pressure at which liquid and solid nitrogen were coexistent. The triple point temperature was determined by interpolation on the vapour pressure curves for solid and liquid nitrogen. The result was:

$$P_{tr} = 9.401 \text{ cm}, \quad t_{tr} = -\,219.99_4\,^{\circ}\text{C or } 63.15_0\,^{\circ}\text{K}$$

Within the experimental accuracy the vapour pressure data obtained are in accordance with caloric data.

Mathematics. — *Zur Differentialgeometrie der Gruppe der Berührungstransformationen. II. Normalform und Hauptheorem der doppelthomogenen Berührungstransformationen.* Von J. A. SCHOUTEN.

(Communicated at the meeting of February 27, 1937).

1. *Einleitung.*

In der ersten Arbeit [1]) wurde gezeigt, dass sich jede Berührungstransformation in den $2n-1$ Variablen $\xi^1, \ldots, \xi^n, \zeta_2, \ldots, \zeta_n$ nicht nur nach LIE als eine homogene Berührungstransformation in $2n$ Variablen $\xi^1, \ldots, \xi^n, \eta_1, \ldots, \eta_n$ schreiben lässt sondern auch als eine doppelthomogene Berührungstransformation in $2(n+1)$ Variablen $x^0, \ldots, x^n, p_0, \ldots, p_n$ die den Homogenitätsbedingungen (I. 25)

$$\left.\begin{aligned} x^{\mu}\,\partial_{\mu}\,x^{\varkappa'} &= x^{\varkappa'} \\ x^{\mu}\,\partial_{\mu}\,p_{\lambda'} &= 0 \\ p_{\mu}\,\partial^{\mu}\,x^{\varkappa'} &= 0 \\ p_{\mu}\,\partial^{\mu}\,p_{\lambda'} &= p_{\lambda'}, \end{aligned}\right\} \quad \ldots \ldots \ldots \quad (1)$$

den Bedingungen (I. 28)

$$p_{\varrho'}\,x^{\varrho'} = p_{\varrho}\,x^{\varrho} \quad \ldots \ldots \ldots \quad (2)$$

und für $p_{\varrho}x^{\varrho} = 0$ auch den Bedingungen (I. 14, 16)

$$\left.\begin{aligned} p_{\varrho'}\,dx^{\varrho'} &= p_{\varrho}\,dx^{\varrho} \\ x^{\varrho'}\,dp_{\varrho'} &= x^{\varrho}\,dp_{\varrho} \end{aligned}\right\} \quad \ldots \ldots \ldots \quad (3)$$

und den Bedingungen (I. 24)

$$\left.\begin{aligned} p_{\varrho'}\,\partial_{\lambda}\,x^{\varrho'} &= p_{\lambda} \\ x^{\varrho'}\,\partial_{\lambda}\,p_{\varrho'} &= 0 \\ p_{\varrho'}\,\partial^{\varkappa}\,x^{\varrho'} &= 0 \\ x^{\varrho'}\,\partial^{\varkappa}\,p_{\varrho'} &= x^{\varkappa} \end{aligned}\right\} \quad \ldots \ldots \ldots \quad (4)$$

(welche nur für $p_{\varrho}x^{\varrho} = 0$ *nicht* aus (3) folgen) genügt. Wir werden jetzt zeigen, dass wir die also erhaltene doppelthomogene Berührungstransformation stets, *ohne* die Transformation der (durch $p_{\varrho}x^{\varrho} = 0$ charakterisierten) Elemente zu ändern, ersetzen können durch eine Transformation, die ausser (1) und (2) auch für den allgemeinen Fall $p_{\varrho}x^{\varrho} \neq 0$ der Bedingung (3) und somit auch (4) genügt. Die so erhaltene Form nennen wir *eine Normalform* der doppelthomogenen Berührungstransformation. Wir bringen den Beweis in einer solchen Weise, dass sich dabei das Haupttheorem bezüglich der allgemeinsten Form einer endlichen doppelthomogenen Berührungstransformation mit ergibt.

[1]) Zur Differentialgeometrie der Gruppe der Berührungstransformationen, I Doppelthomogene Behandlung von Berührungstransformationen, Proc. Royal Acad. Amsterdam.

2. *Die Normalform.*

Die allgemeinste Form einer homogenen Berührungstransformation in $\xi^1, \ldots, \xi^n, \eta_1, \ldots, \eta_n$ bekommt man nach LIE [1]) in folgender Weise. Man wähle irgendwelche Funktionen $\overset{1}{\Omega}, \ldots, \overset{q}{\Omega}$ der ξ^h und $\xi^{h'}$ (wo q irgend eine Zahl $\geqq 1$ und $\leqq n$ ist), die dermassen beschaffen sind, dass die $(n+q)$-reihige Determinante

$$\begin{vmatrix} \partial_i \overset{\mathfrak{a}}{\Omega} \;, & 0 \\ \underset{\mathfrak{a}}{\lambda}\,\partial_i\,\partial_{i'}\,\overset{\mathfrak{a}}{\Omega} \;, & \partial_{i'}\,\overset{\mathfrak{a}}{\Omega} \end{vmatrix} ; \; \mathfrak{a} = 1, \ldots, q \,; \; \partial_i = \frac{\partial}{\partial \xi^i}, \; \partial_{i'} = \frac{\partial}{\partial \xi^{i'}} ; \quad \ldots \quad (5)$$

nicht vermöge $\overset{\mathfrak{a}}{\Omega} = 0$ identisch in den $\underset{\mathfrak{a}}{\lambda}$ verschwindet und eliminiere die $\underset{\mathfrak{a}}{\lambda}$ aus den $2n+q$ Gleichungen

$$\overset{\mathfrak{a}}{\Omega}\,(\xi^h, \xi^{h'}) = 0, \quad \ldots \ldots \ldots \quad (6)$$

$$a) \quad \eta_i = -\,\underset{\mathfrak{a}}{\lambda}\,\partial\,\overset{\mathfrak{a}}{\Omega} ; \qquad b) \quad \eta_{i'} = +\,\underset{\mathfrak{a}}{\lambda}\,\partial_{i'}\,\overset{\mathfrak{a}}{\Omega} . \quad \ldots \ldots \quad (7)$$

Die Determinantenbedingung verbürgt, dass sich die Gleichungen (6, 7) sowohl nach $\xi^{h'}, \eta_{i'}$ und $\underset{\mathfrak{a}}{\lambda}$ als auch nach $\xi^h, \eta_i, \underset{\mathfrak{a}}{\lambda}$ lösen lassen. Aus (6, 7*a*) ergeben sich nach Fortschaffung der $\underset{\mathfrak{a}}{\lambda}$ die $\xi^{h'}$ als Funktionen der ξ^h und der η_i, homogen nullten Grades in η_i. Setzt man diese Werte in (7*a*) ein, so ergeben sich die $\underset{\mathfrak{a}}{\lambda}$ als Funktionen der ξ^h und η_i, homogen ersten Grades in η_i. Substitution der $\xi^{h'}$ und der $\underset{\mathfrak{a}}{\lambda}$ in (7*b*) ergibt schliesslich die $\eta_{i'}$ als Funktionen der ξ^h und η_i, homogen ersten Grades in η_i. Das selbe gilt bei Vertauschung von $\xi^{h'}, \eta_{i'}$ mit ξ^h, η_i (LIE, a.a.O., S. 152). Elimination der $\underset{\mathfrak{a}}{\lambda}$ ergibt also ein System von $2n$ Gleichungen, dass sowohl nach $\xi^{h'}, \eta_{i'}$ als nach ξ^h, η_i auflösbar ist. Diese Gleichungen stellen eine Berührungstransformation dar, die einen Punkt allgemeiner Lage in eine $(n-q)$-dimensionale Mannigfaltigkeit überführt, und es gibt ausser den (6) keine weiteren Gleichungen zwischen $\xi^h, \xi^{h'}$ (LIE, a.a.O., S. 168). Der Rang der Matrix $\dfrac{\partial \xi^{h'}}{\partial \eta_i}$ ist also gleich $n-q$.

[1]) Theorie der Transformationsgruppen, II, 150.

Wir machen jetzt den Uebergang zu den homogenen Koordinaten $x^\varkappa, p_\lambda;\ \varkappa, \lambda, \mu = 0, 1, \ldots, n$, der Elemente $(p_\varrho x^\varrho = 0)$

$$\left.\begin{aligned} &x^0 : x^1 : \ldots : x^n = 1 : \xi^1 : \ldots : \xi^n \\ &p_0 : p_1 : \ldots : p_n = -(\xi^1 \eta_1 + \ldots + \xi^n \eta_n) : \eta_1 : \ldots : \eta_n \end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad (8)$$

wodurch (6) übergeht in

$$\overset{\mathfrak{a}}{\Phi}(x^\varkappa, x^{\varkappa'}) = \overset{\mathfrak{a}}{\Omega}\left(\frac{x^\alpha}{x^0}, \frac{x^{\alpha'}}{x^{0'}}\right) = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (9)$$

wo die $\overset{\mathfrak{a}}{\Phi}$ homogen nullten Grades in $x^\varkappa$ und in $x^{\varkappa'}$ sind, und (7) in

$$\left.\begin{aligned} &-\frac{p_\alpha}{p_0 x^0}(\xi^j \eta_j) = -\underset{\mathfrak{a}}{\lambda}\,\partial_\alpha \overset{\mathfrak{a}}{\Phi};\ -\frac{p_{\alpha'}}{p_{0'} x^{0'}}(\xi^{j'} \eta_{j'}) = +\underset{\mathfrak{a}}{\lambda}\,\partial_{\alpha'} \overset{\mathfrak{a}}{\Phi}; \\ &-\frac{1}{x^0}(\xi^j \eta^j) = -\underset{\mathfrak{a}}{\lambda}\,\partial_0 \overset{\mathfrak{a}}{\Phi};\ -\frac{1}{x^{0'}}(\xi^{j'} \eta_{j'}) = +\underset{\mathfrak{a}}{\lambda}\,\partial_{0'} \overset{\mathfrak{a}}{\Phi}; \end{aligned}\ \left|\begin{aligned} &\alpha, \beta, \gamma = 1, \ldots, n; \\ &h, i, j = 1, \ldots, n; \\ &\partial_\lambda = \frac{\partial}{\partial x^\lambda}; \partial_{\lambda'} = \frac{\partial}{\partial x^{\lambda'}} \end{aligned}\right.\right\} . \quad (10)$$

oder

$$p_\lambda :: -\underset{\mathfrak{a}}{\lambda}\,\partial_\lambda \overset{\mathfrak{a}}{\Phi};\ p_{\lambda'} :: +\underset{\mathfrak{a}}{\lambda}\,\partial_{\lambda'} \overset{\mathfrak{a}}{\Phi} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (11)$$

aus welchen Proportionalitäten sich umgekehrt die Gleichungen (7) ableiten lassen. Die $\underset{\mathfrak{a}}{\lambda}$ lassen sich aus (6, 7) als Funktionen der ξ^h und η_i, homogen ersten Grades in η_i bestimmen. Da aber die Gleichung (8) nicht gestattet die η_i in die p_λ auszudrücken, sondern nur die Verhältnisse der η_i in die Verhältnisse der p_λ, lassen sich aus (9, 11) nur die Verhältnisse der $\underset{\mathfrak{a}}{\lambda}$ und zwar als homogene Funktionen nullten Grades in $x^\varkappa$ und in p_λ berechnen. Ausserdem lassen sich aus (6, 7) $\xi^{h'}$ und $\eta_{i'}$ als Funktionen von ξ^h und η_i homogen nullten bzw. ersten Grades in η_i berechnen. Aus (9, 11) folgen also die $\frac{x^{\varkappa'}}{x^{0'}}$ und die $-\frac{\eta_{i'}}{\xi^{j'}\eta_{j'}}$ oder, was dasselbe ist, die $\frac{p_{\lambda'}}{p_{0'}}$, als Funktionen der $\frac{x^\varkappa}{x^0}$ und der $\frac{p_\lambda}{p_0}$. Ebenso lassen sich die $\frac{x^\varkappa}{x^0}$ und die $\frac{p_\lambda}{p_0}$ als Funktionen der $\frac{x^{\varkappa'}}{x^{0'}}$ und $\frac{p_{\lambda'}}{p_{0'}}$ berechnen. Alle Gleichungen zusammenfassend bekommen wir also

$$\overset{\mathfrak{a}}{\Phi}(x^\varkappa, x^{\varkappa'}) = 0 \quad (\mathfrak{a} = 1, \ldots, q) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (12)$$

$$a)\ \ p_\lambda = -\underset{1}{\lambda}\,\partial_\lambda \frac{\underset{\mathfrak{a}}{\lambda}}{\underset{1}{\lambda}} \overset{\mathfrak{a}}{\Phi}; \qquad b)\ \ p_{\lambda'} = +\underset{1}{\lambda}\,\partial_{\lambda'} \frac{\underset{\mathfrak{a}}{\lambda}}{\underset{1}{\lambda}} \overset{\mathfrak{a}}{\Phi} \quad . \quad . \quad . \quad (13)$$

wo $\underset{1}{\lambda}$ jetzt die Rolle eines unbestimmten Proportionalitätsfaktor spielt, und

$$a)\ \ x^{\varkappa'} = \alpha\,\varphi^{\varkappa'}(x^\varkappa, p_\lambda); \qquad b)\ \ p_{\lambda'} = \beta\,\psi_{\lambda'}(x^\varkappa, p_\lambda); \quad . \quad . \quad . \quad (14)$$

$$a)\ \ x^\varkappa = \gamma\,\varphi^\varkappa(x^{\varkappa'}, p_{\lambda'}); \qquad b)\ \ p_\lambda = \varepsilon\,\psi_\lambda(x^{\varkappa'}, p_{\lambda'}). \quad . \quad . \quad . \quad (15)$$

Nach Elimination der Verhältnisse der λ ist $\frac{1}{\underset{1}{\lambda}}\underset{\mathfrak{a}}{\lambda}\overset{\mathfrak{a}}{\Phi}$ eine bekannte Funktion.

Die $\varphi^{\varkappa'}$ und $\psi_{\lambda'}$ lassen sich homogen nullten Grades in $x^\varkappa$ und in p_λ fest wählen und die $\varphi^\varkappa$ und ψ_λ ebenso als Funktionen nullten Grades in $x^{\varkappa'}$ und $p_{\lambda'}$. Die Funktionen $\varphi^{\varkappa'}, \psi_{\lambda'}, \varphi^\varkappa, \psi_\lambda$ sind jetzt bekannt, nur die Koeffizienten $\alpha, \beta, \gamma, \varepsilon$ und $\underset{1}{\lambda}$ sind noch unbestimmt. Sind a, b bzw. c, d die Grade von α bzw. β in $x^\varkappa$ und p_λ und a', b' bzw. c', d' die Grade von γ bzw. ε in $x^{\varkappa'}$ und $p_{\lambda'}$ so folgt bei Substitution von (14) in (15)

$$a'e = d, \quad b'e = -b, \quad c'e = -c, \quad d'e = a; \ (e = ad - bc) \ . \quad (16)$$

und daraus folgt, das γ und ε durch die Wahl von α und β festgelegt sind, vorausgesetzt dass $ad - bc \neq 0$ ist. Ausserdem ist β durch α bestimmt infolge der Forderung

$$p_{\varrho'}\,dx^{\varrho'} = p_\varrho\,dx^\varrho \ \text{für}\ p_\varrho x^\varrho = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (17)$$

Setzt man (14*b*) und (14*a*) links bzw. rechts in (13*b*) ein, so lässt sich $\underset{1}{\lambda}$ aus dieser Gleichung als homogene Funktion von $x^\varkappa$ und p_λ von den Graden $a + c$, $b + d$ berechnen. Die Wahl von α legt also *alle* Koeffizienten fest. Wir wollen diese Wahl so treffen dass $a = 1$, $b = 0$ wird und demzufolge $c = 0$, $d = 1$, $a' = 1$, $b' = 0$, $c' = 0$, $d' = 1$. Dazu brauchen wir nur für α eine beliebige homogene Funktion von $x^\varkappa$ und p_λ von den Graden $+1, 0$ zu wählen. $\underset{1}{\lambda}$ bekommt dan die Grade $+1, +1$ in $x^\varkappa$ und p_λ und dieselben Grade beim Ausschreiben in $x^{\varkappa'}$ und $p_{\lambda'}$.

Setzen wir jetzt (13*a*) rechts in (14*a*) ein, so ergibt sich

$$\left.\begin{aligned} x^{\varkappa'} &= \alpha\,(x^\varkappa, -\partial_\lambda \underset{\mathfrak{a}}{\lambda}\overset{\mathfrak{a}}{\Phi}) \,.\, \varphi^{\varkappa'}(x^\varkappa, -\partial_\lambda \underset{\mathfrak{a}}{\lambda}\overset{\mathfrak{a}}{\Phi}) = \\ &= \alpha\,(x^\varkappa, -\underset{\mathfrak{a}}{\lambda}\,\partial_\lambda \overset{\mathfrak{a}}{\Phi}) \,.\, \varphi^{\varkappa'}(x^\varkappa, -\underset{\mathfrak{a}}{\lambda}\,\partial_\lambda \overset{\mathfrak{a}}{\Phi}) \end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (18)$$

und dies ein System von $n + 1$ Gleichungen in $x^\varkappa$ und $x^{\varkappa'}$, das q Parameter $\underset{\mathfrak{a}}{\lambda}\,(\mathfrak{a} = 1, \ldots, q)$ enthält und zwar homogen nullten Grades. Aus $q - 1$ von diesen Gleichungen lassen sich die Verhältnisse dieser Parameter als Funktionen der $x^\varkappa$ und $x^{\varkappa'}$ bestimmen. Setzt man diese Werte in die übrigen $n - q + 2$ Gleichungen ein, so erfolgt aus dem Umstande, dass die $\underset{\mathfrak{a}}{\lambda}$ homogen nullten Grades vorkommen, dass die rechten Seiten homogen von den Graden $+1, 0$ in $x^\varkappa$ und $x^{\varkappa'}$ werden und sich also $n - q + 2$ Gleichungen von der Form

$$\overset{\alpha}{X}(x^\varkappa, x^{\varkappa'}) = 1 \qquad (\alpha = q - 1, \ldots n) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (19)$$

ergeben, deren linke Seiten von den Graden $+1, -1$ in $x^\varkappa, x^{\varkappa'}$ sind. Da der Quotient zweier X eine homogene Funktion von den Graden 0,0 in $x^\varkappa$ und $x^{\varkappa'}$ darstellt, und es nur q homogene Gleichungen nullten

Grades in $x^{\varkappa}$ und $x^{\varkappa'}$ geben kann, nämlich (12), lassen sich sicher $n-q+1$ von den Gleichungen (19) aus der $(n-q+2)$-ten und (12) ableiten. Diese $(n-q+2)$-te Gleichung ist aber sicher von (12) unabhängig, da sie von den Graden $+1, -1$ in $x^{\varkappa}, x^{\varkappa'}$ ist. Diese Gleichung schreiben wir

$$X(x^{\varkappa}, x^{\varkappa'}) = 1. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \qquad (20)$$

Die q homogenen Gleichungen (12) ordnen jedem Punkt allgemeiner Lage in der H_n eine $(n-q)$-dimensionale Mannigfaltigkeit zu. Die Gleichung (20) ändert daran nichts, sie legt nur den Faktor in den $x^{\varkappa'}$ fest. Für die geometrische Transformation der Elemente hat also (20) keine Bedeutung, was auch eigentlich selbstverständlich ist, da sie erst entstanden ist nach Festlegung der Wahl von a, die ja ebenfalls für die geometrische Transformation der Elemente unwesentlich ist. Der Rang der Matrix von $\frac{\partial x^{\varkappa'}}{\partial p_\lambda}$ wird $n-q$, also gleich dem Range der Matrix von $\frac{\partial \xi^{h'}}{\partial \eta_i}$.

Die Gleichung (20) ermöglicht uns nun unsere Aufgabe zu erfüllen und die Berührungstransformation (14, 15) durch eine andere zu ersetzen, die in bezug auf Elemente genau so wirkt wie (14, 15) aber den Gleichungen (1), (2) und (3) auch für $p_\varrho x^\varrho \neq 0$ genügt. Führen wir nämlich statt der Gleichungen (13) die Gleichungen

$$p_\lambda = -\underset{\mathfrak{a}}{\lambda}\, \partial_\lambda \overset{\mathfrak{a}}{\Phi} + p_{\varrho'} x^{\varrho'} \partial_\lambda X; \quad p_{\lambda'} = +\underset{\mathfrak{a}}{\lambda}\, \partial_{\lambda'} \overset{\mathfrak{a}}{\Phi} - p_\varrho x^\varrho \partial_{\lambda'} X \quad . \qquad (21)$$

ein, die für Elemente mit (13) identisch werden, so ist erstens

$$\left.\begin{aligned} x^{\varrho'} p_{\varrho'} &= 0 + p_\varrho x^\varrho X = p_\varrho x^\varrho \\ x^\varrho p_\varrho &= 0 + p_{\varrho'} x^{\varrho'} X = p_{\varrho'} x^{\varrho'} \end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \qquad (22)$$

zweitens, mit Berücksichtigung von (22)

$$-p_\varrho\, dx^\varrho + p_{\varrho'}\, dx^{\varrho'} = -p_\varrho x^\varrho\, dX = 0, \quad . \quad . \quad . \quad . \qquad (23)$$

und zwar auch für $p_\varrho x^\varrho \neq 0$ und aus (22) und (23) folgt, ebenfalls für alle Fälle,

$$x^{\varrho'} dp_{\varrho'} = x^\varrho dp_\varrho \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \qquad (24)$$

Wir nennen (21) *eine Normalform* der doppelthomogenen Berührungstransformation. Da die Wahl von a beliebig ist, ist die Normalform nicht eindeutig bestimmt. Da die Form von X von der Wahl von a abhängt, kann man auch umgekehrt anfangen und X als Funktion von $x^{\varkappa}$ und $x^{\varkappa'}$ der Grade $+1, -1$ beliebig wählen.

3. *Das Haupttheorem.*

Setzen wir

$$\left.\begin{aligned} X = \overset{0}{X};\ X(\overset{\mathfrak{a}}{\Phi}+1) = \overset{\mathfrak{a}}{X} \\ \underset{\mathfrak{a}}{\lambda} = X \underset{\mathfrak{a}}{\mu};\ p_\varrho x^\varrho + \underset{\mathfrak{a}}{\mu} \frac{\overset{\mathfrak{a}}{X}}{X} = -\underset{0}{\mu} \end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \qquad (25)$$

so werden die $\overset{\mathfrak{p}}{X}.\ (\mathfrak{p} = 0, 1, \ldots, q)$ homogen von den Graden $+1, -1$ in $x^{\varkappa}, x^{\varkappa'}$ und die Gleichungen (12), (20) und (21) lassen sich schreiben

$$\overset{\mathfrak{p}}{X}(x^{\varkappa}, x^{\varkappa'}) = 1; \quad (\mathfrak{p} = 0, 1, \ldots, q) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \qquad (26)$$

$$p_\lambda = -\underset{\mathfrak{p}}{\mu}\, \partial_\lambda \overset{\mathfrak{p}}{X}; \quad p_{\lambda'} = +\underset{\mathfrak{p}}{\mu}\, \partial_{\lambda'} \overset{\mathfrak{p}}{X}. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \qquad (27)$$

Die Berührungstransformation wird erhalten durch Elimination der $\underset{\mathfrak{p}}{\mu}$ und Lösung von (26), (27) nach $x^{\varkappa'}, p_{\lambda'}$ sowie nach $x^{\varkappa}, p_\lambda$. Es fragt sich nun ob man umgekehrt aus $q+1$ beliebigen homogenen Funktionen der Grade $+1, -1$ in $x^{\varkappa}, x^{\varkappa'}$ in dieser Weise stets eine doppelthomogene Berührungstransformation mit den Graden $+1,0;\ 0,+1$ bekommt. Erstens müssen sich die Gleichungen natürlich nach $x^{\varkappa'}, p_{\lambda'}, \underset{\mathfrak{p}}{\mu}$ und ebenfalls nach $x^{\varkappa}, p_\lambda, \underset{\mathfrak{p}}{\mu}$ lösen lassen, d.h. die Determinante

$$\begin{vmatrix} \partial_\lambda \overset{\mathfrak{p}}{X}, & 0 \\ \underset{\mathfrak{p}}{\mu}\, \partial_{\lambda'} \partial_\lambda \overset{\mathfrak{p}}{X}, & \partial_{\lambda'} \overset{\mathfrak{p}}{X} \end{vmatrix} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \qquad (28)$$

darf nicht infolge (26) identisch in $\underset{\mathfrak{p}}{\mu}$ verschwinden. Ist diese Forderung erfüllt, so ergibt sich nach LIE jedenfalls eine homogene Berührungstransformation und die Grade von $x^{\varkappa'}$ und $p_{\lambda'}$ in p_λ werden 0 bzw. $+1$. Da wir von homogenen Funktionen in $x^{\varkappa}, x^{\varkappa'}$ ausgingen ist die Transformation auch doppelthomogen und es muss also nur noch bewiesen werden, dass die Grade von $x^{\varkappa'}$ und $p_{\lambda'}$ in $x^{\varkappa}$ bzw. $+1$ und 0 werden. Sind die durch Lösung nach $x^{\varkappa'}, p_{\lambda'}$ erhaltenen Gleichungen und ihre Umkehrungen

$$a) \quad x^{\varkappa'} = \varphi^{\varkappa'}(x^{\varkappa}, p_\lambda); \qquad b) \quad p_{\lambda'} = \psi_{\lambda'}(x^{\varkappa}, p_\lambda); \quad . \quad . \quad . \qquad (29)$$

$$a) \quad x^{\varkappa} = \varphi^{\varkappa}(x^{\varkappa'}, p_{\lambda'}); \qquad b) \quad p_\lambda = \psi_\lambda(x^{\varkappa'}, p_{\lambda'}); \quad . \quad . \quad . \qquad (30)$$

so folgt aus dem Umstande, dass man die linke Seite der Gleichungen (26) auch homogen von den Graden $-1, +1$ in $x^{\varkappa}, x^{\varkappa'}$ schreiben kann, dass die Grade von (29) und (30) gleich sein müssen also (vergl. S. 239)

$$a = a', \ b = b' = 0, \ c = c', \ d = d' = 1 \quad . \quad . \quad . \quad . \qquad (31)$$

Aus (16) folgt dann entweder

$$a = a' = +1,\ c = c' = 0 \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \qquad (32)$$

oder

$$a = a' = -1,\ c = c' = \text{frei wählbar} \ . \ . \ . \ . \ . \qquad (33)$$

Nehmen wir nun an es sei $a = -1$ so wäre

$$\frac{x^{\varkappa'}}{x^{0'}}\, x^0\, x^{0'} = \varphi^{\varkappa'}\left(\frac{x^{\varkappa}}{x^0}, p_\lambda\right) \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \qquad (34)$$

und die Elimination der p_λ könnte also nur Gleichungen ergeben, die $\frac{x^{\varkappa'}}{x^{0'}}, \frac{x^{\varkappa}}{x^0}$ und $x^0 x^{0'}$ enthielten, also Gleichungen von der Form

$$\frac{1}{x^0\, x^{0'}}\, F\left(\frac{x^{\varkappa'}}{x^{0'}}, \frac{x^{\varkappa}}{x^0}\right) = 1 \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \qquad (35)$$

Das System dieser Gleichungen müsste mit (26) gleichwertig sein. Nun sind aber jene Gleichungen homogen nullten Grades in den $2n+2$ Variablen $x^{\varkappa}, x^{\varkappa'}$ und folglich kann ein System von Gleichungen der Form (35) niemals mit (26) gleichwertig sein. Es bleiben also nur die Werte (32).

Damit haben wir folgenden Satz bewiesen:

Hauptsatz.

Die allgemeinste doppelthomogene Berührungstransformation von $x^{\varkappa}, p_\lambda$ in $x^{\varkappa'}, p_{\lambda'}$ von den Graden 1,0 *bzw.* 0,1 *in $x^{\varkappa}$ und p_λ in der Normalform wird erhalten, indem man ausgeht von $q+1$ $(1 \leqq q \leqq n)$ Gleichungen von der Form* (26), *wo die $\overset{\mathfrak{p}}{X}$ homogene Funktionen von $x^{\varkappa}, x^{\varkappa'}$ von den Graden $+1, -1$ sind, so gewählt, dass die Determinante* (28) *infolge* (26) *nicht identisch in den $\overset{\mathfrak{p}}{\mu}$ verschwindet und sodann die $\overset{\mathfrak{p}}{\mu}$ aus den Gleichungen* (26) *und* (27) *eliminiert und diese Gleichungen nach $x^{\varkappa'}, p_{\lambda'}$ bzw. $x^{\varkappa}, p_\lambda$ auflöst.*

Da vollkommener Dualismus besteht zwischen den $x^{\varkappa}$ und den p_λ, kann man bei der Formulierung des Hauptsatzes $x^{\varkappa}$ und p_λ vertauschen. Man kann also ebensogut mit Funktionen von $p_\lambda, p_{\lambda'}$ von den Graden $+1, -1$ anfangen.

4. *Beispiel.*

Der Weg um von einer homogenen Berührungstransformation zu einer der zugehörigen doppelthomogenen zu gelangen ist recht einfach. Man schreibt zunächst die Funktionen $\overset{\mathfrak{a}}{\Phi}$ in $x^{\varkappa}$ und $x^{\varkappa'}$, wählt eine beliebige Funktion X von den Graden $+1, -1$ in $x^{\varkappa}$ und $x^{\varkappa'}$ und bildet dann die $\overset{\mathfrak{p}}{X}$.

Als Beispiel behandeln wir die Transformation

$$\left.\begin{aligned} \xi^{1'} &= \xi^1 - \xi^a \zeta_a; \quad \xi^{2'} = \zeta_2; \quad \xi^{3'} = \zeta_3; \\ \zeta_{2'} &= -\xi^2; \quad \zeta_{3'} = -\xi^3 \end{aligned}\right\} \quad (a = 2, 3) \ . \ . \ . \qquad (36)$$

Uebergang zu ξ^h, η_i ergibt die Transformation

$$\left.\begin{aligned} \xi^{a'} &= -\frac{\eta_a}{\eta_1}; \quad \eta_{a'} = \xi^a\, \eta_1; \\ \xi^{1'} &= \frac{\xi^j \eta_j}{\eta_1}; \quad \eta_{1'} = \eta_1; \end{aligned}\right\} \quad (h, i, j = 1, 2, 3) \ . \ . \ . \ . \qquad (37)$$

die durch die Forderung $\eta_{j'}\, d\xi^{j'} = \eta_j\, d\xi^j$ eindeutig festgelegt ist. Es gibt nur eine Funktion Ω, nämlich

$$\Omega \equiv \xi^{1'} - \xi^1 + \xi^2 \xi^{2'} + \xi^3 \xi^{3'} = 0 \ . \ . \ . \ . \ . \qquad (38)$$

die beim Uebergang zu $x^{\varkappa}, p_\lambda$ übergeht in

$$\Phi \equiv \frac{x^{1'}}{x^{0'}} - \frac{x^1}{x^0} + \frac{x^2 x^{2'}}{x^0 x^{0'}} + \frac{x^3 x^{3'}}{x^0 x^{0'}} = 0 \ . \ . \ . \ . \ . \qquad (39)$$

Wir bekommen also die Gleichungen

$$\left.\begin{array}{llll} & p_0 = -\lambda \dfrac{x^{1'}}{x^0 x^{0'}} + \lambda \dfrac{\Phi}{x^0} = -\lambda \dfrac{x^{1'}}{x^0 x^{0'}}; & & p_{0'} = -\lambda \dfrac{x^1}{x^0 x^{0'}} + \lambda \dfrac{\Phi}{x^{0'}} = -\lambda \dfrac{x^1}{x^0 x^{0'}}; \\ & p_1 = \lambda \dfrac{1}{x^0} \qquad ; & & p_{1'} = \lambda \dfrac{1}{x^{0'}} \qquad ; \\ a) & & b) & \\ & p_2 = -\lambda \dfrac{x^{2'}}{x^0 x^{0'}} \qquad ; & & p_{2'} = \lambda \dfrac{x^2}{x^0 x^{0'}} \qquad ; \\ & p_3 = -\lambda \dfrac{x^{3'}}{x^0 x^{0'}} \qquad ; & & p_{3'} = \lambda \dfrac{x^3}{x^0 x^{0'}} \qquad ; \end{array}\right\} . \quad (40)$$

(wobei in der ersten Zeile von der Gleichung $\Phi = 0$ Gebrauch gemacht ist) und aus diesen Gleichungen ergibt sich

$$\left.\begin{array}{llllllll} & x^{0'} = \alpha \ ; & & p_{0'} = -\beta \dfrac{x^1}{x^0}; & & x^0 = \gamma \ ; & & p_0 = -\delta \dfrac{x^{1'}}{x^{0'}}; \\ & x^{1'} = -\alpha \dfrac{p_0}{p_1}; & & p_{1'} = \beta \ ; & & x^1 = -\gamma \dfrac{p_{0'}}{p_{1'}}; & & p_1 = \delta \ ; \\ a) & & b) & & c) & & d) & \\ & x^{2'} = -\alpha \dfrac{p_2}{p_1}; & & p_{2'} = \beta \dfrac{x^2}{x^0}; & & x^2 = \gamma \dfrac{p_{2'}}{p_{1'}}; & & p_2 = -\delta \dfrac{x^{2'}}{x^{0'}}; \\ & x^{3'} = -\alpha \dfrac{p_3}{p_1}; & & p_{3'} = \beta \dfrac{x^3}{x^0}; & & x^3 = \gamma \dfrac{p_{3'}}{p_{1'}}; & & p_3 = -\delta \dfrac{x^{3'}}{x^{0'}}. \end{array}\right\} . \quad (41)$$

γ und δ lassen sich als Funktionen von $x^{\varkappa'}, p_{\lambda'}$ bestimmen sobald α und

β als Funktionen von $x^\varkappa$ und p_λ gegeben sind, vorausgesetzt, das $ad - bc \neq 0$ ist (vgl. S. 239). Wir bestimmen β aus α, indem wir fordern

$$p_{\varrho'}\, dx^{\varrho'} = p_\varrho\, dx^\varrho = - x^\varrho\, dp_\varrho \qquad (\varrho = 0, 1, 2, 3) \quad . \quad . \quad . \quad (42)$$

oder (unter Berücksichtigung von $p_\varrho\, x^\varrho = 0$):

$$\left.\begin{aligned} \beta\, d\alpha \left(-\frac{x^1}{x^0} - \frac{p_0}{p_1} - \frac{p_2\, x^2}{p_1\, x^0} - \frac{p_3\, x^3}{p_1\, x^0}\right) + \beta\, \alpha \left(-\frac{1}{p_1}\, dp_0 + \frac{p_0}{(p_1)^2}\right) dp_1 & \\ - \frac{x^2}{p_1\, x^0}\, dp_2 + \frac{p_2\, x^2}{(p_1)^2\, x^0}\, dp_1 - \frac{x^3}{p_1\, x^0}\, dp_3 + \frac{p_3\, x^3}{(p_1)^2\, x^0}\, dp_1 = & \\ = - \frac{\beta\alpha}{p_1\, x^0}\, x^\varrho\, dp_\varrho = - x^\varrho\, dp_\varrho & \end{aligned}\right\} . \quad (43)$$

woraus folgt

$$\alpha\, \beta = + p_1\, x^0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (44)$$

Ebenso findet man

$$\gamma\, \delta = + p_{1'}\, x^{0'} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (45)$$

und durch Substitution von (41, a, b) in (40b)

$$\lambda = \alpha\, \beta \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (46)$$

und ebenso durch Substitution von (41, c, d) in (40a)

$$\lambda = \gamma\, \delta \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (47)$$

Wählen wir jetzt für α irgend eine Funktion von $x^\varkappa$ und p_λ von den Graden 1,0 z.B. $\alpha = x^0$ so folgt

$$\alpha = x^0, \;\; \beta = p_1, \;\; \gamma = x^{0'}, \;\; \delta = p_1; \;\; \lambda = p_1\, x^0 = p_{1'}\, x^{0'} \quad . \quad . \quad (48)$$

und

$$\left.\begin{array}{llllllll} & x^{0'} = x^0; & & p_{0'} = -\dfrac{p_1\, x^1}{x^0}; & & x_0 = x^{0'}; & & p_0 = -\dfrac{p_{1'}\, x^{1'}}{x^{0'}} \\ & x^{1'} = -\dfrac{p_0\, x^0}{p_1}; & & p_{1'} = p_1; & & x^1 = -\dfrac{p_{0'}\, x^{0'}}{p_{1'}}; & & p_1 = p_{1'} \\ a) & & b) & & c) & & d) & \\ & x^{2'} = -\dfrac{p_2\, x^0}{p_1}; & & p_{2'} = \dfrac{p_1\, x^2}{x^0}; & & x^2 = \dfrac{p_{2'}\, x^{0'}}{p_{1'}}; & & p_2 = -\dfrac{p_{1'}\, x^{2'}}{x^{0'}} \\ & x^{3'} = -\dfrac{p_3\, x^0}{p_1}; & & p_{3'} = \dfrac{p_1\, x^3}{x^0}; & & x^3 = \dfrac{p_{3'}\, x^{0'}}{p_{1'}}; & & p_3 = -\dfrac{p_{1'}\, x^{3'}}{x^{0'}} \end{array}\right\} (49)$$

Die Gleichung (20) ist hier

$$\frac{x^0}{x^{0'}} = 1 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (50)$$

sodass wir zur verallgemeinerten Transformation

$$\left.\begin{array}{ll} p_0 = -\lambda\, \dfrac{x^{1'}}{x_0\, x^{0'}} + p_{\varrho'}\, x^{\varrho'}\, \dfrac{1}{x^{0'}}; & p_{0'} = -\lambda\, \dfrac{x^1}{x^0\, x^{0'}} + p_\varrho\, x^\varrho\, \dfrac{1}{x^{0'}}; \\ p_1 = \lambda\, \dfrac{1}{x^0} & ;\; p_{1'} = \lambda\, \dfrac{1}{x^{0'}} \quad ; \\ p_2 = -\lambda\, \dfrac{x^{2'}}{x^0\, x^{0'}} & ;\; p_{2'} = \lambda\, \dfrac{x^2}{x^0\, x^{0'}} \quad ; \\ p_3 = -\lambda\, \dfrac{x^{3'}}{x^0\, x^{0'}} & ;\; p_{3'} = \lambda\, \dfrac{x^3}{x^0\, x^{0'}} \quad ; \end{array}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad (51)$$

gelangen. Wegen $\lambda = p_1\, x^0$ ergibt sich

$$\left.\begin{array}{llll} x^{0'} = x^0 & ;\; p_{0'} = p_0 + \dfrac{p_2 x^2 + p_3 x^3}{x^0}; \; x^0 = x^{0'} & & ;\; p_0 = p_{0'} + \dfrac{p_{2'}\, x^{2'} + p_{3'}\, x^{3'}}{x^{0'}}; \\ x^{1'} = x^1 + \dfrac{p_2 x^2 + p_3 x^3}{p_1}; \; p_{1'} = p_1 & & ;\; x^1 = x^{1'} + \dfrac{p_{2'}\, x^{2'} + p_{3'}\, x^{3'}}{p_{1'}}; \; p_1 = p_{1'} & ; \\ x^{2'} = -\dfrac{p_2\, x_0}{p_1} & ;\; p_{2'} = \dfrac{p_1\, x^2}{x^0} & ;\; x^2 = \dfrac{p_{2'}\, x^{0'}}{p_{1'}} & ;\; p_2 = -\dfrac{p_{1'}\, x^{2'}}{x^{0'}} \quad ; \\ x^{3'} = -\dfrac{p_3\, x^2}{p_1} & ;\; p_{3'} = \dfrac{p_1\, x^3}{x^0} & ;\; x^3 = \dfrac{p_{3'}\, x^{0'}}{p_{1'}} & ;\; p_3 = -\dfrac{p_{1'}\, x^{3'}}{x^{0'}} \quad ; \end{array}\right\} (52$$

und für diese Transformation, die auf Elemente ($p_\varrho\, x^\varrho = 0$) angewandt mit (49) identisch wird, gelten nun tatsächlich die Gleichungen (2), (3) (4) auch für $p_\varrho\, x^\varrho \neq 0$. Man erhält die also gefundene Normalform auch, wenn man die Gleichungen

$$\left.\begin{array}{ll} \multicolumn{2}{l}{\overset{0}{X} \equiv \dfrac{x^0}{x^{0'}} = 1; \;\; \overset{1}{X} \equiv \dfrac{1}{(x^{0'})^2}\,(x^0\, x^{1'} - x^1\, x^{0'} + x^2\, x^{2'} + x^3\, x^{3'} + x^0\, x^{0'}) = 1,} \\ p_0 = -\underset{0}{\mu}\, \dfrac{1}{x^{0'}} - \underset{1}{\mu}\, \dfrac{x^{0'} + x^{1'}}{(x^{0'})^2}; & p_{0'} = -\dfrac{\underset{0}{\mu}}{x^{0'}} - \underset{1}{\mu}\, \dfrac{x^0 + x^1}{(x^{0'})^2}; \\ p_1 = -\underset{1}{\mu}\, \dfrac{1}{x^{0'}} & ;\; p_{1'} = \underset{1}{\mu}\, \dfrac{1}{x^{0'}} \quad ; \\ p_2 = -\underset{1}{\mu}\, \dfrac{x^{2'}}{(x^{0'})^2} & ;\; p_{2'} = \underset{1}{\mu}\, \dfrac{x^2}{(x^{0'})^2} \quad ; \\ p_3 = -\underset{1}{\mu}\, \dfrac{x^{3'}}{(x^{0'})^2} & ;\; p_{3'} = \underset{1}{\mu}\, \dfrac{x^3}{(x^{0'})^2} \quad ; \end{array}\right\} (53)$$

nach Elimination von $\underset{0}{\mu}$ und $\underset{1}{\mu}$ nach $x^{\varkappa'}, p_{\lambda'}$ und nach $x^\varkappa, p_\lambda$ löst.
