Figure 8 represents the case of a floating piece of material when the angle of contact $\vartheta = 180^\circ$. This angle never occurs in practice.

The practical conclusion of our calculation, demonstrated by the figures is: The greater the angle of contact $\vartheta$, the better the floatability of the material

The reverse also holds true: The smaller the angle of contact $\vartheta$ the greater the tendency to sink.

No material with an angle of contact $\vartheta = 0^\circ$ i.e. completely wettable, can float by the action of surface tension.

Small particles will float even with small angles of contact.

In order to separate substances by flotation, the angle of contact of one of them must be zero. This means that this substance must be completely wettable like clean glass. Then it will sink. If for the other material the angle of contact is small and the specific weight is high then it must be finely ground in order that it should float.

*(To be continued.)*

---

**Mathematics.** — *Zur Differentialgeometrie der Gruppe der Berührungstransformationen. I. Doppelthomogene Behandlung von Berührungstransformationen.* Von J. A. SCHOUTEN.

(Communicated at the meeting of January 30, 1937).

I. *Einleitung.*

Bekanntlich hat LIE [1]) gezeigt, dass man eine allgemeine Berührungstransformation in den $2n-1$ Variablen $\xi^1, \ldots, \xi^n, \zeta_2, \ldots, \zeta_n$ schreiben kann als „homogene" Berührungstransformation in den $2n$ Variablen $\xi^1, \ldots, \xi^n, \eta_1, \ldots, \eta_n$, wo $\zeta_2 = -\eta_2/\eta_1$ u.s.w. Mit homogen ist hier gemeint, dass die transformierten $\xi$ und $\eta$ homogene Funktionen nullten bzw. ersten Grades in den alten $\eta$ sind. Nun zeigen die Formeln der also entstandenen homogenen Berührungstransformation eine merkwürdige Neigung zur Dualität zwischen $\xi$ und $\eta$, die sich aber nicht vollständig entfalten kann, schon aus dem einfachen Grunde weil ja die transformierten $\xi$ und $\eta$ keineswegs homogene Funktionen in den alten $\xi$ sind. Es erhebt sich da die Frage ob sich die Koordinaten nicht noch anders wählen lassen und zwar so, dass eine in jeder Beziehung vollständige Dualität zu Tage tritt. Diese Frage lässt sich bejahend beantworten. Wählen wir statt der gewöhnlichen Punktkoordinaten $\xi^h$ die aus der Geometrie der $H_n$ [2]) bekannten VAN DANTZIG'schen homogenen Punkt-

---

[1]) S. LIE, Theorie der Transformationsgruppen, Bd. II, S. 139 u.f.

[2]) D. v. DANTZIG, Theorie des projektiven Zusammenhangs $n$-dimensionaler Räume, Math. Ann. **106**, 400—454 (1932); J. A. SCHOUTEN und J. HAANTJES, Zur allgemeinen projektiven Differentialgeometrie, Comp. Math. **3**, 1—51 (1936), daselbst auch weitere Litteratur.

koordinaten $x^0, x^1, \ldots, x^n$; $\xi^1 = x^1/x^0$ u.s.w. und statt der Facettenkoordinaten $\eta_1, \ldots, \eta_n$ die Koordinaten $p_0, p_1, \ldots, p_n$ die den Gleichungen

$$\left.\begin{array}{l} p_1 : \ldots : p_n = \eta_1 : \ldots : \eta_n \\ x^0 p^0 + \ldots x^n p_n = 0 \end{array}\right\} \quad \ldots \ldots \quad (1)$$

genügen, infolge welcher Gleichungen

$$p_0 : p_1 : \ldots : p_n = -(\xi^1 \eta_1 + \ldots + \xi^n \eta_n) : \eta_1 : \ldots : \eta_n \quad \ldots \quad (2)$$

wird, so werden die transformierten $x$ homogene Funktionen ersten und nullten Grades und die transformierten $p$ homogene Funktionen nullten und ersten Grades in den alten $x$ bzw. $p$ *und es ergibt sich ein vollkommen dualistische Behandlung*. In dieser ersten Mitteilung soll nur der Aufbau dieser neuen dualistischen Methode kurz skizziert werden [1]).

2. *Die Geometrie der $H_n$.*

Wir betrachten eine $X_{n+1}$ mit den Urvariablen $x^\varkappa$ $(\varkappa, \ldots \tau = 0, 1, \ldots, n)$ und schränken die Koordinatentransformationen ein auf die Gruppe $\mathfrak{H}_{n+1}$ der im betrachteten Gebiet kontinuierlichen und hinreichend oft differenzierbaren *homogenen* Transformationen vom Grade 1. Die Form der Gleichungen der „Strahlen" der $X_{n+1}$, definiert durch

$$x^\varkappa = \lambda c^\varkappa ; \; c^\varkappa = \text{Konstanten}, \quad \ldots \ldots \quad (3)$$

bleibt bei dieser Gruppe invariant. Die $n$-dimensionale Mannigfaltigkeit der Strahlen nennen wir $H_n$, jeden Strahl *Punkt* der $H_n$, jeden Punkt der $X_{n+1}$, mit Ausnahme von $x^\varkappa = 0$, *analytischen Punkt* der $H_n$. Der Punkt der $H_n$, der dem analytischen Punkte $x^\varkappa$ entspricht, wird mit $\llcorner x^\varkappa \lrcorner$ bezeichnet [2]).

Neben der Gruppe $\mathfrak{H}_{n+1}$ von *Koordinaten*transformationen betrachten wir die Gruppe $\mathfrak{F}$ von Transformationen *analytischer Punkte* von der Form [3])

$$'x^\varkappa = \varrho x^\varkappa ; \; \varrho = \text{homogen nullten Grades in } x^\varkappa \quad \ldots \quad (4)$$

die jeden einzelnen *Punkt* invariant lässt. Die Transformationen von $\mathfrak{H}_{n+1}$ und $\mathfrak{F}$ sind vertauschbar. Denn, ist

$$\left.\begin{array}{l} x^{\varkappa'} = f^{\varkappa'}(x^\varkappa) \\ 'x^\varkappa = \varrho x^\varkappa \end{array}\right\} \quad \ldots \ldots \ldots \quad (5)$$

---

[1]) Besondere Anregung geward mir durch die Arbeit „Invariant theory of homogeneous contact transformations" von L. P. EISENHART und M. S. KNEBELMAN, Ann. of Math. **37**, 747—765 (1936), die die Theorie der homogenen Berührungstransformationen (im LIEschen Sinne) in ein ganz neues Licht stellt.

[2]) $\llcorner A \lrcorner$ bedeutet: Ideal von $A$, d.h. $A$ abgesehen von einem beliebigen Zahlenfaktor. (D. v. DANTZIG, On the general projective differential geometry III, Proc. Royal Acad. Amsterdam, **37**, 150—155 (1934)).

[3]) Bei Koordinatentransformationen ändert sich die Indexart, bei Objekttransformationen dagegen der Kernbuchstabe.

so folgt

$$'x^{\varkappa'} = f^{\varkappa'}('x^{\varkappa}) = f^{\varkappa'}(\varrho\, x^{\varkappa}) = \varrho\, f^{\varkappa'}(x^{\varkappa}) = \varrho\, x^{\varkappa'} \quad . \; . \; . \; . \quad (6)$$

Dies liegt natürlich daran, dass wir uns bei $\mathfrak{H}_{n+1}$ ausdrücklich auf homogene Funktionen *ersten* Grades beschränkt haben.

Alle geometrischen Objekte werden definiert i.b. auf bie beiden Gruppen, z.B.:

Kontravarianter bzw. kovarianter projektiver Vektor vom Grade $\mathfrak{r}$:

$$\mathfrak{H}_{n+1}: \begin{cases} v^{\varkappa'} = A^{\varkappa'}_{\varkappa}\, v^{\varkappa} \\ w_{\lambda'} = A^{\lambda}_{\lambda'}\, w_{\lambda} \end{cases}; \; A^{\varkappa'}_{\varkappa} = \frac{\partial x^{\varkappa'}}{\partial x^{\varkappa}}; \; \mathfrak{F}: \begin{cases} 'v^{\varkappa} = \varrho^{\mathfrak{r}} v^{\varkappa} \\ 'w_{\lambda} = \varrho^{\mathfrak{r}} w_{\lambda} \end{cases} \quad . \; . \; . \quad (7)$$

$\lfloor v^{\varkappa} \rfloor$ stellt einen Punkt im Lokalraum dar, $\lfloor w_{\lambda} \rfloor$ eine Hyperebene. Ist $v^{\varkappa} w_{\varkappa} = 0$, so liegt der Punkt in der Hyperebene. $x^{\varkappa}$ ist infolge (5) und (7) selbst ein kontravarianter projektiver Vektor vom Grade 1; $\lfloor x^{\varkappa} \rfloor$ stellt in jedem Lokalraum den *Kontaktpunkt* dar. Dagegen ist $dx^{\varkappa}$ kein projektiver Vektor, da die Transformation zwar bei $\mathfrak{H}_{n+1}$ richtig, bei $\mathfrak{F}$ aber unrichtig ist.

Wir betrachten jetzt in jedem Punkt $\lfloor x^{\varkappa} \rfloor$ die Menge aller kovarianten Vektoren $p_{\lambda}$ für welche $x^{\varrho} p_{\varrho} = 0$ ist. Die $\lfloor p_{\lambda} \rfloor$ sind alle Hyperebenen durch den Punkt $\lfloor x^{\varkappa} \rfloor$ im Lokalraum. Jedes einzelne $\lfloor p_{\lambda} \rfloor$ nennen wir eine *Facette* und die Kombination eines Kontaktpunktes $[x^{\varkappa}]$ mit einer zugehörigen Facette $\lfloor p_{\lambda} \rfloor$ ein *Element*. Die Kombination von $x^{\varkappa}$ und $p_{\lambda}$ heisse ein zu dem Element gehöriges *analytisches Element*. Zu einem Element gehören also $\infty^2$ analytische Elemente.

Zwei benachbarte Elemente $\lfloor x^{\varkappa} \rfloor$, $\lfloor p_{\lambda} \rfloor$ und $\lfloor x^{\varkappa} + dx^{\varkappa} \rfloor$, $\lfloor p_{\lambda} + dp_{\lambda} \rfloor$ liegen *vereinigt* [1]) wenn

$$p_{\varrho}\, dx^{\varrho} = 0 \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (8)$$

ist oder, was dasselbe ist

$$x^{\varrho}\, dp_{\varrho} = 0. \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (9)$$

Eine Menge von Elementen von denen je zwei benachbarte vereinigt liegen, heisst *Elementverein*.

3. *Die Geometrie der* $K_{2n-1}$.

Die Gesamtheit aller Elemente bildet eine Mannigfaltigkeit der Dimension $2n-1$ mit den zweimal $(n+1)$ homogenen Koordinaten $x^{\varkappa}$, $p_{\lambda}$, gebunden durch die Beziehung

$$x^{\varrho}\, p_{\varrho} = 0. \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (10)$$

Eine Transformation der Elemente, die

*A.* jedes Element in ein Element überführt,

*B.* die vereinigte Lage zweier benachbarter Elemente nicht zerstört,

*C.* eine eindeutige Umkehrung besitzt,

heisst *Berührungstransformation*.

---

[1]) LIE, a.a.O. S. 65.

Eine Berührungstransformation ist also jedenfalls von der Form

$$\left.\begin{aligned} {}'x^{\varkappa} &= \varphi^{\varkappa}(x^{\varrho}, p_{\sigma}) \\ {}'p_{\lambda} &= \psi_{\lambda}(x^{\varrho}, p_{\sigma}) \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (11)$$

mit nicht verschwindender Funktionaldeterminante (Bedingung $C$), wo die $\varphi^{\varkappa}$ und $\psi_{\lambda}$ *homogene* Funktionen irgendwelcher Grade in $x^{\varrho}$ und $p_{\sigma}$ sein müssen, da es sich ja um die Transformation von Elementen (nicht von analytischen Elementen) handelt und Aenderung der Wahl der Zahlenfaktoren in $x^{\varrho}, p_{\sigma}$ keine Aenderung des Elementes $\lfloor 'x^{\varkappa} \rfloor$, $\lfloor 'p_{\lambda} \rfloor$ herbeiführen darf. Die Wahl der Grade in $x^{\varrho}$ und $p_{\sigma}$ ist geometrisch belanglos, da man sowohl $\varphi^{\varkappa}$ als $\psi_{\lambda}$ mit einem beliebigen Faktor, homogen irgend welcher Grade in $x^{\varrho}$ und $p_{\sigma}$ multiplizieren kann ohne $\lfloor 'x^{\varkappa} \rfloor$ und $\lfloor 'p_{\lambda} \rfloor$ zu beeinflussen. Ferner muss, laut Bedingung $A$, $'x^{\varrho}\,'p_{\varrho} = 0$ folgen aus $x^{\varrho} p_{\varrho} = 0$ und laut, Bedingung $B$, ebenso $'p_{\varrho}\, d'x^{\varrho} = 0$ aus $p_{\varrho}\, dx^{\varrho} = 0$ und $x^{\varrho} p_{\varrho} = 0$.

Statt dieser Objekttransformationen betrachten wir hier lieber die korrespondierenden Koordinatentransformationen (wobei sich also die Elemente selbst nicht ändern, nur ihre Koordinaten)

$$\left.\begin{aligned} x^{\varkappa'} &= \varphi^{\varkappa'}(x^{\varrho}, p_{\sigma}) \\ p_{\lambda'} &= \psi_{\lambda'}(x^{\varrho}, p_{\sigma}) \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (12)$$

mit nicht verschwindender Funktionaldeterminante, wo jetzt die $\varphi^{\varkappa'}$ und $\psi_{\lambda'}$ homogene Funktionen in $x^{\varrho}$ und $p_{\sigma}$ sind und aus $x^{\varrho} p_{\varrho} = 0$ folgt $x^{\varrho'} p_{\varrho'} = 0$ und aus $x^{\varrho} p_{\varrho} = 0$ und $p_{\varrho}\, dx^{\varrho} = 0$ folgt $p_{\varrho'}\, dx^{\varrho'} = 0$.

Auch diese Transformationen nennen wir Berührungstransformationen. Daneben betrachten wir (wie in der $H_n$) die Gruppe der Transformationen analytischer Elemente

$$\mathfrak{J}:\ 'x^{\varkappa} = \varrho\, x^{\varkappa};\ \ 'p_{\lambda} = \sigma p_{\lambda} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (13)$$

Wir wollen nun versuchen die Wahl der Funktionen $\varphi^{\varkappa'}$ und $\psi_{\lambda'}$ einzuschränken, ohne dass dabei Berührungstransformationen verloren gehen. Da die Wahl der Grade von $\varphi^{\varkappa'}$ und $\psi_{\lambda'}$ in $x^{\varrho}, p_{\varrho}$ geometrisch belanglos ist, können wir zunächst diese Wahl einschränken durch zwei Forderungen

*a.* die Berührungstransformationen sollen mit den Transformationen von $\mathfrak{J}$ vertauschbar sein;

*b.* der Proportionalitätsfaktor beim Uebergang von $p_{\varrho}\, dx^{\varrho}$ auf $p_{\varrho'}\, dx^{\varrho'}$ für $(p_{\varrho} x^{\varrho} = 0)$ soll gleich eins werden:

$$p_{\varrho'}\, dx^{\varrho'} = p_{\varrho}\, dx^{\varrho} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (14)$$

Da jedenfalls für Elemente

$$p_{\varrho'}\, x^{\varrho'} = 0;\quad p_{\varrho}\, x^{\varrho} = 0 \quad \ldots\ldots\ldots \quad (15)$$

ist, folgt für Elemente bei Differentiation von (15) unter Berücksichtigung von (14)

$$x^{\varrho'}\, dp_{\varrho'} = x^{\varrho}\, dp_{\varrho}. \quad \ldots\ldots\ldots \quad (16)$$

Sind die Grade von $\varphi^{\varkappa'}$ gleich $a$ und $b$, die von $\psi_{\lambda'}$ gleich $c$ und $d$ i.b. auf $x^\varkappa$ bzw. $p_\lambda$, so besagt die Forderung (a)

$$\left.\begin{aligned} 'x^{\varkappa'} &= \varphi^{\varkappa'}(\varrho\, x^\varkappa, \sigma\, p_\lambda) = \varrho^a \sigma^b\, x^{\varkappa'} = \varrho\, x^{\varkappa'} \\ 'p_{\lambda'} &= \psi_{\lambda'}(\varrho\, x^\varkappa, \sigma\, p_\lambda) = \varrho^c \sigma^d\, p_{\lambda'} = \sigma\, p_{\lambda'} \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots \quad (17)$$

also

$$a = 1,\ b = 0,\ c = 0,\ d = 1 \quad \ldots\ldots \quad (18)$$

Offenbar sind diese Werte mit der Gruppeneigenschaft der Berührungstransformationen im Einklang. In $\varphi^{\varkappa'}$ sowohl als in $\psi_{\lambda'}$ steckt jetzt noch ein beliebig wählbarer Faktor, homogen nullten Grades in $x^\varkappa$ und $p_\lambda$; diese Faktoren lassen sich also stets noch auf unendlich viele Weisen so wählen, dass der Forderung (*b*) genügt wird. Schreiben wir die Differentiale links in (14) und (16) aus, so folgt

$$\left.\begin{aligned} p_{\varrho'}\, \partial_\varkappa\, \varphi^{\varrho'}\, dx^\varkappa + p_{\varrho'}\, \partial^\lambda\, \varphi^{\varrho'}\, dp_\lambda &= p_\varrho\, dx^\varrho \\ x^{\varrho'}\, \partial_\varkappa\, \psi_{\varrho'}\, dx^\varkappa + x^{\varrho'}\, \partial^\lambda\, \psi_{\varrho'}\, dp_\lambda &= x^\varrho\, dp_\varrho \end{aligned}\right\} \left\{\begin{aligned} \partial_\varkappa &= \frac{\partial}{\partial x^\varkappa} \\ \partial^\lambda &= \frac{\partial}{\partial p_\lambda} \end{aligned}\right\} \quad \ldots \quad (19)$$

Aus diesen Gleichungen darf man aber nicht schliessen $p_{\varrho'}\, \partial_\varkappa\, \varphi^{\varrho'} = p_\varkappa$ u.s.w., da die $dx^\varkappa$ und $dp_\lambda$ infolge $x^\varrho\, dp_\varrho + p_\varrho\, dx^\varrho = 0$ nicht unabhängig sind. Man darf unter Berücksichtigung von

$$p_{\varrho'}\, x^{\varrho'} = a\, p_\varrho\, x^\varrho \quad \ldots\ldots\ldots \quad (15a)$$

nur schliessen dass

$$\left.\begin{aligned} p_{\varrho'}\, \partial_\lambda\, \varphi^{\varrho'} &= (1+\beta)\, p_\lambda \\ p_{\varrho'}\, \partial^\varkappa\, \varphi^{\varrho'} &= \beta\, x^\varkappa \\ x^{\varrho'}\, \partial_\lambda\, \psi_{\varrho'} &= (a-1-\beta)\, p_\lambda \\ x^{\varrho'}\, \partial^\varkappa\, \psi_{\varrho'} &= (a-\beta)\, x^\varkappa \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (20)$$

ist, wo $\beta$ ein noch beliebiger Faktor, homogen nullten Grades in $x^\varkappa$ und $p_\lambda$, ist.

Es wäre nun angenehm die Wahl von $\varphi^{\varkappa'}$ und $\psi_{\lambda'}$ weiterhin so einschränken zu können, dass die rechten Seiten dieser Gleichungen möglichst einfach werden. Zu diesem Zwecke bemerken wir, dass sich jede vorliegende Transformation von der Form (12) *ohne dass dabei die Transformation der Koordinaten von Elementen* eine Aenderung erleidet und ohne dass die Bedingungen (*a, b*) verletzt werden, ersetzen lässt durch

$$\left.\begin{aligned} x^{\varkappa'} &= \varphi^{\varkappa'}(x^\varrho, p_\sigma) + x^\tau p_\tau\, \eta^{\varkappa'}(x^\varrho, p_\sigma) \\ p_{\lambda'} &= \psi_{\lambda'}(x^\varrho, p_\sigma) + x^\tau p_\tau\, \zeta_{\lambda'}(x^\varrho, p_\sigma) \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots \quad (21)$$

wo $\eta^{\varkappa'}$ und $\zeta_{\lambda'}$ Funktionen der Grade $0, -1$ bzw. $-1, 0$ in $x^\varkappa, p_\lambda$ sind, die für $x^\varrho p_\varrho = 0$ endlich bleiben und übrigens beliebig wählbar sind. Sodann gilt für diese neue Transformation (sofern sie auf Elemente wirkt, und also in dem Resultat wieder $x^\varrho p_\varrho = 0$ gesetzt werden darf):

$$\left.\begin{aligned} p_{\varrho'}\, \partial_\lambda\, x^{\varrho'} &= (1+\beta+\psi_{\varkappa'}\, \eta^{\varkappa'})\, p_\lambda \\ p_{\varrho'}\, \partial^\varkappa\, x^{\varrho'} &= (\beta+\psi_{\varkappa'}\, \eta^{\varkappa'})\, x^\varkappa \\ x^{\varrho'}\, \partial_\lambda\, p_{\varrho'} &= ((a-\beta-1)+\varphi^{\lambda'}\, \zeta_{\lambda'})\, p_\lambda \\ x^{\varrho'}\, \partial^\varkappa\, p_{\varrho'} &= ((a-\beta)+\varphi^{\lambda'}\, \zeta_{\lambda'})\, x^\varkappa \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots \quad (22)$$

Wählt man nun $\eta^{\varkappa'}$ und $\zeta_{\lambda'}$ so, dass

$$\psi_{\varkappa'}\,\eta^{\varkappa'} = -\beta;\ \varphi^{\lambda'}\,\zeta_{\lambda'} = 1 - a + \beta \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \qquad (23)$$

ist, so ist erreicht, dass

$$\left.\begin{aligned} p_{\varkappa'}\,\partial_\lambda\,x^{\varkappa'} &= p_\lambda \\ p_{\varkappa'}\,\partial^\varkappa\,x^{\varkappa'} &= 0 \\ x^{\lambda'}\,\partial_\lambda\,p_{\lambda'} &= 0 \\ x^{\lambda'}\,\partial^\varkappa\,p_{\lambda'} &= x^\varkappa \end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \qquad (24)$$

ist. Diese Gleichungen (24) führen wir als *dritte beschränkende Bedingung* (*c*) ein. Daneben bestehen noch die Homogenitätsbedingungen

$$\left.\begin{aligned} x^\varkappa\,\partial_\varkappa\,x^{\varkappa'} &= x^{\varkappa'} \\ p_\lambda\,\partial^\lambda\,x^{\varkappa'} &= 0 \\ x^\varkappa\,\partial_\varkappa\,p_{\lambda'} &= 0 \\ p_\lambda\,\partial^\lambda\,p_{\lambda'} &= p_{\lambda'} \end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \qquad (25)$$

Ferner ist infolge (15a), (21) und (23):

$$\left.\begin{aligned} x^{\varrho'}\,p_{\varrho'} &= \varphi^{\varrho'}\,\psi_{\varrho'} + \eta^{\varrho'}\,\psi_{\varrho'}\,(x^\tau\,p_\tau) + \zeta_{\varrho'}\,\varphi^{\varrho'}\,(x^\tau\,p_\tau) + \zeta_{\varrho'}\,\eta^{\varrho'}\,(x^\tau\,p_\tau)^2 \\ &= x^\varrho\,p_\varrho + \zeta_{\varrho'}\,\eta^{\varrho'}\,(x^\tau\,p_\tau)^2. \end{aligned}\right\}. \qquad (26)$$

Wählt man also $\eta^{\varkappa'}$ und $\zeta_{\lambda'}$ ausserdem noch so dass

$$\zeta_{\varrho'}\,\eta^{\varrho'} = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \qquad (27)$$

ist, so wird

$$x^{\varrho'}\,p_{\varrho'} = x^\varrho\,p_\varrho \,. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \qquad (28)$$

Diese Gleichung führen wir als vierte beschränkende Bedingung (*d*) ein. Bei gegebenen $\varphi^{\varkappa'}$ und $\psi_{\lambda'}$ gibt es offenbar stets unendlich viele Werte von $\eta^{\varkappa'}$ und $\zeta^{\lambda'}$, die den Gleichungen (23) und (27) genügen.

Man zeigt leicht, dass zwei aufeinander folgende Transformationen, die (*c*, *d*) genügen, wieder eine Transformation liefern, die (*c*, *d*) genügt. Durch die Einführung der Bedingungen (*a*, *b*, *c*, *d*) haben wir also keine Berührungstransformation verloren und die Gruppeneigenschaft nicht eingebüsst, die analytischen Eigenschaften der Transformationsfunktionen aber bedeutend vereinfacht.

Aus (24) folgt durch Differentiation

$$(\partial_{[\mu}\,p_{|\varrho'|})\,\partial_{\lambda]}\,x^{\varrho'} = 0;\ (\partial^{[\nu}\,p_{\varrho'})\,\partial^{\varkappa]}\,x^{\varrho'} = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \qquad (29)$$

$$(\partial^\varkappa\,p_{\varrho'})\,\partial_\lambda\,x^{\varrho'} - (\partial_\lambda\,p_{\varrho'})\,\partial^\varkappa\,x^{\varrho'} = A_\lambda^\varkappa;\ A_\lambda^\varkappa = \partial_\lambda\,x^\varkappa = \partial^\varkappa\,p_\lambda \quad . \quad . \qquad (30)$$

und aus diesen Gleichungen folgt bei Ueberschiebung mit $dx$ und $dp$ und geeigneter Zusammenfassung der Glieder

$$dx^\varkappa = (\partial^\varkappa\,p_{\varrho'})\,dx^{\varrho'} - (\partial^\varkappa\,x^{\varrho'})\,dp_{\varrho'};\ dp_\lambda = -(\partial_\lambda\,p_{\varrho'})\,dx^{\varrho'} + (\partial_\lambda\,x^{\varrho'})\,dp_{\varrho'} \,. \quad (31)$$

Da aber anderseits

$$dx^\varkappa = (\partial_{\varrho'}\,x^\varkappa)\,dx^{\varrho'} + (\partial^{\varrho'}\,x^\varkappa)\,dp_{\varrho'};\ dp_\lambda = (\partial_{\varrho'}\,p_\lambda)\,dx^{\varrho'} + (\partial^{\varrho'}\,p_\lambda)\,dp_{\varrho'} \,. \quad (32)$$

ist, folgt

$$\partial^\varkappa\,p_{\lambda'} = \partial_{\lambda'}\,x^\varkappa;\ \partial^\nu\,x^{\varkappa'} = -\partial^{\varkappa'}\,x^\nu;\ \partial_\mu\,p_{\lambda'} = -\partial_{\lambda'}\,p_\mu;\ \partial_\lambda\,x^{\varkappa'} = \partial^{\varkappa'}\,p_\lambda \,. \quad (33)$$

welches Gleichungssystem mit (29, 30) gleichwertig ist, da sich umgekehrt (29) und (30) aus (33) ableiten lassen. Wir beweisen, dass (33) und also auch (29, 30) die n.u.h. Bedingungen darstellen dafür, dass eine Transformation von der Form (12), wo $\varphi'$ homogen von den Graden 1 und 0 und $\psi'$ homogen von den Graden 0 und 1 in $x^\varkappa$ bzw. $p_\lambda$ ist, eine Berührungstransformation ist. Ueberschiebung von (33) mit $x^{\varkappa'}$ und $p_{\lambda'}$ ergibt infolge der Homogenität die Gleichungen (24) und aus diesen Gleichungen folgt

$$\left.\begin{aligned} \partial_\lambda (p_{\varrho'} x^{\varrho'}) &= p_\lambda \\ \partial^\varkappa (p_{\varrho'} x^{\varrho'}) &= x^\varkappa \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (34)$$

oder

$$d(p_{\varrho'} x^{\varrho'}) = p_\varrho\, dx^\varrho + x^\varrho\, dp_\varrho = d(p_\varrho x^\varrho) \quad \ldots\ldots \quad (35)$$

Da nun sowohl $p_\varrho x^\varrho$ als $p_{\varrho'} x^{\varrho'}$ homogen vom Grade 1 in $x^\varkappa$ und $p_\lambda$ sind, ist also (28) erfüllt, d.h. Elemente gehen in Elemente über. Ferner ist infolge (33)

$$\left.\begin{aligned} p_{\varrho'}\, dx^{\varrho'} &= p_{\varrho'} (\partial_\varrho x^{\varrho'})\, dx^\varrho + p_{\varrho'} (\partial^\varrho x^{\varrho'})\, dp_\varrho \\ &= p_{\varrho'} (\partial^{\varrho'} p_\lambda)\, dx^\lambda - p_{\varrho'} (\partial^{\varrho'} x^\varrho)\, dp_\varrho \\ &= p_\varrho\, dx^\varrho \end{aligned}\right\} \quad \ldots \quad (36)$$

sodass auch (14) erfüllt ist, d.h. die vereinigte Lage benachbarter Elemente nicht zerstört wird.

Angesichts (33) schreiben wir abkürzend:

$$\left.\begin{aligned} &\partial_{\lambda'} x^\varkappa = \partial^\varkappa p_{\lambda'} = T^\varkappa_{\lambda'};\ \partial_\lambda x^{\varkappa'} = \partial^{\varkappa'} p_\lambda = T^{\varkappa'}_\lambda \\ &\partial^\nu x^{\varkappa'} = -\partial^{\varkappa'} x^\nu = U^{\nu\varkappa'} = -U^{\varkappa'\nu};\ \partial_\mu p_{\lambda'} = -\partial_{\lambda'} p_\mu = V_{\mu\lambda'} = -V_{\lambda'\mu} \end{aligned}\right\} (37)$$

womit dann die Gleichungen (29, 30) übergehen in die handlichere Form

$$\left.\begin{aligned} V_{\varrho'[\mu} T^{\varrho'}_{\lambda]} = 0;\ T^{[\nu}_{\varrho'} U^{\varkappa]\varrho'} &= 0 \\ T^\varkappa_{\varrho'} T^{\varrho'}_\lambda - V_{\lambda\varrho'} U^{k\varrho'} &= A^\varkappa_\lambda \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots \quad (38)$$

und die Gleichungen (24) mit ihren Umkehrungen in

$$\left.\begin{aligned} p_{\lambda'} = T^\lambda_{\lambda'} p_\lambda\ &;\ p_\lambda = T^{\lambda'}_\lambda p_{\lambda'} \\ x^{\varkappa'} = T^{\varkappa'}_\varkappa x^\varkappa\ &;\ x^\varkappa = T^\varkappa_{\varkappa'} x^{\varkappa'} \\ U^{\varkappa'\lambda} p_\lambda = 0\ &;\ U^{\varkappa\lambda'} p_{\lambda'} = 0 \\ V_{\lambda'\varkappa} x^\varkappa = 0\ &;\ V_{\lambda\varkappa'} x^{\varkappa'} = 0 \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots \quad (39)$$

welche Gleichungen jetzt gleichzeitig die Homogenitätsbedingungen (25) mit ihren Umkehrungen zum Ausdruck bringen.

Die Gruppe der durch (24, 25) karakterisierten Koordinatentransformationen nennen wir $\mathfrak{K}_{2n+2}$. Die Mannigfaltigkeit der Elemente, ausgestattet mit den Gruppen $\mathfrak{K}_{2n+2}$ und $\mathfrak{F}$ heisse $K_{2n-1}$. Ein besonderer Fall bildet die Untergruppe der erweiterten Punkttransformationen. Es wird dann $T^{\varkappa'}_{\lambda} = A^{\varkappa'}_{\lambda}$; $U^{\varkappa'\varkappa} = 0$, $V_{\lambda\lambda'} = p_{\varrho}\partial_{\lambda} A^{\varrho}_{\lambda'}$ und (39) geht über in

$$x^{\varkappa'} = A^{\varkappa'}_{\varkappa} x^{\varkappa}; \; p_{\lambda'} = A^{\lambda}_{\lambda'} p_{\lambda} \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \qquad (40)$$

4. *Die Beziehungen zu den allgemeinen Berührungstransformationen.* Sind

$$\left.\begin{array}{l} \xi^1 = \varphi(\xi^2, \ldots, \xi^n) \\ f(\xi^1, \ldots, \xi^n) = 0 \\ F(x^0, \ldots, x^n) = 0; \; \xi^1 = \dfrac{x^1}{x^0}, \text{ u. s. w.} \end{array}\right\} \; . \; . \; . \; . \qquad (41)$$

die Gleichungen einer und derselben Hyperfläche, so zeigt man leicht, dass

$$-1 : \frac{\partial\varphi}{\partial\xi^2} : \ldots : \frac{\partial\varphi}{\partial\xi^n} = \frac{\partial f}{\partial\xi^1} : \ldots : \frac{\partial f}{\partial\xi^n} \; . \; . \; . \; . \; . \qquad (42)$$

und

$$\frac{\partial F}{\partial x^0} : \frac{\partial F}{\partial x^1} : \ldots : \frac{\partial F}{\partial x^n} = -\left(\xi^1 \frac{\partial f}{\partial \xi^1} + \ldots + \xi^n \frac{\partial f}{\partial \xi^n}\right) : \frac{\partial f}{\partial \xi^1} : \ldots : \frac{\partial f}{\partial \xi^n} \; . \; . \qquad (43)$$

Daraus folgt erstens, dass

$$\left.\begin{array}{l} -1 : \zeta_2 : \ldots : \zeta_n = \eta_1 : \ldots : \eta_n \\ p_0 : p_1 : \ldots : p_n = -(\xi^1 \eta_1 + \ldots + \xi^n \eta_n) : \eta_1 : \ldots : \eta_n \end{array}\right\} \; . \; . \qquad (44)$$

und zweitens dass

$$p_{\varrho'}\, dx^{\varrho'} = p_{\varrho}\, dx^{\varrho} \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \qquad (45)$$

gleichwertig ist mit

$$\eta_{j'}\, d\xi^{j'} = \eta_j\, d\xi^j; \; h, i. j = 1, \ldots, n \; . \; . \; . \; . \; . \qquad (46)$$

und mit

$$d\xi^{1'} - \zeta_{c'}\, d\xi^{c'} = \tau(\xi, \zeta)(d\xi^1 - \zeta_c\, d\xi^c); \; a, b, c = 2, \ldots, n, \; . \qquad (47)$$

wo

$$\tau(\xi, \zeta) = \frac{\eta_1}{\eta_{1'}} \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \qquad (48)$$

tatsächlich eine Funktion von $\xi^{\varkappa}$ und $\zeta_b$ allein ist, da $\eta_{1'}$ homogen ersten Grades in $\eta_i$ ist.

Daraus geht hervor, dass eine doppelt-homogene Berührungstransformation in $x^{\varkappa}, p_{\lambda}$ eine homogene Berührungstransformation im LIEschen Sinne in $\xi^h, \eta_i$ ist und eine allgemeine Berührungstransformation in $\xi^h, \zeta_b$. Auch aus (44) lässt sich leicht beweisen, dass jede allgemeine Berührungstransformation in $\xi^a, \zeta_b$, die sich ja bekanntlich stets als homogene Berührungstransformation im LIEschen Sinne in $\xi^h, \eta_i$ schreiben lässt, auch stets als doppelt-homogene Berührungstransformation in $x^{\varkappa}, p_{\lambda}$ geschrieben werden kann. Alle Untersuchungen über Berührungstransformationen in der $(2n-1)$-dimensionalen Elementmannigfaltigkeit lassen sich also vollständig mit den $2n+2$ homogenen Koordinaten $x^{\varkappa}, p_{\lambda}$ durchführen.

---