One of the primary objects of this method has been to make it possible to measure ultraviolet light monochromatically with the aid of fluorescence screens. Working according to the usual principle of observing two brightnesses simultaneously it is necessary to make a well defined image of two fields on the fluorescence screen to observe a fairly sharp borderline. These considerations (small solid angles and diffusing of the light by the fluorescence screen) make the method impractical. The difficulties mentioned are eliminated when using the method of successive contrast. In the first place it is possible to work with large solid angles, secondly the image on the screen can be concentrated and thirdly the image can be observed according to the principle of MAXWELLian view (see fig. 4c). In this way the maximum amount of light is observed by the eye.

Conclusion: With the method of successive contrast the same accuracy is obtained as with the spectralpyrometer, but a much higher sensitivity is obtained. It also makes possible the monochromatic measurement of ultraviolet ligt.

Mathematics. — *Entwicklung einer analytischen Funktion nach* WHITTAKER-*schen Funktionen.* Von ARTUR ERDÉLYI. (Communicated by Prof. J. G. VAN DER CORPUT.)

(Communicated at the meeting of October 31, 1936).

In vorliegender Arbeit wird die Entwicklung einer analytischen Funktion einer komplexen Veränderlichen nach konfluenten hypergeometrischen Funktionen, bzw. gemischte Entwicklungen nach solchen Funktionen und gewissen Polynomen behandelt. Die konfluenten hypergeometrischen Funktionen $M_{k,m}(z)$ [1]) enthalten als Sonderfall die BESSELschen Funktionen und können gewissermassen als Verallgemeinerung dieser Funktionenklasse aufgefasst werden. In gleicher Weise sind die zu definierenden Polynome in $\frac{1}{t}$, $A_{k,m,n}(t)$ Verallgemeinerungen der NEUMANNschen Polynome $O_n(t)$ [2]) bzw. der GEGENBAUERschen Polynome $A_{n,\nu}(t)$ [3]), wie denn auch die in dieser Abhandlung bewiesenen Entwicklungen nur die

---

[1]) Wegen ihrer Definition vgl. E. T. WHITTAKER and G. N. WATSON, A course of modern analysis, 4th Ed. Cambridge 1927 insbesondere Kap. XVI. Dieses Werk wird mit M.A. zitiert.

[2]) C. G. NEUMANN, Theorie der BESSELschen Funktionen. Ein Analogon zur Theorie der Kugelfunktionen. Leipzig (1867); Ueber die Entwicklung beliebig gegebener Funktionen nach den BESSELschen Funktionen. Journal für Math. **67**, 310—314 (1867). Vgl. auch G. N. WATSON, A treatise on the Theory of BESSEL Functions, Cambridge (1922), insbesondere §§ 9,1—9,17. Dieses letztere Werk wird mit B.F. zitiert.

[3]) L. GEGENBAUER, Ueber die BESSELschen Funktionen. Sitzungsberichte der Akademie der Wissenschaften Wien (2) **74**, 124—130 (1877). Vgl. auch B.F., § 9,2.

Verallgemeinerungen der bekannten NEUMANNschen Entwicklungen [4]) sind. Einige spezielle Reihen vom hier behandelten Typus kommen vor in einer früheren Arbeit des Verfassers [5]).

In weiteren Arbeiten werden die in dieser Arbeit eingeführten Polynome $A_{k,m,n}(t)$ untersucht, sowie einige Sonderfälle besprochen, die auf BESSELsche Funktionen bzw. LAGUERREsche Polynome führen.

§ 1. *Entwicklung der Potenz.*

Wir beginnen damit, dass wir eine beliebige Potenz von z, etwa $z^{m+\frac{1}{2}}$, in eine Reihe von der Form $\sum\limits_{n=0}^{\infty} C_{k,m+n,n} M_{k,m+n}(z)$ entwickeln. Dabei gehen wir von einer bereits abgeleiteten Beziehung [6]) aus, die wir für unsere Zwecke nach einigen einfachen Umformungen in folgender Gestalt schreiben können:

$$z^{m+\frac{1}{2}} e^{\frac{1}{2}z} = \sum_{p=0}^{\infty} \frac{1}{p!} \frac{(k+m+\frac{1}{2})_p}{(2m+p)_p} M_{k,m+p}(z), \quad . \quad . \quad . \quad (1,1)$$

gültig für jedes $z \neq 0$, jedes k und jedes m, unter der Voraussetzung dass $2\,m$ keine negative ganze Zahl ist. Dabei bedeutet

$$(a)_p = a\,(a+1)\ldots(a+p-1) = \frac{\Gamma(a+p)}{\Gamma(a)}. \quad . \quad . \quad . \quad (1,2)$$

Setzen wir auf der rechten Seite der Identität

$$z^{m+\frac{1}{2}} = z^{m+\frac{1}{2}} e^{\frac{1}{2}z} e^{-\frac{1}{2}z} = \sum_{s=0}^{\infty} \frac{1}{s!} \left(-\frac{1}{2}\right)^s z^{m+s+\frac{1}{2}} e^{\frac{1}{2}z}$$

für $z^{m+s+\frac{1}{2}} e^{\frac{1}{2}z}$ die aus (1, 1) durch Ersetzung von m durch $m+s$ entstehende Reihe ein, so ergibt sich

$$z^{m+\frac{1}{2}} = \sum_{s=0}^{\infty} \frac{1}{s!} \left(-\frac{1}{2}\right)^s \sum_{p=0}^{\infty} \frac{1}{p!} \frac{(k+m+s+\frac{1}{2})_p}{(2m+2s+p)_p} M_{k,m+p+s}(z).$$

In dieser Reihe setzen wir $p+s=n$ und ordnen sie entsprechend um, was wegen der absoluten Konvergenz statthaft ist, und erhalten

$$z^{m+\frac{1}{2}} = \sum_{n=0}^{\infty} M_{k,m+n}(z) \sum_{p=0}^{n} \frac{(k+m+n-p+\frac{1}{2})_p\,(-\frac{1}{2})^{n-p}}{p!\,(n-p)!\,(2m+2n-p)_p}. \quad (1,3)$$

---

4) B.F., Kap. XVI.

5) Ueber eine Methode zur Gewinnung von Funktionalbeziehungen zwischen WHITTAKERschen Funktionen. Erscheint demnächst in den Monatsheften für Mathematik und Physik.

6) l.c. Fussnote 5) Gleichung (5, 4).

Nun folgt aus (1, 2)

$$(a)_p = (-1)^p (1-a-p)_p, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \qquad (1, 4)$$

daher ist

$$(k+m+n-p+\tfrac{1}{2})_p = (-1)^p (\tfrac{1}{2}-k-m-n)_p,$$
$$(2m+2n-p)_p = (-1)^p (1-2m-2n)_p$$

und

$$\frac{1}{(n-p)!} = \frac{1}{n!} \frac{n!}{(n-p)!} = \frac{(n-p+1)_p}{n!} = \frac{(-1)^p (-n)_p}{n!}.$$

Die Einsetzung der letzten drei Formeln in (1, 3) ergibt

$$z^{m+\frac{1}{2}} = \sum_{n=0}^{\infty} M_{k,m+n}(z) (-\tfrac{1}{2})^n \frac{1}{n!} \sum_{p=0}^{n} \frac{(-n)_p (\frac{1}{2}-k-m-n)_p}{p! (1-2m-2n)_p} 2^p$$

und daher folgenden

Satz I. *Ist $2m$ keine positive oder negative ganze Zahl*[7], *und werden die Konstanten $C_{k,m,n}$ durch die Beziehungen erklärt*

$$\left.\begin{aligned} C_{k,m,n} &= (-\tfrac{1}{2})^n \frac{1}{n!} \sum_{p=0}^{n} \frac{(-n)_p (\frac{1}{2}-k-m)_p}{p! (1-2m)_p} 2^p = \\ &= \frac{(-1)^n}{2^n \cdot n!} F(-n, \tfrac{1}{2}-k-m; 1-2m; 2), \end{aligned}\right\} \quad . \quad . \qquad (1, 5)$$

so gilt für alle endlichen von Null verschiedenen Werte von z

$$z^{m+\frac{1}{2}} = \sum_{n=0}^{\infty} C_{k,m+n,n} M_{k,m+n}(z) . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \qquad (1, 6)$$

In (1, 5) bedeutet F die gewöhnliche GAUSSsche hypergeometrische Reihe.

§ 2. *Entwicklung einer analytischen Funktion im Innern eines Kreises.*

Zunächst entwickeln wir die Funktion $z^{m+\frac{1}{2}}/(t-z)$ für $|z|<|t|$ in eine Reihe von der am Anfang des § 1 angegebenen Form. Diese Entwicklung stellen wir so auf, dass wir den in der zu entwickelnden Funktion vorkommenden CAUCHYschen Kern $(t-z)^{-1}$ in die geometrische Reihe entwickeln und für jedes Glied der so erhaltenen Reihe (1, 6) verwenden. So entsteht folgende Reihe:

$$\frac{z^{m+\frac{1}{2}}}{t-z} = \sum_{r=0}^{\infty} \frac{z^{m+r+\frac{1}{2}}}{t^{r+1}} = \sum_{r=0}^{\infty} t^{-r-1} \sum_{s=0}^{\infty} C_{k,m+r+s,s} M_{k,m+r+s}(z) \qquad (|z|<|t|).$$

[7]) Der Wert $m=0$ ist zulässig.

Wieder setzen wir $r+s=n$ und ordnen die Doppelreihe um, was wegen der absoluten Konvergenz gestattet ist und erhalten

$$\frac{z^{m+\frac{1}{2}}}{t-z}=\sum_{n=0}^{\infty} M_{k,m+n}(z) \sum_{s=0}^{n} C_{k,m+n,s}\, t^{-n+s-1}.$$

Erklären wir also die Funktionen $A_{k,m,n}(t)$, welche Polynome $(n+1)$-ten Grades in $\frac{1}{t}$ sind, durch die Beziehung

$$\left.\begin{aligned} A_{k,m,n}(t) &= \frac{1}{t^{n+1}} \sum_{s=0}^{n} C_{k,m,s}\, t^s = \\ &= \frac{1}{t^{n+1}} \sum_{s=0}^{n} F(-s, \tfrac{1}{2}-k-m; 1-2m; 2) \frac{(-\frac{1}{2}t)^s}{s!}, \end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad (2,1)$$

so ist für alle Werte von z, für welche $|z|<|t|$ ist

$$\frac{z^{m+\frac{1}{2}}}{t-z}=\sum_{n=0}^{\infty} A_{k,m+n,n}(t)\, M_{k,m+n}(z), \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2,2)$$

vorausgesetzt dass $2m$ keine ganze Zahl ist.

Mit Hilfe von (2, 2) ist es sehr leicht, die Entwicklung einer beliebigen analytischen Funktion von z anzugeben. Es sei $f(z)$ eine innerhalb des um den Nullpunkt beschriebenen Kreises $\mathfrak{R}$ und auf dessen Berandung eindeutige und reguläre Funktion der komplexen Veränderlichen z. Dann ist nach der CAUCHYschen Formel für jeden innerhalb des Kreises $\mathfrak{R}$ gelegenen Punkt z

$$f(z)\, z^{m+\frac{1}{2}}=\frac{1}{2\pi i}\int_{\mathfrak{R}} \frac{f(t)\, z^{m+\frac{1}{2}}}{t-z}\, dt.$$

Verwenden wir im Integranden (2, 2) und integrieren gliedweise, was wegen der gleichmässigen Konvergenz von (2, 2) statthaft ist, so erhalten wir

$$z^{m+\frac{1}{2}} f(z)=\sum_{n=0}^{\infty} M_{k,m+n}(z) \cdot \frac{1}{2\pi i}\int_{\mathfrak{R}} f(t)\, A_{k,m+n,n}(t)\, dt \quad . \quad . \quad (2,3)$$

und hieraus folgenden

Satz II. *Ist $f(z)$ eine im Innern und auf dem Rande des um den Nullpunkt beschriebenen Kreises $\mathfrak{R}$ eindeutige und reguläre Funktion von z und $2m$ keine positive oder negative ganze Zahl, so ist die Funktion $z^{m+\frac{1}{2}} f(z)$ in eine nach konfluenten hypergeometrischen Funktionen fortschreitende Reihe von der Form*

$$z^{m+\frac{1}{2}} f(z)=\sum_{n=0}^{\infty} a_n\, M_{k,m+n}(z) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2,4)$$

entwickelbar. Die Reihe konvergiert für jeden im Inneren von $\mathfrak{R}$ gelegenen Punkt z und ihre Koeffizienten sind gegeben durch die Formel

$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{\mathfrak{R}} f(t) \, A_{k,m+n,n}(t) \, dt \, . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2,5)$$

Zur Berechnung der Koeffizienten kann auch die MACLAURINsche Reihe der Funktion $f(z)$ herangezogen werden. Unter den angegebenen Voraussetzungen ist im Innern und auf dem Rande von $\mathfrak{R}$

$$f(t) = \sum_{r=0}^{\infty} \frac{f^{(r)}(0)}{r!} t^r .$$

Setzen wir diesen Ausdruck, sowie (2, 1) in (2, 5) ein, so erhalten wir

$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{\mathfrak{R}} \sum_{r=0}^{\infty} \frac{f^{(r)}(0)}{r!} t^r \cdot \sum_{s=0}^{n} C_{k,m+n,s} \, t^{-n+s-1} dt = \sum_{s=0}^{n} C_{k,m+n,s} \frac{f^{(n-s)}(0)}{(n-s)!}, \quad (2,6)$$

oder wegen (1, 5)

$$a_n = \sum_{s=0}^{n} \frac{(-1)^s f^{(n-s)}(0)}{2^s \, s! \, (n-s)!} F\left(-s, \tfrac{1}{2} - k - m - n; 1 - 2m - 2n; 2\right) \quad . \quad (2,7)$$

§ 3. *Konvergenz der Reihe* $\sum_{n=0}^{\infty} a_n M_{k,m+n}(z)$.

Um über die Konvergenz der im Titel dieses § genannten unendlichen Reihe Aussagen machen zu können, untersuchen wir zunächst das asymptotische Verhalten der Funktion $M_{k,m}(z)$ für grosse positive Werte von $\mathfrak{Re}\, m$. Die der Differentialgleichung

$$\frac{d^2 y}{dz^2} + \left(-\tfrac{1}{4} + \frac{k}{z} + \frac{\tfrac{1}{4} - m^2}{z^2} \right) y = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (3,1)$$

genügende Funktion $M_{k,m}(z)$ weist in der Umgebung des Nullpunktes eine Reihenentwicklung von der Form

$$M_{k,m}(z) = z^{m+\frac{1}{2}} (1 + c_1 z + c_2 z^2 + \ldots) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (3,2)$$

auf [8]). Gehen wir mit dem Ansatz (3, 2) in (3, 1) ein und vergleichen die Koeffizienten gleich hoher Potenzen von z, so erhalten wir mit den Festsetzungen

$$c_{-1} = 0, \quad c_0 = 1$$

---

[8]) M.A., § 16,1.

folgende Rücklaufformel für die Koeffizienten c_r [9])

$$[(m+r+\tfrac{1}{2})(m+r-\tfrac{1}{2})+\tfrac{1}{4}-m^2]\,c_r+k\,c_{r-1}-\tfrac{1}{4}c_{r-2}=0 \qquad (r=1,2,\ldots),$$

aus der sich

$$c_r=\frac{\frac{1}{4}c_{r-2}-k\,c_{r-1}}{r(2m+r)} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (3,3)$$

ergibt. Daraus folgt für sehr grosse positive Werte von $\Re e\, m$

$$c_r=O\left(\frac{1}{[\Re e\, m]^{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}r}}\right) \qquad (r=1,2,\ldots) \quad \ldots\ldots \quad (3,4)$$

gleichmässig in r, also

$$M_{k,m}(z)=z^{m+\frac{1}{2}}\left[1+O\left(\frac{1}{\Re e\, m}\right)\right] \quad \ldots\ldots \quad (3,5)$$

Nachdem wir das asymptotische Verhalten der konfluenten hypergeometrischen Funktion in dem uns interessierenden Falle kennengelernt haben, können wir sofort die Frage nach der Konvergenz der im Titel genannten Reihe beantworten. Aus (3, 5) folgt insbesondere, dass für hinreichend grosse positiv ganzzahlige Werte von n stets

$$M_{k,m+n}(z)=z^{m+n+\frac{1}{2}}\left[1+O\left(\frac{1}{n}\right)\right] \quad \ldots\ldots\ldots \quad (3,6)$$

ist. Daraus geht hervor, dass die Reihe $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n\, M_{k,m+n}(z)$ genau wie die ihr „zugeordnete Potenzreihe" $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n\, z^n$ einen Konvergenzkreis besitzt, dessen Halbmesser durch die Formel

$$R=\frac{1}{\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\left|\sqrt[n]{a_n}\right|} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (3,7)$$

gegeben ist; im Innern des Konvergenzkreises konvergiert sie absolut und gleichmässig und divergiert in jedem Punkte ausserhalb des Konvergenzkreises. Genau so, wie bei den Potenzreihen zeigt man, dass auf dem Rande des Konvergenzkreises mindestens eine Singularität der durch die Reihe dargestellten innerhalb des Konvergenzkreises mit Ausnahme des Punktes $z=0$ überall regulären Funktion liegen muss. Ferner kann man genau so,

---

[9]) Da für den hier verfolgten Zweck nur die Grössenordnung der Koeffizienten von Belang ist, begnügen wir uns an dieser Stelle mit der Aufstellung der Rekursionsformeln und verzichten auf die explizite Ausrechnung der Koeffizienten, die übrigens durch hypergeometrische (JACOBIsche) Polynome dargestellt werden können.

wie WATSON es im Falle der NEUMANNschen Reihen getan hat [10]) zeigen, dass die im Titel genannte Reihe höchstens dieselben Singularitäten haben kann, wie die ihr zugeordnete Potenzreihe.

§ 4. *Entwicklungen in einem Ringgebiet.*

Es seien $\mathfrak{R}$ bzw. $\mathfrak{r}$ zwei konzentrische Kreise mit den Halbmessern R bzw. r, deren gemeinsamer Mittelpunkt der Punkt $z=0$ ist. Dann ist für

$$r < |z| < R \quad \ldots\ldots\ldots \quad (4,1)$$

nach (2, 2) für t auf $\mathfrak{R}$

$$\frac{1}{t-z} = z^{-m-\frac{1}{2}} \sum_{n=0}^{\infty} A_{k,m+n,n}(t)\, M_{k,m+n}(z), \quad \ldots\ldots \quad (4,2)$$

während für t auf $\mathfrak{r}$ nach derselben Gleichung wegen (4, 1)

$$\frac{1}{t-z} = -\,t^{-m-\frac{1}{2}} \sum_{n=0}^{\infty} A_{k,m+n,n}(z)\, M_{k,m+n}(t). \quad \ldots\ldots \quad (4,3)$$

ist.

Ist $f(z)$ eine im Bereich $r \leqq |z| \leqq R$ eindeutige und reguläre Funktion von z, so ist bekanntlich für $r < |z| < R$

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\mathfrak{R}} \frac{f(t)\,dt}{t-z} - \frac{1}{2\pi i}\int_{\mathfrak{r}} \frac{f(t)\,dt}{t-z}.$$

Da für jeden inneren Punkt dieses Gebietes (4, 1) erfüllt ist, so können wir im ersten Integral (4, 2), im zweiten (4, 3) verwenden und gliedweise integrieren, wodurch sich folgende Beziehung ergibt:

$$\left.\begin{aligned} f(z) = z^{-m-\frac{1}{2}} \sum_{n=0}^{\infty} M_{k,m+n}(z)\, \frac{1}{2\pi i}\int_{\mathfrak{R}} f(t)\, A_{k,m+n,n}(t)\, dt \\ + \sum_{n=0}^{\infty} A_{k,m+n,n}(z)\, \frac{1}{2\pi i}\int_{\mathfrak{r}} f(t)\, t^{-m-\frac{1}{2}} M_{k,m+n}(t)\, dt. \end{aligned}\right\} \quad . \quad (4,4)$$

Daher besteht folgender

Satz III. *Ist $f(z)$ eine im Innern und auf dem Rande des durch die beiden Kreise $\mathfrak{R}$ und $\mathfrak{r}$ begrenzten Ringbereiches eindeutige und reguläre Funktion von z, so gestattet sie, vorausgesetzt, dass $2m$ keine positive oder*

---

[10]) B.F., § 16,2.

negative ganze Zahl ist, eine in allen inneren Punkten dieses Gebietes konvergente Reihenentwicklung der Gestalt

$$f(z) = z^{-m-\frac{1}{2}} \sum_{n=0}^{\infty} a_n M_{k,m+n}(z) + \sum_{n=0}^{\infty} b_n A_{k,m+n,n}(z), \quad . \quad . \quad (4,5)$$

deren Koeffizienten auf folgende Weise berechnet werden können:

$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{\mathfrak{R}} f(t) A_{k,m+n,n}(t)\, dt, \quad b_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{\mathfrak{r}} f(t)\, t^{-m-\frac{1}{2}} M_{k,m+n}(t)\, dt. \quad (4,6)$$

Aehnlich wie in § 2 können die Koeffizienten a_n und b_n durch die Koeffizienten der LAURENTschen Entwicklung von $f(z)$ ausgedrückt werden. Ist insbesondere $f(z)$ noch überdies im Innern von $\mathfrak{r}$ überall eindeutig und regulär, so verschwinden alle Koeffizienten b_n $(n = 0, 1, 2, \ldots)$ und die Entwicklung (4, 5) reduziert sich auf (2, 4).

Mathematisches Seminar
der Deutschen Technischen Hochschule.

Brünn, Juni 1936.

Chemistry. — *Recherche quantitative sur l'échange d'ions produit par l'addition, au sol négatif de AgI, de nitrates de thorium, d'hexol et de cérium.* Par J. GILLIS et J. EECKHOUT. (Communicated by Prof. H. R. KRUYT.)

(Communicated at the meeting of October 31, 1936).

I. *Introduction.*

Les travaux de H. G. BUNGENBERG DE JONG ont révélé que le nitrate de thorium est en état de produire la coacervation lorsqu'on l'ajoute à la gomme arabique p.e. Cette *auto-coacervation complexe*, produite par des ions polyvalents de signe contraire à celui du sol, s'expliquerait par l'apparition, sur les micelles du même colloïde, de charges de signes opposés.

D'après BUNGENBERG DE JONG [1]), l'ion polyvalent de signe contraire à celui du sol serait à même de créer des centres de signe opposé par le fait qu'une partie seulement de son champ électrique serait neutralisée à la

---

[1]) H. G. BUNGENBERG DE JONG et J. LENS: Ueber äquivalent Entladung und Umladung bei lyophilen Solen. Bioch. Zeitschr. **235**, p. 174 (1931).