Mathematics. — *Die konformen Differentialinvarianten eines kovarianten symmetrischen Tensors vierter Stufe im binären Gebiet.* Von G. F. C. GRISS. (Communicated by Prof. R. WEITZENBÖCK).

(Communicated at the meeting of September 26, 1936).

§ 1. *Einleitung.*

In seiner Theorie der *totalisotropen Flächen* [1]) hat Herr PINL die Resultate verwendet, welche ich bei der Bestimmung der Differentialinvarianten eines kovarianten symmetrischen Tensors 4. Stufe im binären Gebiet erhalten hatte [2]). Um eine *konforme* Theorie möglich zu machen werde ich jetzt die konformen [3]) Differentialinvarianten desselben Tensors bestimmen, während die geometrische Verwendung wiederum Herrn PINL überlassen bleibt.

Das volle Komitantensystem (nullter Ordnung) des Tensors 4. Stufe:

$$f = g_{\alpha\beta\gamma\delta} x^\alpha x^\beta x^\gamma x^\delta = g_0 x_1^4 + 4 g_1 x_1^3 x_2 + 6 g_2 x_1^2 x_2^2 + 4 g_3 x_1 x_2^3 + g_4 x_2^4 \quad (1)$$

wird gebildet [4]) von den Invarianten

$$i = \theta_1 = (g g')^4 = 2 (g_0 g_4 - 4 g_1 g_3 + 3 g_2^2), \quad . \; . \; . \; . \quad (2)$$

$$j = \theta_2 = (g g')^2 (g' g'')^2 (g'' g)^2 = 6 \begin{vmatrix} g_0 & g_1 & g_2 \\ g_1 & g_2 & g_3 \\ g_2 & g_3 & g_4 \end{vmatrix}, \quad . \; . \; . \; . \quad (3)$$

der HESSischen Kovariante 4. Stufe

$$\Delta = H = (g g')^2 g_x^2 g_x'^2 \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (4)$$

und der CAYLEYschen Kovariante 6. Stufe

$$t = T = (g g')^2 (g'' g') g_x''^3 g_x^2 g_x' . \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (5)$$

---

[1]) M. PINL, Quasimetrik auf totalisotropen Flächen III, Proc. Royal Acad. Amsterdam, **38**, 171—180 (1935).

[2]) G. F. C. GRISS, Differentialinvarianten eines kovarianten Tensors vierter Stufe im binären Gebiet, Compositio Math. I, 238—247 (1934).

[3]) Die Bezeichnung „konform" ist gewählt nach Analogie der konformen Invarianten eines symmetrischen Tensors zweiter Stufe. Man könnte auch von Invarianten eines Pseudotensors sprechen.

[4]) GORDAN–KERSCHENSTEINER, Vorlesungen über Invariantentheorie, Leipzig (1887) § 15.

Man kan T^2 zerlegen:

$$T^2 = -\frac{\theta_2}{6}\left(f+\frac{H}{k_1}\right)\left(f+\frac{H}{k_2}\right)\left(f+\frac{H}{k_3}\right) \quad \ldots \ldots \quad (6)$$

Die Kombinanten $f+\dfrac{H}{k_r}$ $(r=1,2,3)$ sind vollständige Quadrate und die 3 Werte k_r sind Wurzeln von

$$k^3 - \tfrac{1}{2}\theta_1\, k - \tfrac{1}{3}\theta_2 = 0. \quad \ldots \ldots \ldots \quad (7)$$

Setzen wir

$$f+\frac{H}{k_1}=\varphi^2,\; f+\frac{H}{k_2}=\psi^2 \;\textit{und}\; f+\frac{H}{k_3}=\chi^2, \quad \ldots \quad (8)$$

so sind φ, ψ und χ drei (konjugierte) quadratische Kovarianten.

Im allgemeinen, d.h. wenn die drei Wurzeln von (7) verschieden sind, kann man f durch φ und ψ ausdrücken[5]), so dass man die konformen Differentialinvarianten von 2 kovarianten symmetrischen Tensoren 2. Stufe mit nicht-verschwindender Diskriminante zu bestimmen hat. Im folgenden Paragraphen lösen wir dieses Problem für willkürliches n.

§ 2. *Konforme Differentialinvarianten von 2 kovarianten symmetrischen Tensoren 2. Stufe.*

Es sei die Gruppe der eineindeutigen (genügend oft) stetig differenzierbaren Transformationen

$$x_i = f_i(\bar{x}_1, \ldots, \bar{x}_n) \qquad (i=1,\ldots,n) \quad \ldots \ldots \quad (9)$$

gegeben mit der Funktionaldeterminante

$$\triangle = |e^i_k| \neq 0, \text{ wo } e^i_k = \frac{\partial x_i}{\partial \bar{x}_k}. \quad \ldots \ldots \quad (10)$$

Die Transformationsformeln für die 2 Tensoren lauten

$$\left.\begin{aligned} \bar{a}_{\alpha\beta} &= \tau\, a_{\mu\nu}\, e^\mu_\alpha\, e^\nu_\beta \\ \bar{b}_{\alpha\beta} &= \tau\, b_{\mu\nu}\, e^\mu_\alpha\, e^\nu_\beta \end{aligned}\right\}. \quad \ldots \ldots \ldots \quad (11)$$

Zur Bestimmung der Differentialinvarianten 1. Ordnung differenzieren wir (11):

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial \bar{a}_{\alpha\beta}}{\partial \bar{x}_\gamma} &= \tau \frac{\partial a_{\mu\nu}}{\partial x_\lambda}\, e^\mu_\alpha\, e^\nu_\beta\, e^\lambda_\gamma + \tau\, a_{\mu\nu}\, e^\mu_{\alpha\gamma}\, e^\nu_\beta + \tau\, a_{\mu\nu}\, e^\mu_\alpha\, e^\nu_{\beta\gamma} + \bar{a}_{\alpha\beta}\, \psi_\gamma \\ \frac{\partial \bar{b}_{\alpha\beta}}{\partial \bar{x}_\gamma} &= \ldots\ldots \end{aligned}\right\}, \quad (12)$$

[5]) l.c. [2]) 240.

wo

$$e^{\mu}_{\alpha\beta} = \frac{\partial^2 x_\mu}{\partial \bar{x}_\alpha \, \partial \bar{x}_\beta} \text{ und } \psi_\alpha = \frac{\partial \log \tau}{\partial \bar{x}_\alpha} \quad \ldots \ldots \quad (13)$$

Wir bilden jetzt[6])

$$A_{r,ik} = \tfrac{1}{2}\left(\frac{\partial a_{ri}}{\partial x_k} + \frac{\partial a_{rk}}{\partial x_i} - \frac{\partial a_{ik}}{\partial x_r}\right) \text{ und } B_{r,ik} = \ldots, \quad \ldots \quad (14)$$

$$A^{s}_{ik} = a^{rs} A_{r,ik} \text{ und } B^{s}_{ik} = \ldots, \quad \ldots \ldots \quad (15)$$

$$C^{s}_{ik} = A^{s}_{ik} - B^{s}_{ik} \quad \ldots \ldots \quad (16)$$

mit den Transformationsformeln

$$\left.\begin{aligned} \bar{A}_{\alpha,\beta\gamma} &= \tau A_{\lambda,\mu\nu} e^{\lambda}_{\alpha} e^{\mu}_{\beta} e^{\nu}_{\gamma} + \tau e^{\mu}_{\alpha} e^{\nu}_{\beta\gamma} + \tfrac{1}{2}(\bar{a}_{\alpha\beta}\psi_\gamma + \bar{a}_{\alpha\gamma}\psi_\beta - \bar{a}_{\beta\gamma}\psi_\alpha) \\ \bar{B}_{\alpha,\beta\gamma} &= \ldots . \end{aligned}\right\} \quad (17)$$

$$\left.\begin{aligned} \bar{A}^{\nu}_{\beta\gamma} e^{\varepsilon}_{\nu} &= A^{\varepsilon}_{\mu\nu} e^{\mu}_{\beta} e^{\nu}_{\gamma} + e^{\varepsilon}_{\beta\gamma} + \tfrac{1}{2}(e^{\varepsilon}_{\beta}\psi_\gamma + e^{\varepsilon}_{\gamma}\psi_\beta - \bar{a}^{\mu\nu}\bar{a}_{\beta\gamma} e^{\varepsilon}_{\nu}\psi_\mu) \\ \bar{B}^{\nu}_{\beta\gamma} e^{\varepsilon}_{\nu} &= \ldots . \end{aligned}\right\}. \quad (18)$$

$$\bar{C}^{\nu}_{\beta\gamma} e^{\varepsilon}_{\nu} = C^{\varepsilon}_{\mu\nu} e^{\mu}_{\beta} e^{\nu}_{\gamma} - \tfrac{1}{2}(\bar{a}^{\mu\nu}\bar{a}_{\beta\gamma} - \bar{b}^{\mu\nu}\bar{b}_{\beta\gamma}) e^{\varepsilon}_{\nu}\psi_\mu \quad \ldots \quad (19)$$

oder

$$\bar{C}^{\alpha}_{\beta\gamma} = C^{\varepsilon}_{\mu\nu} \bar{e}^{\alpha}_{\varepsilon} e^{\mu}_{\beta} e^{\nu}_{\gamma} - \tfrac{1}{2}(\bar{a}^{\mu\alpha}\bar{a}_{\beta\gamma} - \bar{b}^{\mu\alpha}\bar{b}_{\beta\gamma})\psi_\mu \quad \ldots \quad (20)$$

Ueberschiebung mit $\bar{a}^{\beta\gamma}$ und $\bar{b}^{\beta\gamma}$ ergibt

$$\left.\begin{aligned} \bar{a}^{\beta\gamma}\bar{C}^{\alpha}_{\beta\gamma} &= \frac{1}{\tau} a^{\mu\nu} C^{\varepsilon}_{\mu\nu} \bar{e}^{\alpha}_{\varepsilon} - \tfrac{1}{2}(n\bar{a}^{\mu\alpha} - \bar{a}^{\beta\gamma}\bar{b}_{\beta\gamma}\bar{b}^{\mu\alpha})\psi_\mu \\ \bar{b}^{\beta\gamma}\bar{C}^{\alpha}_{\beta\gamma} &= \frac{1}{\tau} b^{\mu\nu} C^{\varepsilon}_{\mu\nu} \bar{e}^{\alpha}_{\varepsilon} - \tfrac{1}{2}(\bar{b}^{\beta\gamma}\bar{a}_{\beta\gamma}\bar{a}^{\mu\alpha} - n\bar{b}^{\mu\alpha})\psi_\mu . \end{aligned}\right\} \quad \ldots \quad (21)$$

Weitere Ueberschiebung mit $\bar{a}_{\alpha\delta}$ gibt

$$\left.\begin{aligned} \bar{c}_\delta &= c_\lambda e^{\lambda}_{\delta} - \tfrac{1}{2} n \psi_\delta + \tfrac{1}{2}\alpha\,\bar{a}_{\alpha\delta}\bar{b}^{\mu\alpha}\psi_\mu \\ \bar{d}_\delta &= d_\lambda e^{\lambda}_{\delta} - \tfrac{1}{2}\beta\psi_\delta + \tfrac{1}{2} n\,\bar{a}_{\alpha\delta}\bar{b}^{\mu\alpha}\psi_\mu \end{aligned}\right\} \quad \ldots \ldots \quad (22)$$

mit

$$c_\lambda = a_{\varepsilon\lambda} a^{\mu\nu} C^{\varepsilon}_{\mu\nu} \text{ und } d_\lambda = a_{\varepsilon\lambda} b^{\mu\nu} C^{\varepsilon}_{\mu\nu}, \quad \ldots \ldots \quad (23)$$

$$\alpha = a^{\beta\gamma} b_{\beta\gamma} \text{ und } \beta = b^{\beta\gamma} a_{\beta\gamma} \quad \ldots \ldots \quad (24)$$

Jetzt lösen wir ψ_δ aus (22), indem wir resp. mit n und α multiplizieren und substrahieren:

$$\psi_\delta = \bar{\Gamma}_\delta - \Gamma_\lambda e^{\lambda}_{\delta}, \quad \ldots \ldots \quad (25)$$

---

[6]) R. WEITZENBÖCK, Invariantentheorie, Groningen (1923), XIII § 20.

wo

$$\Gamma_\lambda = 2 \,.\, \frac{n\,c_\lambda - a\,d_\lambda}{\alpha\,\beta - n^2} \,. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (26)$$

Wegen (18*a*) ist

$$e^{\xi}_{\beta\gamma} = \overline{\Gamma}^{\alpha}_{\beta\gamma}\, e^{\xi}_{\alpha} - \Gamma^{\xi}_{\mu\nu}\, e^{\mu}_{\beta}\, e^{\nu}_{\gamma} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (27)$$

mit

$$\Gamma^{\xi}_{\mu\nu} = A^{\xi}_{\mu\nu} - \tfrac{1}{2}\left(\Gamma_\mu\, \delta^{\xi}_{\nu} + \Gamma_\nu\, \delta^{\xi}_{\mu} - a^{\lambda\xi}\, a_{\mu\nu}\, \Gamma_\lambda\right). \quad . \quad . \quad . \quad (28)$$

Mittels (25) und (27) sind wir jetzt imstande kovariante Ableitungen zu bilden. Substitution in (12*b*) oder (20) liefert folgenden

Reduktionssatz: Konforme Differentialinvarianten 1. Ordnung von $a_{\alpha\beta}$ *und* $b_{\alpha\beta}$ *sind affine Invarianten von* $a_{\alpha\beta}$, $b_{\alpha\beta}$ *und den kovarianten Ableitungen*

$$b_{\alpha\beta(\gamma)} = \frac{\partial\, b_{\alpha\beta}}{\partial\, x_\gamma} - \Gamma^{\lambda}_{\alpha\gamma}\, b_{\lambda\beta} - \Gamma^{\lambda}_{\beta\gamma}\, b_{\lambda\alpha} - \Gamma_\gamma\, b_{\alpha\beta} \quad . \quad . \quad . \quad (29)$$

oder von $a_{\alpha\beta}$, $b_{\alpha\beta}$ *und*

$$D^{\alpha}_{\beta\gamma} = C^{\alpha}_{\beta\gamma} + \tfrac{1}{2}\left(a^{\mu\alpha}\, a_{\beta\gamma} - b^{\mu\alpha}\, b_{\beta\gamma}\right) \Gamma_\mu \,. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (30)$$

Zwischen den $\frac{1}{2}\, n^2 (n+1)$ Komponenten von $b_{\alpha\beta(\gamma)}$ oder $D^{\alpha}_{\beta\gamma}$ bestehen natürlich n Relationen, welche man ohne Mühe bestimmen kann.

Verjüngung von (30) gibt den Vektor

$$v_\gamma = D^{\alpha}_{\alpha\gamma} = C^{\alpha}_{\alpha\gamma} = \frac{\partial}{\partial\, x_\gamma}\left(l \sqrt{\frac{a}{b}}\right), \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (31)$$

welchen man auch unmittelbar finden kann.

Zur Bestimmung der Differentialinvarianten 2. Ordnung differenziere man (25), (27) und (29) oder (30) und eliminiere

$$\frac{\partial^2 \log \tau}{\partial\, \bar{x}_\lambda\, \partial\, \bar{x}_\mu} \text{ und } \frac{\partial^3 x_\lambda}{\partial\, \bar{x}_\mu\, \partial\, \bar{x}_\nu\, \partial\, \bar{x}_\gamma}.$$

Man findet den

Reduktionssatz: Konforme Differentialinvarianten 2. Ordnung von $a_{\alpha\beta}$ *und* $b_{\alpha\beta}$ *sind affine Invarianten von* $a_{\alpha\beta}$, $b_{\alpha\beta}$,

$$\Gamma_{\mu\lambda} = \frac{\partial\, \Gamma_\lambda}{\partial\, x_\mu} - \frac{\partial\, \Gamma_\mu}{\partial\, x_\lambda}, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (32)$$

dem Krümmungstensor

$$R^{i}_{klm} = \frac{\partial\, \Gamma^{i}_{km}}{\partial\, x_l} - \frac{\partial\, \Gamma^{i}_{kl}}{\partial\, x_m} + \Gamma^{i}_{l\lambda}\, \Gamma^{\lambda}_{km} - \Gamma^{i}_{m\lambda}\, \Gamma^{\lambda}_{kl} \quad . \quad . \quad . \quad (33)$$

und den kovarianten Ableitungen 1. und 2. Ordnung von $b_{\alpha\beta}$ oder $D^{\alpha}_{\beta\gamma}$ und den kovarianten Ableitungen 1. Ordnung von $D^{\alpha}_{\beta\gamma}$.

§ 3. *Der kovariante symmetrische Tensor 4. Stufe im binären Gebiet (allgemeiner Fall).*

Die Transformationsformeln dieses Tensors lauten

$$\bar{g}_{\alpha\beta\gamma\delta} = \sigma g_{\varkappa\lambda\mu\nu}\, e^{\varkappa}_{\alpha}\, e^{\lambda}_{\beta}\, e^{\mu}_{\gamma}\, e^{\nu}_{\delta} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (34)$$

Die quadratische Formen φ, ψ und χ sind vom Grade $\frac{1}{2}$ in $g_{\alpha\beta\gamma\delta}$, also ist $\sigma = \tau^2$. Sie sind konjugiert, zwischen den Komponenten a_{ik} und b_{ik} von φ und ψ besteht die Relation

$$a^{ik}\, b_{ik} = 0 \text{ oder } a_{ik}\, b^{ik} = 0. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (35)$$

Für (26) findet man wegen $\alpha = 0$

$$\Gamma_{\lambda} = -c_{\lambda}, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (36)$$

was man auch unmittelbar aus (22) ablesen kann.

Jetzt wenden wir den ersten Reduktionssatz von § 2 an. Zwischen den 6 Komponenten von $b_{\alpha\beta(\gamma)}$ oder $D^{\alpha}_{\beta\gamma}$ bestehen, ausser den 2 schon erwähnten Relationen

$$a^{\beta\gamma}\, D^{\alpha}_{\beta\gamma} = 0, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (37)$$

zwei weitere Relationen vermöge (35), nämlich

$$a^{\alpha\lambda}\, b_{\alpha\mu}\, D^{\mu}_{\lambda i} = 0. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (38)$$

Es bleiben also nur 2 unabhängige Komponenten übrig. Der Vektor v_{γ} von (31) hat grade 2 solche Komponenten.

Die konformen Differentialinvarianten 1. Ordnung von $g_{\alpha\beta\gamma\delta}$ sind also affine Invarianten von $g_{\alpha\beta\gamma\delta}$ und v_{γ}.

Eine kleinste algebraische Basis von Differentialinvarianten 1. Ordnung wird gebildet von [7])

$$I_1 = a^{ik}\, v_i\, v_k \text{ und } I_2 = b^{ik}\, v_i\, v_k \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (39)$$

oder von [8])

$$i_1 = \frac{1}{\sqrt[4]{g_4}} \frac{\partial}{\partial x_2}\, l \sqrt{\frac{g_0\, g_4}{g_2^2}} \text{ und } i_2 = \frac{1}{\sqrt[4]{g_0}} \frac{\partial}{\partial x_1}\, l \sqrt[4]{\frac{g_0\, g_4}{g_2^2}}, \quad . \quad . \quad (40)$$

---

[7]) l.c. [2]) 241.
[8]) l.c. [2]) 242.

wenn man f in der kanonischen Form VII [9])

$$f = g_0\, dx_1^4 + 6 g_2\, dx_1^2\, dx_2^2 + g_4\, dx_2^4 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \qquad (41)$$

voraussetzt.

Unter der gleichen Voraussetzung berechnen wir die Differentialinvarianten 2. Ordnung mittels des zweiten Reduktionssatzes von § 2. Man findet aus (32) und (33)

$$K_1 = a^{12}\, \Gamma_{12}' = \frac{1}{\sqrt{g_2}}\, \frac{\partial^2 l \sqrt{\frac{g_0}{g_4}}}{\partial x_1\, \partial x_2} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \qquad (42)$$

und

$$K_2 = \tfrac{1}{2}\, a^{ik}\, R^l_{\cdot ilk} = \frac{1}{\sqrt{g_2}}\, \frac{\partial^2 l \sqrt{\frac{g_4}{g_2}}}{\partial x_1\, \partial x_2}, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \qquad (43)$$

während die kovarianten Ableitungen $v_{i(k)}$ 3 weitere Invarianten liefern. Eine dieser, nämlich $\frac{1}{2}\, a^{ik}\, v_{i(k)}$, ist aber mit $K_1 + 2 K_2$ identisch. Man findet also *4 unabhängige Differentialinvarianten 2. Ordnung.*

Dies stimmt mit folgender Rechnung: Die zweiten Ableitungen von $g_{\alpha\beta\gamma\delta}$ haben im allgemeinen 15 Komponenten; zur Bestimmung der Differentialinvarianten 2. Ordnung mussten 3 Grössen $\frac{\partial^2 \log \tau}{\partial \bar{x}_\lambda\, \partial \bar{x}_\mu}$ und 8 Grössen $\frac{\partial^3 x_\lambda}{\partial \bar{x}_\mu\, \partial \bar{x}_\nu\, \partial \bar{x}_\varkappa}$ eliminiert werden. Man erwartet also tatsächlich $15 - 8 - 3 = 4$ Differentialinvarianten 2. Ordnung.

§ 4. *Konforme Differentialinvarianten von n kovarianten Vektoren in n Veränderlichen.*

Die Rechnung verlaüft ganz analog der Bestimmung der Differentialinvarianten eines Systems von n relativen kovarianten Vektoren [10]) und wird daher nur kurz angedeutet.

Die Transformationsformeln lauten

$$_h\bar{a}_\alpha = \varrho\ _h a_\lambda\, e^\lambda_\alpha \qquad (h = 1, \ldots, n) \quad . \quad . \qquad (44)$$

Zur Bestimmung der Differentialinvarianten 1. Ordnung differenziere man (44):

$$\frac{\partial\ _h\bar{a}_\alpha}{\partial \bar{x}_\beta} = \varrho\, \frac{\partial\ _h a_\lambda}{\partial x_\mu}\, e^\lambda_\alpha\, e^\mu_\beta + \varrho\ _h a_\lambda\, e^\lambda_{\alpha\beta} + {}_h\bar{a}_\alpha\, \varphi_\beta, \quad . \quad . \quad . \quad . \qquad (45)$$

---

[9]) M. PINL, Quasimetrik auf totalisotropen Flächen II, Proc. Royal Acad. Amsterdam, **36**, 551 (1933).

[10]) G. F. C. GRISS, Die Differentialinvarianten eines Systems von n relativen kovarianten Vektoren in R_n, Proc. Royal Acad. Amsterdam, **37**, 82—87 (1934).

wo

$$\varphi_\beta = \frac{\partial \log \varrho}{\partial \bar{x}_\beta} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (46)$$

Vertauschung von α und β und Substraktion ergibt

$$_h\bar{p}_{\alpha\beta} = \varrho\, _hp_{\lambda\mu}\, e^\lambda_\alpha\, e^\mu_\beta + {}_h\bar{a}_\alpha\, \varphi_\beta - {}_h\bar{a}_\beta\, \varphi_\alpha, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (47)$$

die Transformationsformeln für die Rotationen

$$_hp_{\alpha\beta} = \frac{\partial\, _ha_\alpha}{\partial x_\beta} - \frac{\partial\, _ha_\beta}{\partial x_\alpha}. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (48)$$

Durch Ueberschiebung mit $_h\bar{a}^\beta$ lösen wir φ_α aus (47):

$$\varphi_\alpha = -\bar{s}_\alpha + s_\lambda\, e^\lambda_\alpha, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (49)$$

wo

$$s_\alpha = \frac{_hp_{\alpha\beta}\, _ha^\beta}{n-1}. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (50)$$

Nach Substitution von φ_α in (45) kann man $e^\lambda_{\alpha\beta}$ lösen:

$$e^\gamma_{\alpha\beta} = \bar{\Gamma}^\varrho_{\alpha\beta}\, e^\gamma_\varrho - \Gamma^\gamma_{\lambda\mu}\, e^\lambda_\alpha\, e^\mu_\beta \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (51)$$

mit

$$\Gamma^\gamma_{\lambda\mu} = {}_ha^\gamma \frac{\partial\, _ha_\lambda}{\partial x_\mu} + s_\mu\, \delta^\gamma_\lambda. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (52)$$

Substitution von $e^\gamma_{\alpha\beta}$ aus (51) in (47) liefert den Reduktionssatz für die Differentialinvarianten 1. Ordnung:

Ein (kleinstes) Adjunktionssystem erster Ordnung wird gebildet von den alternierenden Tensoren

$$_hq_{\lambda\mu} = {}_hp_{\lambda\mu} + s_\mu\, _ha_\lambda - s_\lambda\, _ha_\mu \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (53)$$

mit den n Relationen

$$_ha^\mu\, _hq_{\lambda\mu} = 0. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (54)$$

Weiter findet man:

Ein (kleinstes) Adjunktionssystem zweiter Ordnung wird gebildet von den kovarianten Ableitungen von $_hq_{\lambda\mu}$ und dem Krümmungstensor, der aber durch

$$s_{\alpha\beta} = \frac{\partial s_\alpha}{\partial x_\beta} - \frac{\partial s_\beta}{\partial x_\alpha} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (55)$$

ersetzt werden kann.

§ 5. *Der kovariante symmetrische Tensor 4. Stufe im binären Gebiet (Spezialfälle).*

Wir unterscheiden jetzt wieder, anschliessend an die von Herrn PINL erwähnten Typen, dieselben Spezialfälle [11]), welche von 2 bis 5 numeriert sind.

2. Wenn eine (und nur eine) der Wurzeln von (5) Null ist, z.B. $k_3 = 0$, so ist $\theta_2 = 0$ und $\theta_1 \neq 0$. Es gibt wieder zwei quadratische Formen mit nicht-verschwindender Diskriminante, so dass man die Resultate von § 2 wieder anwenden kann.

Man findet, dass es keine Differentialinvarianten 1. Ordnung und eine Differentialinvariante 2. Ordnung gibt. Wenn man den gegebenen Tensor in der Form

$$f = g_0\, dx_1^4 + g_4\, dx_2^4 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (56)$$

voraussetzt, ist die Invariante 2. Ordnung

$$K_1 = \frac{\partial^2 l \frac{g_0}{g_4}}{\partial x_1\, \partial x_2}, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (57)$$

also dieselbe wie in § 3 (42).

3. Wenn $\theta_3 = 0$, gibt es nur eine quadratische Form mit nichtverschwindender Diskriminante, die andere ist ein Quadrat. Man hat also

$$\varphi = a_{ik}\, dx^i\, dx^k \text{ und } \sqrt{\psi} = b_i\, dx^i \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (58)$$

mit der Relation

$$(a\,b)^2 = a_{11}\, b_2^2 - 2\, a_{12}\, b_1\, b_2 + a_{22}\, b_1^2 = 0. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (59)$$

Die Relation sagt aus, dass a_{ik} in zwei Vektoren zerlegbar ist, deren einer b_i ist. Wir können also $a_{ik} = \frac{1}{2}(b_i\, c_k + c_i\, b_k)$ setzen und haben nunmehr die Differentialinvarianten von b_i und c_i zu bestimmen mit den Transformationsformeln

$$\bar{b}_\alpha = \varrho\, b_\lambda\, e_\alpha^\lambda \text{ und } \bar{c}_\alpha = \varrho\, c_\lambda\, e_\alpha^\lambda \qquad (\varrho = \sigma^{\frac{1}{4}}). \quad . \quad . \quad . \quad (60)$$

Hier wenden wir das Resultat von § 4 an. Differentialinvarianten 1. Ordnung gibt es nicht, weil ${}_h q_{\lambda\mu} = 0$. Unter Voraussetzung der Normalform

$$f = g_0\, dx_1^4 + 6\, g_2\, dx_1^2\, dx_2^2 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (61)$$

ist *die einzige Differentialinvariante 2. Ordnung*

$$I = \frac{\partial^2}{\partial x_1\, \partial x_2}\left(l\, \frac{g_0}{g_2}\right). \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (62)$$

---

[11]) l.c. [9]).

4. Die gegebene Differentialform ist für $\psi \equiv 0$ ein Quadrat. Es gelten also die bekannten Entwicklungen bei der quadratischen Differentialform. Weil der WEYLsche Tensor im binären Gebiet verschwindet, gibt es keine Differentialinvarianten.

5. Wenn $\theta_1 = 0$ und $\theta_2 = 0$, ist H ein Biquadrat. Setzen wir

$$-8\,H = (b_1\,dx_1 + b_2\,dx_2)^2, \quad \ldots \ldots \quad (63)$$

so ist

$$f = (a_1\,dx_1 + a_2\,dx_2)\,(b_1\,dx_1 + b_2\,dx_2)^3. \quad \ldots \quad (64)$$

Die Transformationsformeln für die relativen Vektoren a_i und b_i sind

$$\left.\begin{aligned} \bar{a}_\alpha &= \triangle^r\,\tau^{-1}\,a_\mu\,e_\alpha^\mu \\ \bar{b}_\alpha &= \triangle^{-r-1}\,\tau\,b_\mu\,e_\alpha^\mu \end{aligned} \quad (r = -\tfrac{3}{2}) \right\}. \quad \ldots \quad (65)$$

Man könnte jetzt die konformen Differentialinvarianten von n relativen Vektoren im n-ären Gebiet

$$_h\bar{a}_\alpha = \triangle^{r_h}\,\tau^{s_h}\,{}_h a_\mu\,e_\alpha^\mu \qquad (h = 1, \ldots, n) \quad \ldots \quad (66)$$

bestimmen und das Resultat auf unser Problem anwenden, also $n = 2$ setzen, aber grade für $n = 2$ gibt es keine Differentialinvarianten.

Mathematics. — *Casts of points, rays and planes.* By J. A. BARRAU. (Communicated by Prof. W. VAN DER WOUDE).

(Communicated at the meeting of September 26, 1936).

§ 1. In $(n-1)$-dimensional space S_{n-1} a *cast* (Dutch: *worp*)

$$[A_1\,;\,A_2\,;\,A_3\,;\,\ldots\,;\,A_n\,;\,A_{n+1}\,;\,A_{n+2}]$$

is formed by $(n+2)$ points, no n of which belong to a S_{n-2}, and which are taken in a given order.

A cast is numerically defined by the set of homogeneous coordinates

$$\{a_1\,;\,a_2\,;\,a_3\,;\,\ldots\,;\,a_n\}$$

of the last point A_{n+2} with regard to a system where the first n points, in the given order, are fundamental points and the last point but one, A_{n+1}, is unit-point.

It is clear that casts are invariant under the projective group.

§ 2. In S_n a number of $(n+2)$ rays a through one point A, no n of which belong to a S_{n-1}, intersect any S_{n-1} not containing A, in