where $|arg(-z)| < \pi$, and

$$\frac{F(a, b; c; z)}{\Gamma(c)\,\Gamma(c-a-b)} = \frac{F(a, b; a+b-c+1; 1-z)}{\Gamma(c-a)\,\Gamma(c-b)}$$

$$+ (1-z)^{c-a-b}\,\frac{F(c-a, c-b; c-a-b+1; 1-z)}{\Gamma(a)\,\Gamma(b)}$$

where $|arg(-z)| < \pi$ and $|arg(1-z)| < \pi$; the first result has to be modified when $a-b$ is an integer or zero, the second when $c-a-b$ is an integer or zero.

Physics. — *Ueber die konforminvariante Gestalt der relativistischen Bewegungsgleichungen.* Von J. A. SCHOUTEN und J. HAANTJES.

(Communicated at the meeting of October 31, 1936).

1. *Einleitung.*

In einer früheren Arbeit [1]) haben wir gezeigt, dass sich die MAXWELLschen Gleichungen und die Impulsenergiegleichungen konforminvariant schreiben lassen. In dieser Arbeit wird gezeigt, dass sich auch die relativistischen Bewegungsgleichungen geladener Teilchen in eine konforminvariante Form bringen lassen, vorausgesetzt dass man die Masse so mit transformiert, dass das Produkt von Masse und Länge invariant bleibt. Es spielt dann $\frac{h}{c}$ (Dim. $[ML]$) eine ähnliche Rolle wie c in der gewöhnlichen Relativitätstheorie. Statt der Ruhmasse $\overset{\circ}{m}$ kommt eine andere Invariante, die Konformmasse $\overset{c}{m} = \overset{\circ}{m}\,(-\mathfrak{g})^{1/8}$, die die Dimension $[ML]$ hat. Wir geben hier nur die einfachen mathematischen Tatsachen und vermeiden physikalische Spekulationen.

Wir erinnern kurz an die früher erhaltenen Resultate. In einer Raumzeitwelt mit einer konformen Metrik gibt es keinen Fundamentaltensor g_{ih}, dagegen eine Tensordichte $\mathfrak{G}_{ih} = g_{ih}(-\mathfrak{g})^{-1/4}$ ($\mathfrak{g} = Det.\, g_{ih}$) vom Gewicht $-1/2$. Es gibt kein Linienelement $d\tau$, dagegen ein konformes (dimensionsloses) Linienelement $d\mathfrak{s}$, definiert durch:

$$(d\mathfrak{s})^2 = \mathfrak{G}_{ih}\, d\xi^i\, d\xi^h \quad \ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

---

[1]) Ueber die konforminvariante Gestalt der MAXWELLschen Gleichungen und der elektromagnetischen Impulsenergiegleichungen, Physica I (1934), 869- 872.

Die Ladung eines vierdimensionalen Volums $d\omega$, die selbst konforminvariant ist, legt mittels der Gleichung

$$de\, d\mathfrak{s} = \varrho\, d\omega \quad \ldots \ldots \ldots \quad (2)$$

eine Ladungsdichte vom Gewicht $+\frac{3}{4}$ (Dim.: $M^{1/2} L^{3/2} T^{-1}$) fest und aus dieser ergibt sich die Stromvektordichte vom Gewicht $+1$

$$\mathfrak{s}^h = \varrho \frac{d\xi^h}{d\mathfrak{s}} \quad \ldots \ldots \ldots \quad (3)$$

Es gelten die Gleichungen

$$\left.\begin{aligned}
F_{ji} &= 2\,\partial_{[j}\,\varphi_{i]}\ ;\ \partial_j = \frac{\partial}{\partial \xi^j}\ ;\ \text{(elektromagn. Feld)}\\
\partial_{[j}\, F_{ih]} &= 0\\
\mathfrak{F}^{hi} &= \mathfrak{G}^{hl}\, \mathfrak{G}^{ij}\, F_{lj}\\
\mathfrak{s}^h &= -\partial_j\, \mathfrak{F}^{jh}\\
\partial_j\, \mathfrak{s}^j &= 0\\
\mathfrak{S}^{h}_{.i} &= -\mathfrak{F}^{hj}\, F_{ij} + \tfrac{1}{4} F_{lj}\, \mathfrak{F}^{lj}\, A_i^h \ \text{(Impulsenergietensordichte)}\\
-\nabla_h\, \mathfrak{S}^{h}_{.i} &= \mathfrak{s}^j\, F_{ji} = \mathfrak{f}_i.\ \text{(Kraftvektordichte)}
\end{aligned}\right\} \quad . \quad (4)$$

Bis auf die letzte Gleichung treten keine kovarianten Differentiationen auf. Die ersten sechs Gleichungen sind also von jeder Wahl einer symmetrischen Uebertragung unabhängig, in dem Sinne, dass bei jeder solchen Wahl ∂_j durch ∇_j ersetzt werden darf. In der oben zitierten Arbeit haben wir gezeigt, dass die letzte Gleichung gilt für jede Uebertragung, für die $\nabla_j \mathfrak{G}^{hl} = 0$ ist.

Bekanntlich legt $\mathfrak{G}_{ih}$ allein keine Uebertragung, also auch keine geodätischen Linien fest ausser den *geodätischen Nullinien*, die von jeder Wahl der Uebertragung unabhängig sind (Beweis im nächsten Abschnitt). Wenn also bestimmte Weltlinien resultieren sollen, so muss irgend etwas hinzugefügt werden, und es ist bekannt, dass die Forderung der Linearität der Uebertragung zwangläufig zu einer WEYLschen Uebertragung führt.

2. *Parallelverschiebung von Vektordichten bei einer* WEYL*schen Uebertragung in X_4.*

Sind Γ_{ji}^h die Parameter einer linearen Uebertragung, so ist das kovariante Differentialquotient einer Dichte $\mathfrak{y}^\varkappa$ vom Gewicht $\mathfrak{k}$ gegeben durch die Gleichung

$$\nabla_j\, \mathfrak{y}^h = \partial_j\, \mathfrak{y}^h + \Gamma_{ji}^{h}\, \mathfrak{y}^i - \mathfrak{k}\, \Gamma_{ji}^{i}\, \mathfrak{y}^h \quad \ldots \ldots \ldots \quad (5)$$

Bei einer WEYLschen Uebertragung ist

$$\Gamma_{ji}^{\ h} = \left\{ {h \atop j\,i} \right\} + \tfrac{1}{2}\left(Q_j A_i^h + Q_i A_j^h - \mathfrak{G}^{hk}\,\mathfrak{G}_{ij}\,Q_k\right), \quad . \quad . \quad . \quad (6)$$

wo Q_i ein Vektor ist, der sich bei der konformen Transformation („Umeichung")

$$g'_{ih} = \sigma g_{ih} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (7)$$

folgendermassen transformiert

$$Q'_j = Q_j - \partial_j \log \sigma \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (8)$$

Da $\left\{ {i \atop j\,i} \right\} = \frac{1}{2}\,\partial_j \log(-\mathfrak{g})$ ist, lautet die Differentiationsgleichung einer Vektordichte bei einer WEYLschen Uebertragung

$$\left.\begin{aligned} \nabla_j \mathfrak{y}^h = \partial_j \mathfrak{y}^h + \left\{ {h \atop j\,i} \right\} \mathfrak{y}^i - \tfrac{1}{2}\,\mathfrak{k}\,\mathfrak{y}^h\,\partial_j \log(-\mathfrak{g}) + \\ + \tfrac{1}{2}\left((1-4\,\mathfrak{k})\,Q_j A_i^h + Q_i A_j^h - \mathfrak{G}^{hk}\,\mathfrak{G}_{ij}\,Q_k\right)\mathfrak{y}^i \end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad (9)$$

Man leitet aus dieser Gleichung leicht ab, dass $\nabla_j \mathfrak{G}_{ih} = 0$ ist (unabhängig von der Wahl von Q_i).

Da $\dfrac{d\xi^h}{d\mathfrak{s}}$ das Gewicht $\frac{1}{4}$ hat, lautet die Gleichung einer geodätischen Linie, die nicht Nullinie ist

$$\left.\begin{aligned} \frac{\delta}{d\mathfrak{s}}\frac{d\xi^h}{d\mathfrak{s}} = \frac{d\xi^j}{d\mathfrak{s}}\nabla_j\frac{d\xi^h}{d\mathfrak{s}} = \frac{d\xi^j}{d\mathfrak{s}}\partial_j\frac{d\xi^h}{d\mathfrak{s}} + \left\{ {h \atop j\,i} \right\}\frac{d\xi^j}{d\mathfrak{s}}\frac{d\xi^i}{d\mathfrak{s}} - \\ - \frac{1}{8}\frac{d\xi^h}{d\mathfrak{s}}\frac{d\xi^j}{d\mathfrak{s}}\partial_j \log(-\mathfrak{g}) + \frac{1}{2}\left(Q_i A_j^h - \mathfrak{G}^{hk}\,\mathfrak{G}_{ij}\,Q_k\right)\frac{d\xi^i}{d\mathfrak{s}}\frac{d\xi^j}{d\mathfrak{s}} = 0. \end{aligned}\right\} \quad (10)$$

Ist die geodätische Linie aber Nullinie, so ist $d\mathfrak{s} = 0$. Man kann aber einen beliebigen skalaren Parameter z auf die Linie legen. Die Gleichung lautet dann

$$\left.\begin{aligned} \frac{\delta}{dz}\frac{d\xi^h}{dz} = \frac{d\xi^j}{dz}\partial_j\frac{d\xi^h}{dz} + \left\{ {h \atop j\,i} \right\}\frac{d\xi^j}{dz}\frac{d\xi^i}{dz} + \tfrac{1}{2}\left(Q_i A_j^h + Q_j A_i^h - \right. \\ \left. - \mathfrak{G}^{hk}\,\mathfrak{G}_{ij}\,Q_k\right)\frac{d\xi^i}{dz}\frac{d\xi^j}{dz} :: \frac{d\xi^h}{dz} \end{aligned}\right\} \quad (11)$$

(:: = proportional zu) und es folgt also, dass die geodätischen Nullinien von der Wahl von Q_i unabhängig sind.

Die Uebertragung heisst pseudo-WEYLsch, wenn der Vektor Q_i sich auf Null umeichen lässt, d.h. wenn er Gradientvektor ist. Ist diese Umeichung geschehen und hat man damit den Fundamentaltensor eingeführt i.b. auf welchen die Uebertragung eine RIEMANNsche ist, so geht (9) über in

$$\nabla_j \mathfrak{v}^h = \partial_j \mathfrak{v}^h + \left\{ {h \atop j\,i} \right\} \mathfrak{v}^i - \tfrac{1}{2}\,\mathfrak{k}\, \mathfrak{v}^h\, \partial_j \log(-\mathfrak{g}) \quad . \; . \; . \quad (12)$$

Aus den Γ_{ji}^h einer allgemeinen WEYLschen Uebertragung kann man in bekannter Weise den Krümmungsaffinor $R_{kji}^{\cdot\cdot\cdot h}$, daraus die Grösse $R_{ji} = R_{hji}^{\cdot\cdot\cdot h}$ und schliesslich die Dichte $\mathfrak{R} = R_{ji}\,\mathfrak{G}^{ji}$ vom Gewicht $\frac{1}{2}$ bilden. Diese Dichte legt einen Fundamentaltensor $\varepsilon^2 \overset{\circ}{g}_{ih} = \mathfrak{G}_{ih}\,\mathfrak{R}$ und damit ein absolutes (kosmologisch bestimmtes) Mass fest. Die konstante ε (Dimension $[L^{-1}]$) ist so gewählt, dass die gewöhnlichen Masseinheiten resultieren, also ist ε sehr klein, da in materiefreien Gebieten $\mathfrak{R}$ jedenfalls sehr klein ist [1]).

Führen wir für den Skalar $\mathfrak{R}(-\mathfrak{g})^{-\frac{1}{4}}$, der bei Umeichung den Faktor σ^{-1} bekommt, die Bezeichnung $\varepsilon^2 S$ ein, so ist bei Umeichung

$$\partial_j \log S' = \partial_j \log S - \partial_j \log \sigma \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (13)$$

und daraus geht hervor dass

$$Q_j = P_j + \partial_j \log S \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (14)$$

ist, wo P_j ein bei Umeichung invarianter Vektor ist. Bei Umeichung auf absolutes Mass wird $S = 1$ und $Q_j = P_j$.

3. *Ableitung der konforminvarianten Gestalt der Bewegungsgleichungen.*

Die klassisch-relativistischen Bewegungsgleichungen für einen Punkt mit Ruhmasse $\overset{\circ}{m}$ und Ladung e im leeren Raum lauten

$$\overset{\circ}{m}\left(\frac{d^2\xi^h}{d\tau^2} + \left\{ {h \atop j\,i} \right\} \frac{d\xi^j}{d\tau}\,\frac{d\xi^i}{d\tau}\right) = \frac{e}{c}\,\frac{d\xi^i}{d\tau}\, F_{ij}\, g^{hj} . \quad . \; . \; . \quad (15)$$

Führen wir statt $d\tau$ das konforminvariante Linienelement $d\mathfrak{s} = (-\mathfrak{g})^{-1/8}\, c\, d\tau$ ein, so geht die Gleichung über in:

$$\frac{d^2\xi^h}{d\mathfrak{s}^2} + \left\{ {h \atop j\,i} \right\} \frac{d\xi^j}{d\mathfrak{s}}\,\frac{d\xi^i}{d\mathfrak{s}} - \frac{1}{8}\,\frac{d\xi^h}{d\mathfrak{s}}\,\frac{d\xi^j}{d\mathfrak{s}}\,\partial_j \log(-\mathfrak{g}) = \frac{e}{\overset{\circ}{m}\, c^2}\,(-\mathfrak{g})^{-1/8}\,\frac{d\xi^i}{d\mathfrak{s}}\, F_{ij}\,\mathfrak{G}^{hj} . \quad (16)$$

[1]) H. WEYL, R. Z. M.; vierte Auflage, S. 269.

Da $\frac{e}{\overset{\circ}{m}\, c^2}(-\mathfrak{g})^{-1/8} F_{ij}$ dimensionslos ist und $\mathfrak{G}^{hj}$ und $\frac{d\xi^i}{d\mathfrak{s}}$ konforminvariant sind, ist die rechte Seite konforminvariant. Vergleichung mit (10) lehrt, dass die linke Seite genau gleich $\frac{\delta}{d\mathfrak{s}}\frac{d\xi^h}{d\mathfrak{s}}$ ist für eine speudo-WEYLsche Uebertragung deren Q_i gerade zufällig auf Null reduziert ist. Die für beliebige konforme Transformationen invariante Form der Gleichung lautet also

$$\left.\begin{aligned}\frac{\delta}{d\mathfrak{s}}\frac{d\xi^h}{d\mathfrak{s}} = \frac{d^2\xi^h}{d\mathfrak{s}^2} + \left\{ {h \atop j\,i} \right\} \frac{d\xi^j}{d\mathfrak{s}}\frac{d\xi^i}{d\mathfrak{s}} - \frac{1}{8}\frac{d\xi^h}{d\mathfrak{s}}\frac{d\xi^i}{d\mathfrak{s}}\,\partial_i \log(-\mathfrak{g}) + \\ + \tfrac{1}{2}(A_j^h P_i - \mathfrak{G}^{hk}\mathfrak{G}_{ij} P_k)\frac{d\xi^j}{d\mathfrak{s}}\frac{d\xi^i}{d\mathfrak{s}} + \tfrac{1}{2}(A_j^h\,\partial_i \log S - \mathfrak{G}^{hk}\mathfrak{G}_{ij}\,\partial_k \log S)\frac{d\xi^j}{d\mathfrak{s}}\frac{d\xi^i}{d\mathfrak{s}} = \\ = \frac{e}{\overset{\circ}{m}\, c^2}(-\mathfrak{g})^{-1/8}\frac{d\xi^i}{d\mathfrak{s}} F_{ij}\,\mathfrak{G}^{hj},\end{aligned}\right\} \quad (17)$$

wo P_i vorläufig noch als Gradientvektor gedacht ist. Führt man wieder den Parameter τ ein, so lautet die Gleichung

$$\left.\begin{aligned}\frac{d^2\xi^h}{d\tau^2} + \left\{ {h \atop j\,i} \right\}\frac{d\xi^j}{d\tau}\frac{d\xi^i}{d\tau} + \tfrac{1}{2}(A_j^h Q_i - \mathfrak{G}^{hk}\mathfrak{G}_{ij} Q_k)\frac{d\xi^i}{d\tau}\frac{d\xi^j}{d\tau} = \\ = \frac{e}{\overset{\circ}{m}\, c}\frac{d\xi^i}{d\tau} F_{ij}\, g^{jh}.\end{aligned}\right\} \quad (18)$$

Da die MAXWELLschen Gleichungen konforminvariant sind, folgt, dass sowohl e als F_{ij} konforminvariant sein müssen. Da auch die Konforminvarianz von c ausser Frage ist, kann $\frac{e}{\overset{c}{m}\, c^2}(-\mathfrak{g})^{-1/8} F_{ij}$ nur dann Dimensionslos sein, wenn $\overset{\circ}{m}$ bei der Transformation (7) einen Faktor $\sigma^{-\frac{1}{2}}$ bekommt. Rechts in (17) kommt dann im Nenner die konforminvariante Masse $\overset{c}{m} = \overset{\circ}{m}(-\mathfrak{g})^{1/8}$ mit der Dimension $[ML]$. Zu dieser Masse gehört die konforminvariante Massendichte $\overset{c}{\mu}$, definiert durch die Gleichung $c\,d\overset{\circ}{m}\,d\tau = d\overset{c}{m}\,d\mathfrak{s} = \overset{c}{\mu}\,d\omega$, die ebenfalls die Dimension $[ML]$ hat. $\overset{c}{\mu} c$ ist die konforminvariante Aktionsdichte. Transformation der Längen mit $\sigma^{\frac{1}{2}}$ muss also Transformation der Massen mit $\sigma^{-\frac{1}{2}}$ mit sich bringen. Dabei bleibt $\frac{h}{c}$ invariant und diese Konstante spielt also beim Uebergang zur konformen Relativitätstheorie eine ähnliche Rolle wie c beim Uebergang zur gewöhnlichen. Da die Dimensionen von e und F_{ij} beide $[M^{1/2}L^{3/2}T^{-1}] = [M^{1/2}L^{1/2}.\,L\,T^{-1}]$ sind, führt übrigens auch schon die Forderung der Konforminvarianz dieser Grössen zur Invarianz von $[ML]$.

Bekanntlich wird in der WEYLschen Theorie Q_i von vornherein mit dem unbestimmten elektromagnetischen Potentialvektor φ_i identifiziert. Abgesehen davon, dass dazu die an sich völlig freie Transformation von φ_i in einer physikalisch nicht recht begründeten Weise mit der Umeichung verknüpft werden muss, entsteht in dieser Weise eine WEYLsche Uebertragung, die jedenfalls für die Weltlinien freier Teilchen keine Bedeutung haben kann. Denn setzt man in (17) $P_i + \partial_i \log S$ dem Potentialvektor gleich, so ergeben sich Weltlinien, die für keine Festlegung des Potentialvektors mit den richtigen Weltlinien übereinstimmen können. Wir wollen dagegen fordern, dass die Gleichung (17), kurz geschrieben

$$\frac{\delta}{d\mathfrak{s}} \frac{d\xi^h}{d\mathfrak{s}} = \frac{e}{\overset{c}{m}\, c^2} \frac{d\xi^i}{d\mathfrak{s}} F_{ij}\, \mathfrak{G}^{hj} \quad \ldots\ldots \quad (19)$$

mit hinreichender Genauigkeit die richtigen experimentell genügend gesicherten Weltlinien ergibt, wenn das kosmologisch bestimmte natürliche Mass zu grunde gelegt wird. Daraus geht hervor, dass der bei Umeichung invariante Vektor P_i, ob Gradientvektor oder nicht, jedenfalls in materiefreien Gebiete sehr klein ist den anderen in der Gleichung vorkommenden Grössen gegenüber. Denn bei Umeichung auf natürliches Mass verschwindet der Term mit S und muss die Gleichung bis auf eine kleine mit den Messresultaten verträgliche Abweichung in (15) übergehen. Es wäre nicht unmöglich dass P_i u. a. einen Term enthält von der Form $a\, \partial_i \log \frac{\overset{c}{\mu}{}^{1/2}}{\mathfrak{R}}$, wo a irgend eine Konstante darstellt. Dies ergäbe eine eventuell experimentell zugängliche Abweichung der Weltlinien abhängig von der konforminvarianten Aktionsdichte.

4. *Die konforminvariante Gestalt der* DIRAC*schen Gleichung.*

Es ist in letzter Zeit von verschiedenen Autoren versucht worden eine konforminvariante DIRACsche Gleichung auf zu stellen [1]).

DIRAC kommt zu dem Resultat, dass es keinen einfachen Weg gibt zu einer solchen Gleichung zu gelangen [2]). Unter konforminvariant wird dabei verstanden nur abhängig von $\mathfrak{G}_{ih}$, nicht noch von irgendeinem Felde Q_i. Wir lassen die letzte Beschränkung fallen, da es ja nun tatsächlich in der Natur mal Weltlinien, also irgend eine Art von Uebertragung, zu geben scheint und betrachten die DIRACsche Gleichung in der Form

$$\left(\frac{h}{i}\, a^j\, \nabla_j + \overset{\circ}{m}\, c\, a^0\right) \psi = 0 \quad \ldots\ldots \quad (20)$$

---

1) A. M. DIRAC, Wave equations in conformal space. Annals of Math. **37**, 429—442 (1936).
O. VEBLEN, A conformal wave equation. Proc. Nat. Acad. of Sci. **21**, 484—487 (1935).

2) L. c. S. 442.

In einer konformen Geometrie muss $'\alpha^j = (-\mathfrak{g})^{1/8}\,\alpha^j$ verwendet werden statt α^j, da

$$'\alpha^{(h}\,'\alpha^{i)} = \mathfrak{G}^{hi} \qquad (21)$$

ist und nur $\mathfrak{G}^{hi}$ verfügbar ist. Dann lautet die Gleichung aber

$$\left(\frac{h}{i}\,(-\mathfrak{g})^{1/8}\,\alpha^j\,\nabla_j + \overset{\circ}{m}\,(-\mathfrak{g})^{1/8}\,c\,'\alpha^0\right)\psi = 0 \qquad (22)$$

mit

$$'\alpha^0 \doteq {}'\alpha^{[1}\,'\alpha^2\,'\alpha^3\,'\alpha^{4]} = \alpha^0 \qquad (23)$$

und diese Gleichung ist bei konstanter Masse im zweiten Term nicht mehr konforminvariant, da $'\alpha^0$ das Gewicht Null hat. Nach unserem Ansatz ist nun aber gerade $\overset{c}{m} = \overset{\circ}{m}\,(-\mathfrak{g})^{1/8}$ konforminvariant, und wir gelangen also sofort zur konforminvarianten DIRACschen Gleichung

$$\left(\frac{h}{i}\,'\alpha^j\,\nabla_j + \overset{c}{m}\,c\,'\alpha^0\right)\psi = 0 \qquad (24)$$

Die Gleichung ist bis auf den Einfluss eines eventuellen Vektors P_i in ∇_j identisch mit der gewöhnlichen DIRACschen Gleichung, sodass man sagen kann, dass die gewöhnliche DIRACsche Gleichung, die bekannte Ersetzung von ∂_j durch ∇_j beiseite gelassen, schon konforminvariant ist, sofern man Konforminvarianz in unserem Sinne auffast und die richtige Massetransformation einführt.

Bei Verwendung der konformen Gleichung muss man natürlich erwarten, dass $\bar{\psi}\psi$ die konforminvariante elektrische Wahrscheinlichkeitsdichte ϱ vom Gewicht $\frac{3}{4}$ darstellt, d. h. ψ muss als Dichte vom Gewicht $\frac{3}{8}$ normiert werden. Da das dreidimensionale Raumelement $d\omega_3$ eine Dichte vom Gewicht $-\frac{3}{4}$ ist, hat $\varrho\, d\omega_3$ richtig das Gewicht Null. Dann hat aber auch tatsächlich $\bar{\psi}\,'\alpha^h\,\psi$ das Gewicht $+1$, wie es von dem Stromvektor $\mathfrak{s}^h$ verlangt wird.