1$; H sei die direkte Summe von H_1 und H_2. H'_2 sei irgendeine selbstadjungierte Fortsetzung von H_2 in R_2 mit einer zwischen 1 und γ liegenden unteren Schranke. H'_2 wird im allgemeinen von $\widetilde{H}_2$ verschieden sein (z. B. wenn $\mathfrak{R}_2$ der Raum der im Einheitsintervall zweimal stetig differenzierbaren Funktionen ist, die in den Endpunkten mit samt ihren ersten Ableitungen verschwinden, und H_2 die Bildung der negativen zweiten Ableitung). H', die direkte Summe von H_1 und H'_2, wird dann auch von $\widetilde{H}$ verschieden sein, aber doch dieselbe Schranke wie H (nämlich 1) besitzen und selbstadjungiert sein.

[2]) Math. Ann. **102**, 49—131 (1929). Insbesondere Satz 41.

[3]) a a. O., Fusznote 14.

Chemistry. — *The Exact Measurement of the Specific Heats of Metals at High Temperatures:* **XXV**. *The Specific Heats and the Allotropism of Nickel between 0° and 1000° C.* By M. EWERT. (Communicated by Prof. F. M. JAEGER.)

(Communicated at the meeting of June 27, 1936).

§ 1. The data about the allotropism of *nickel*, as given in the literature [1]), are still rather confusing. Certainly there is a cubic, face-centred α-form with $a_0 = 3.518$ A.U. and a density of 8.86 stable at ordinary temperatures to about 350° C. Exactly as in the case of cubic, body-centred α-iron at 768° C. and in that of hexagonal α-*cobaltum* at 1105°—1130° C., the change of α-*nickel* at 350°—353° C. from the

[1]) For the literature cf.: F. M. JAEGER and E. ROSENBOHM, Proc. Royal Acad. Amsterdam, **34**, 818 (1931); Rec. d. Trav. d. Chim. Pays-Bas, **51**, 41 (1932).